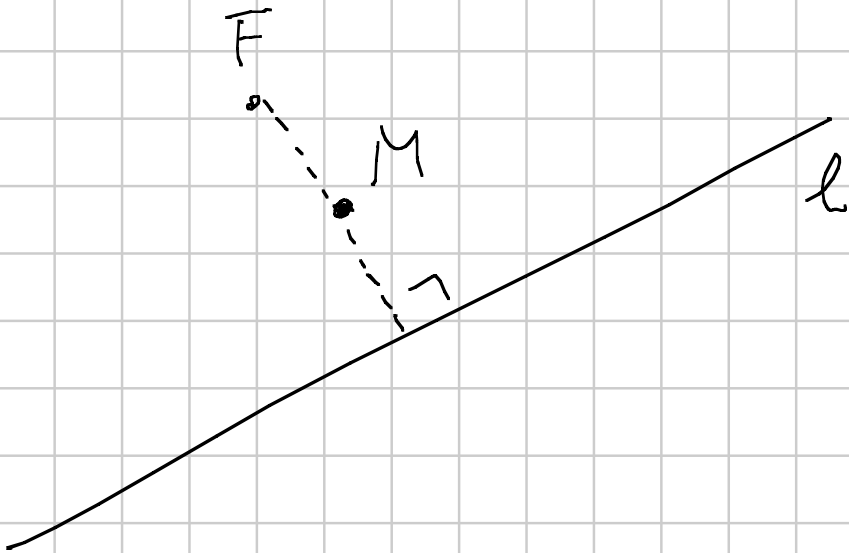


Geometria 12/4/17

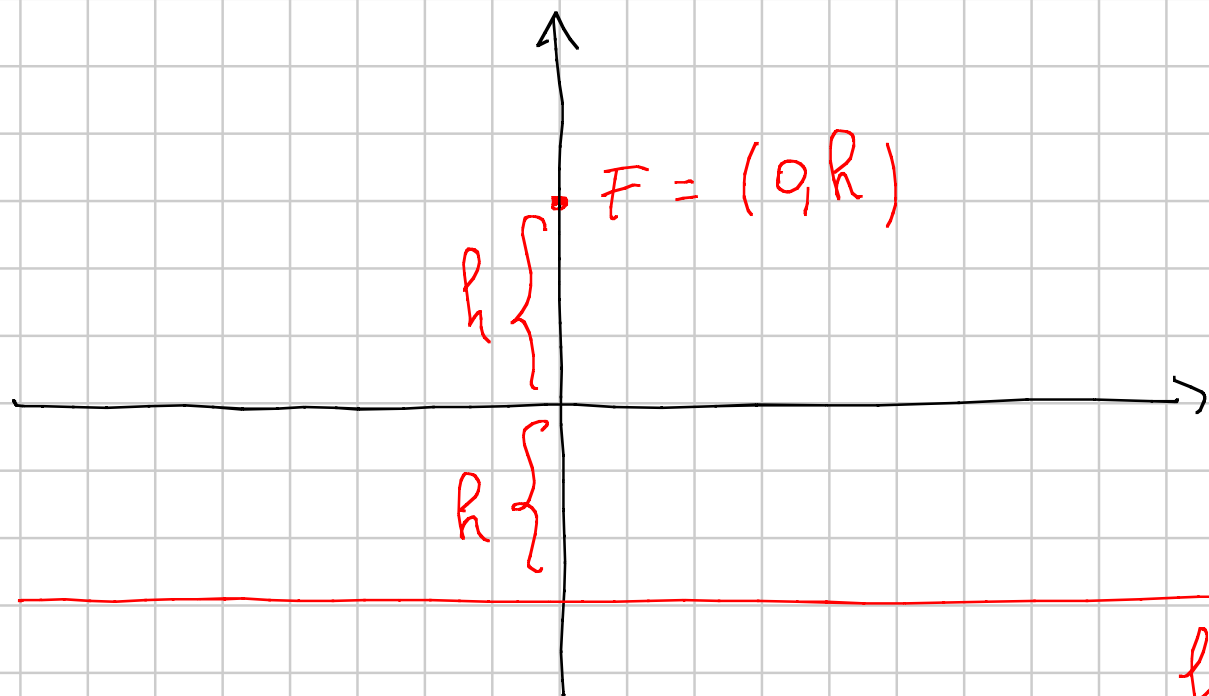
Parabola: $\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, l) = d(P, F)\}$

$F \notin l$ F ptto, l retta



- Traslo il rif. in modo che M sia il O
- ruoto in modo che l sia orizz con

ordinate negative.



$$l: y = -h$$

$$p: |y + h| = \sqrt{x^2 + (y - h)^2}$$

$$\cancel{y^2 + 2hy + h^2} = \cancel{x^2 + y^2 - 2hy + h^2}$$

$$y = \frac{1}{4h} x^2$$

$$y = ax^2 \quad a \neq 0$$

Eq. canoniche usate:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = ax^2$$

Oss: Sono equaz. d. II grado (non omop)
nelle coordinate -

Q: quale luogo $\bar{c}$ definito in $\mathbb{R}^n$
da una equaz. polinomiale di
II grado?

Rispondere no:

- $n=2$, $n=3$

- a meno di transf. affini

- solo per equaz. non degeneri -

_____ o _____

Transf. affini:

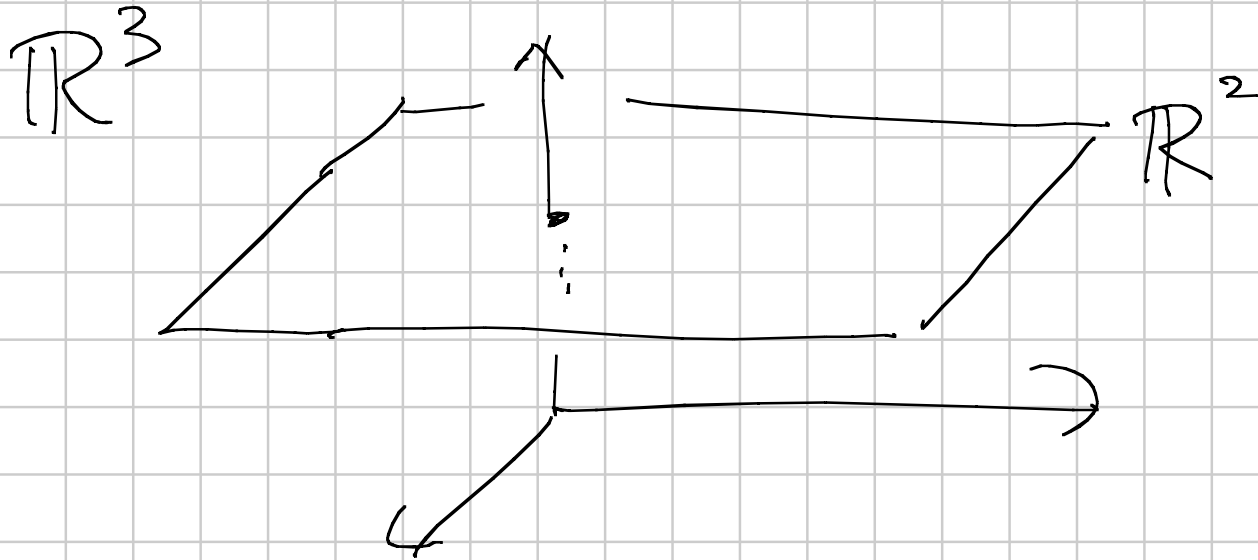
Def: chiamo trasf. affine una $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
del tipo

$$f(x) = A \cdot x + b$$

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ invertibile, $b \in \mathbb{R}^m$

Oss: se identifichiamo $\mathbb{R}^n$ con il

sottospazio affine $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$



posso scrivere f come :

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Ax+b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$f(x) = Ax+b$$

$\Rightarrow$ scriviamo f come la restrizione a $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ dell'applicazione lineare di $\mathbb{R}^{n+1}$ associata allo matrice $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Oss: se esaminiamo le coniche (ell/iperb/par)
a meno di transf. affini otteniamo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(a, b = semiasse, determinati
a meno di isometrie)

considero $\begin{cases} X = x/a \\ Y = y/b \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$$

otteniamo $\boxed{X^2 + Y^2 = 1}$

eq. can. affine

dell'ellisse

iperbole

$$\boxed{X^2 - Y^2 = 1}$$

eq. can. off. dell'iperbole

Parabole

$$y = ax^2 \quad (a > 0)$$

$$\begin{cases} X = \sqrt{a} \cdot x \\ Y = y \end{cases}$$

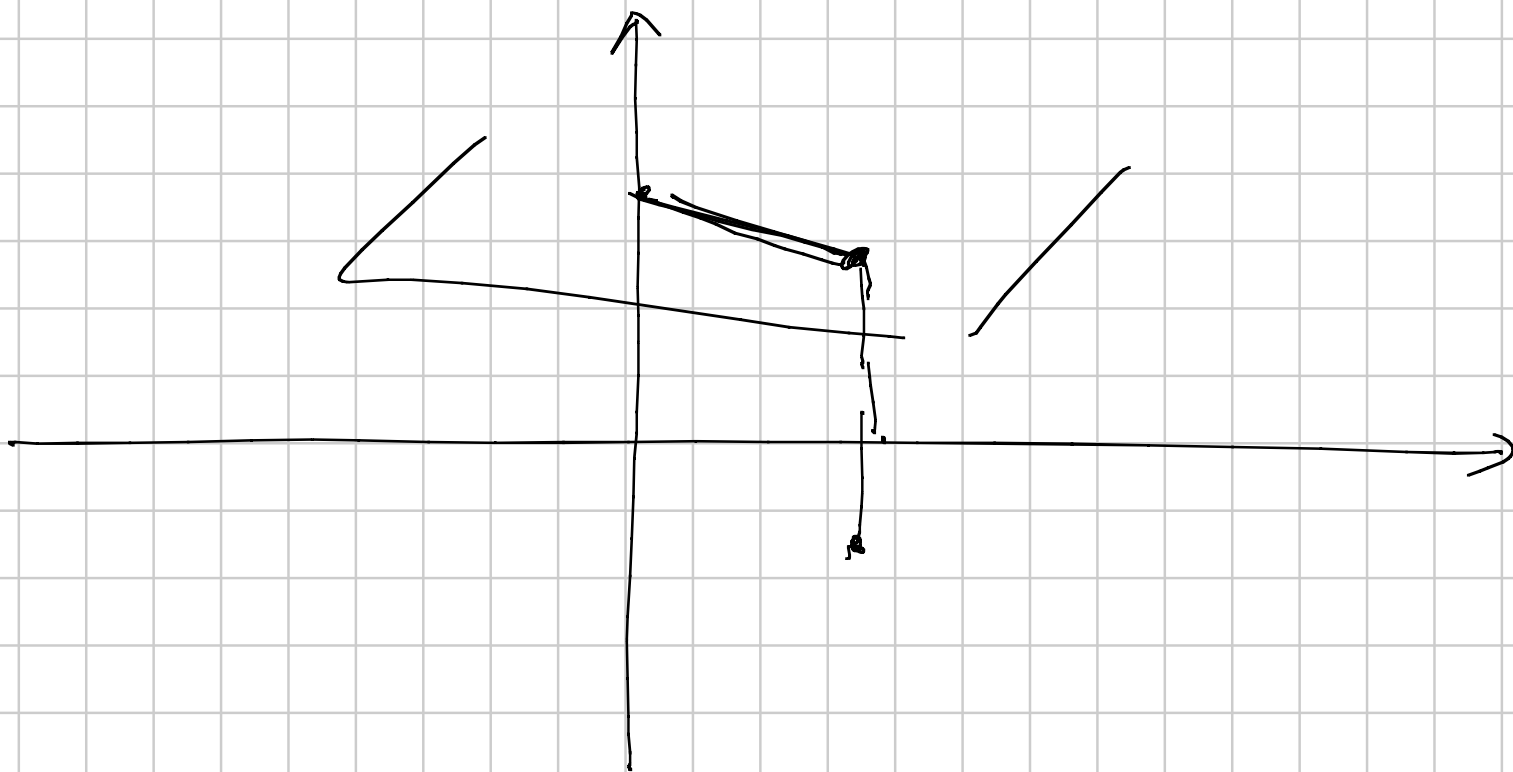
$$\boxed{Y = X^2}$$

eq. can. affine della parabola

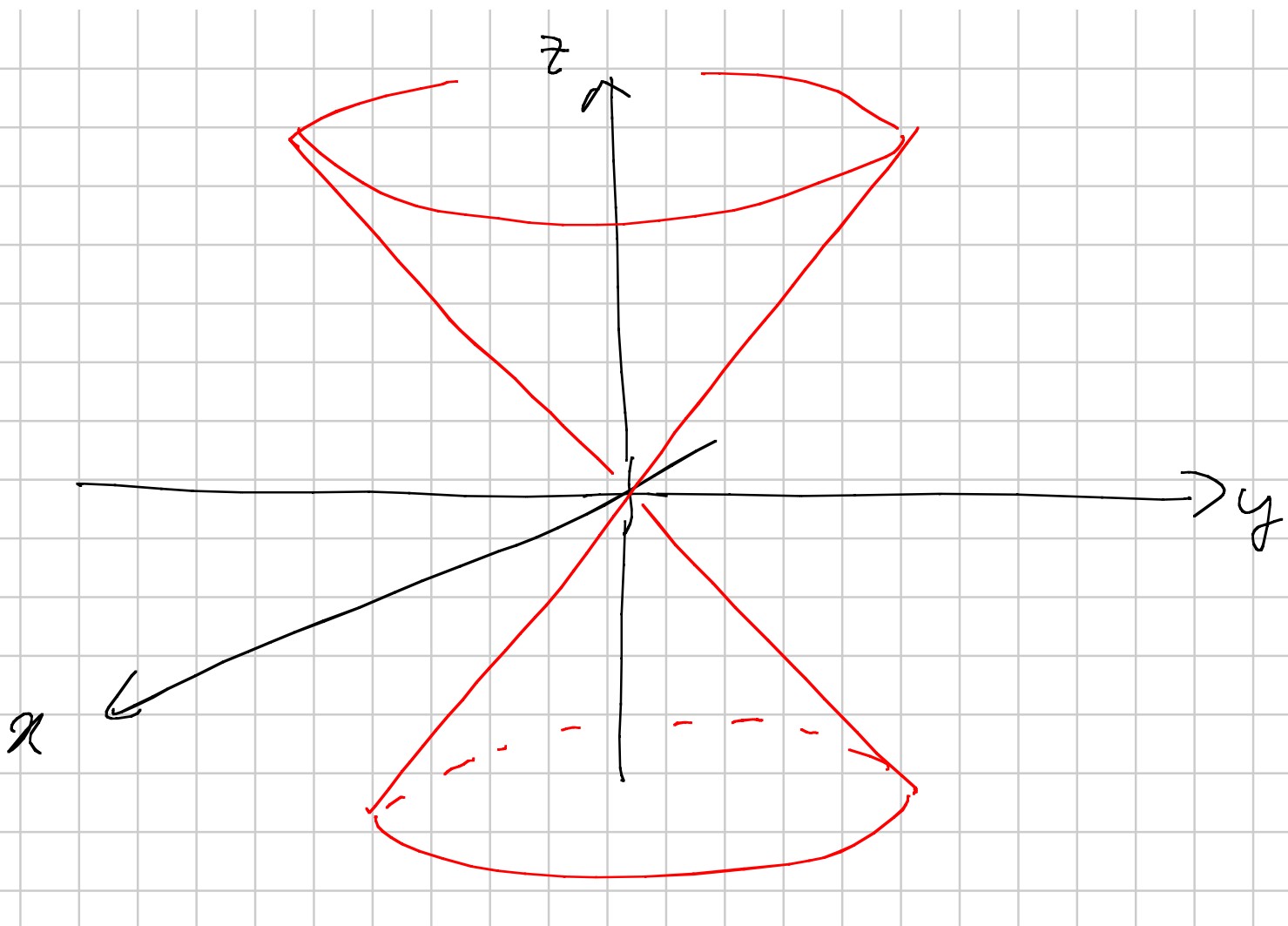
Oss: posso considerare $X^2 + Y^2 + 1 = 0$
che definisca l'insieme vuoto $\emptyset$.

Perché "coniche":

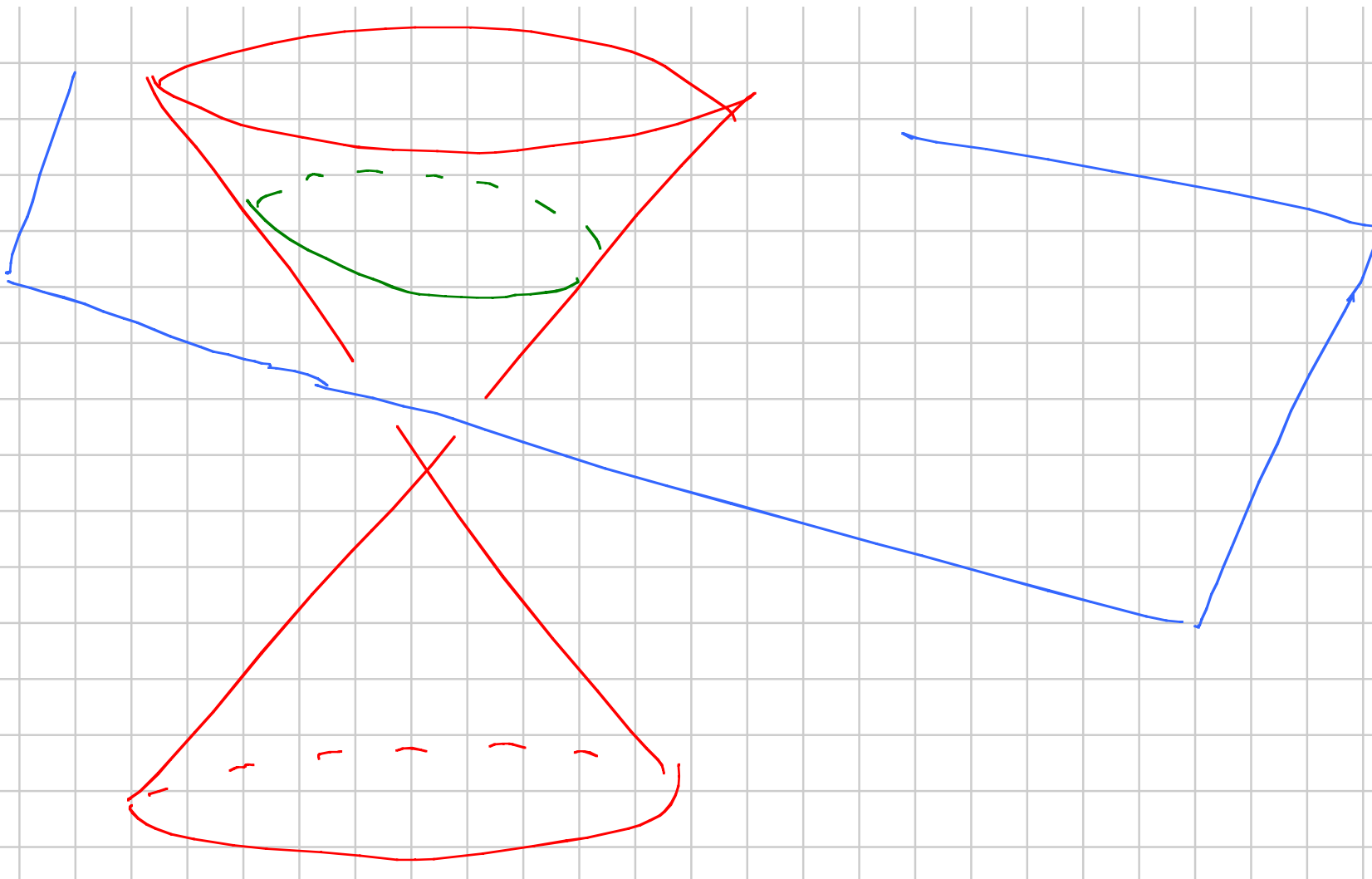
In $\mathbb{R}^3$ considero come $\underbrace{x^2 + y^2}_{\text{dist}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{asse } z\right)^2} = \underbrace{z^2}_{\text{dist}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{piano } xy\right)^2}$



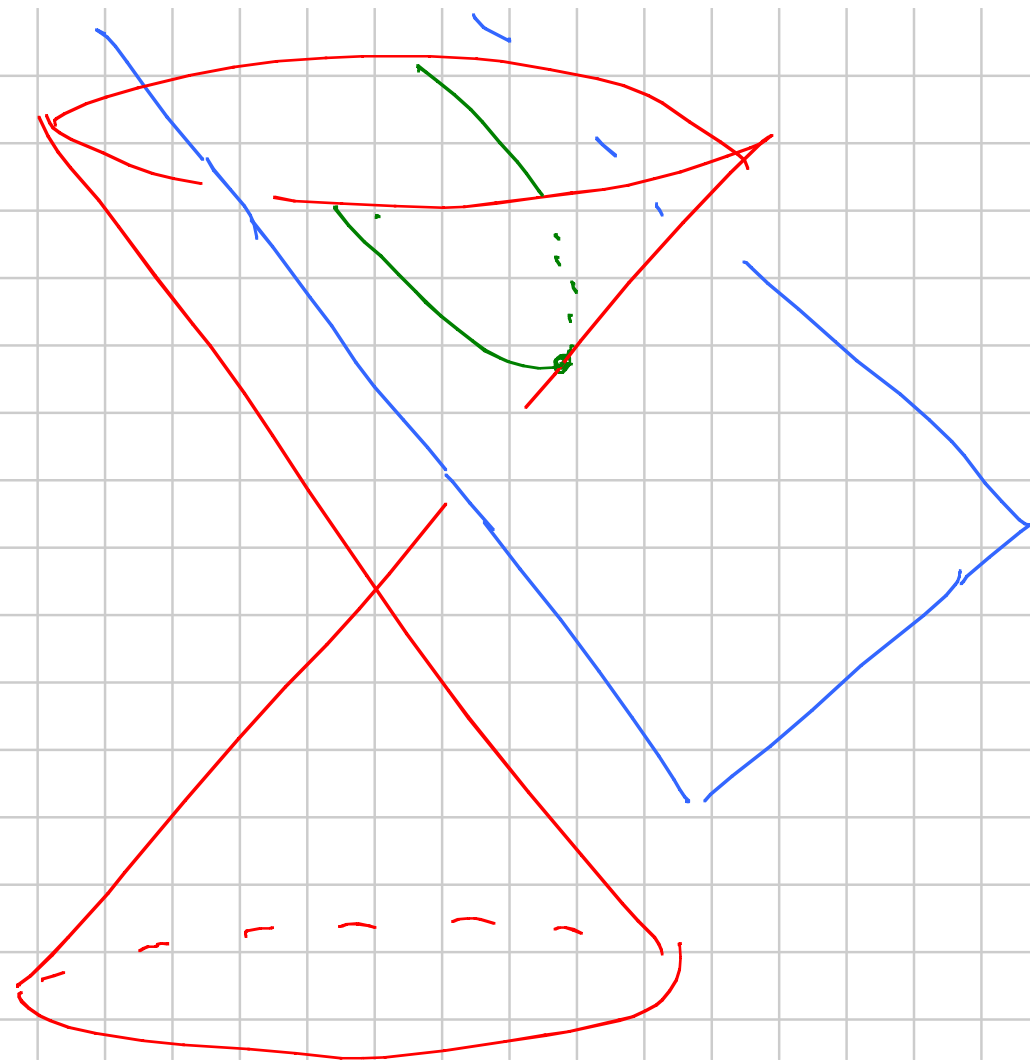
$\bar{e}$ sup. d'rotazione intorno all'asse z .



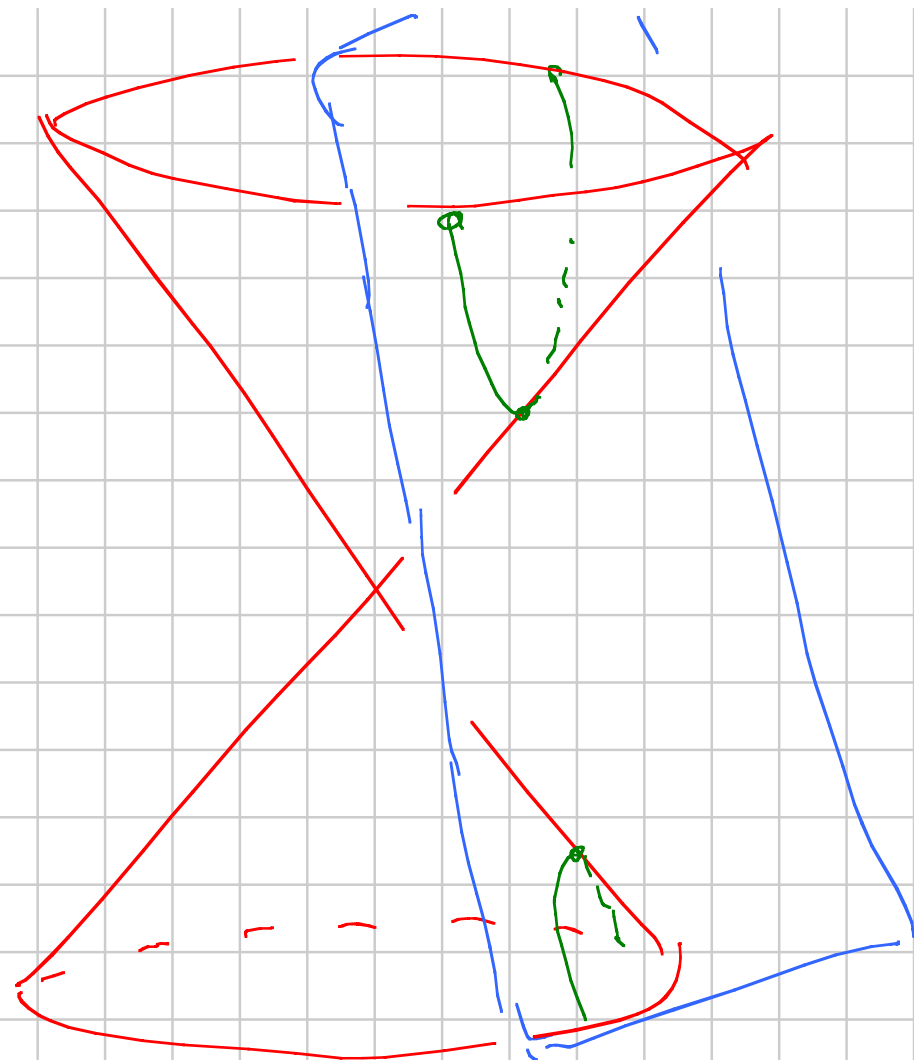
Fatto: ell., iperb., par. si ottengono
intersecando il cono con un piano
che non contiene né il vertice né
alcuna generatrice del cono stesso:



ellips



parabola



ipabole

Visto: le equazioni di secondo grado

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad y = x^2, \quad x^2 + y^2 + 1 = 0$$

definiscono a meno di transf. affini i modelli $\hookrightarrow$ ellisse, iperbole, parabola, $\emptyset$ in $\mathbb{R}^2$.

Q: $Y \subset \mathbb{R}^m$ quale insieme è definito da una equaz. di $\mathbb{A}^m$ grado?

Scrittura matriciale di una equez. di $\mathbb{I}$ grado:

Prop: ogni polinomio di $\mathbb{I}$ grado $p(x)$ nelle coordinate di un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive in modo unico come:

$$p(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove $A \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R})$ simmetrica -

Es: Gio' visto se il polinomio $\bar{t}$
↓ II grado omogeneo:

$$\sqrt{7}x^2 - 31xy + 5y^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -31/2 \\ -31/2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Se non è omogeneo è uguale me
aggiungendo ultima componente 1:

$$7x^2 + 18xy - 5y^2 + 4x - 3y + \sqrt{2}$$

$$= {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 9 & -5 & -3/2 \\ 2 & -3/2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Dima: come l'esempio.)

Notazione: $A = \begin{pmatrix} Q & l \\ t & c \end{pmatrix} \in M_{(m+1) \times (n+1)}$

$Q \in M_{m \times m}$ matrice delle
parte quadratiche
(termini di grado 2)

$l \in \mathbb{R}^n$ dove 2^{ta} l. x $\bar{z}$
la parte lineare
(termini di grado 1)

$c \in \mathbb{R}$ termine noto

Azione sulla matrice di un polinomio
di secondo grado di una trasf. affine:

Equazione $p(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}^t \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix}$$

"
 N

Nuovo polinomio in x' :

$${}^t \left(N \cdot \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot A \cdot \left(N \cdot \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$${}^t \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{{}^t N \cdot A \cdot N}_{A'} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix}$$

One

$$A = \begin{pmatrix} Q & p \\ {}^t \ell & c \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} M & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} {}^t M & 0 \\ {}^t b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t M & 0 \\ {}^t b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q M & Q \cdot b + l \\ {}^t l \cdot M & {}^t l \cdot b + c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t M \cdot Q \cdot M & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Scopo:

l'equazione associata a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

tramite cambio di coord. affine di

matrice $N = \begin{pmatrix} M & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ diventa

l'equazione associata è $A' = {}^t N \cdot A \cdot N$

con $A' = \begin{pmatrix} Q' & l' \\ {}^t l' & c' \end{pmatrix}$ e $Q' = {}^t M \cdot Q \cdot M$.

(qui M e dunque N sono invertibili).

Dunque: per classificare a meno di
 transf. affini un luogo di equaz.
 $p(x) = 0$ con $p(x)$ associato a $A = \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix}$

lavoro applicare le trasformazioni in modo
da ottenere una A' "facile" - Osservo
inoltre che il luogo non cambia se
sostituisco A con $k \cdot A$, $k \neq 0$.

Def: chiamo non degenere una equazione
 $p(x)=0$ con $p(x)$ di II grado se

$\det(A) \neq 0$ dove A è la matrice di $p(x)$.

Teo (classificazione delle coniche
non degeneri) :

sia $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ simmetrica

e sia $d_j = \det$ (angolo $j \times j$ in alto
a sinistra in A) ;

Supponiamo $d_3 \neq 0$ (non degenere);

poniamo $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$; dove:

- se $d_2 < 0$, $\mathcal{C}$ è un'iperbole
- se $d_2 = 0$, $\mathcal{C}$ è una parabola
- se $d_2 > 0$

* se $d_1 \cdot d_3 < 0$, $\mathcal{C}$ è un'ellisse

* se $d_1 \cdot d_3 > 0$, $\mathcal{C}$ è $\emptyset$

Oss: (1) Se $d_2 > 0$ h.o

$$d_2 = \det \begin{pmatrix} d_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow d_1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ i casi discussi sono tutti i possibili
con $d_3 \neq 0$.

(2) "e" nell'enunciato significa:

"esiste una transf. affine che manda L in uno dei luoghi:

$$x^2 - y^2 = 1, \quad y = x^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + 1 = 0."$$

Esempio: $x^2 + 6xy - 2y^2 + 8x - 2y + 5 = 0$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$(d_1 = 1)$$

$$d_2 = -11 < 0$$

$\Rightarrow$ iperbole

! posso trarre queste
conclusioni solo
dopo avere verificato
che $d_3 \neq 0$

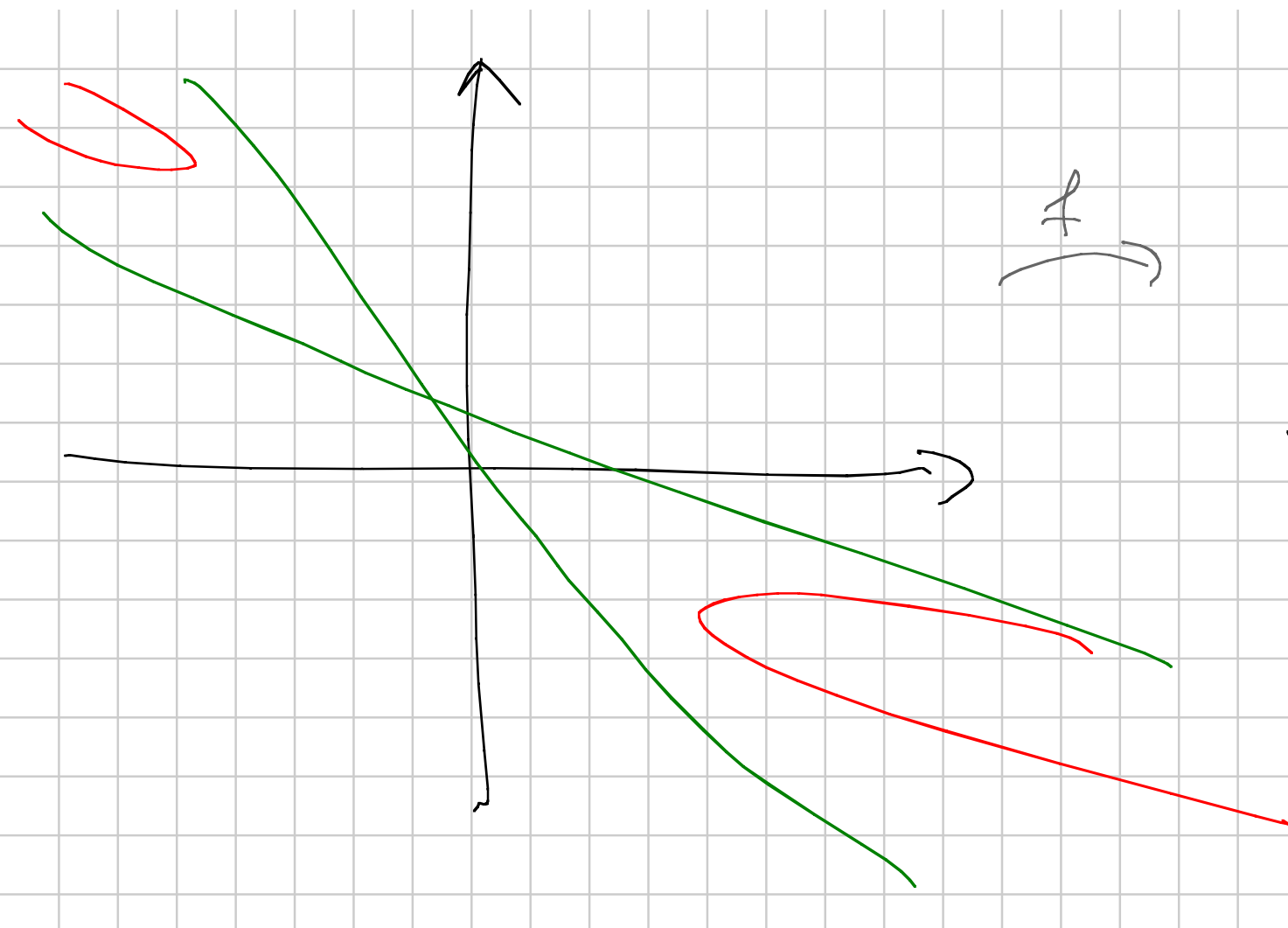
$$d_3 = -10 - 12 - 12 + 32 - 45 - 1$$

$$\neq 0$$

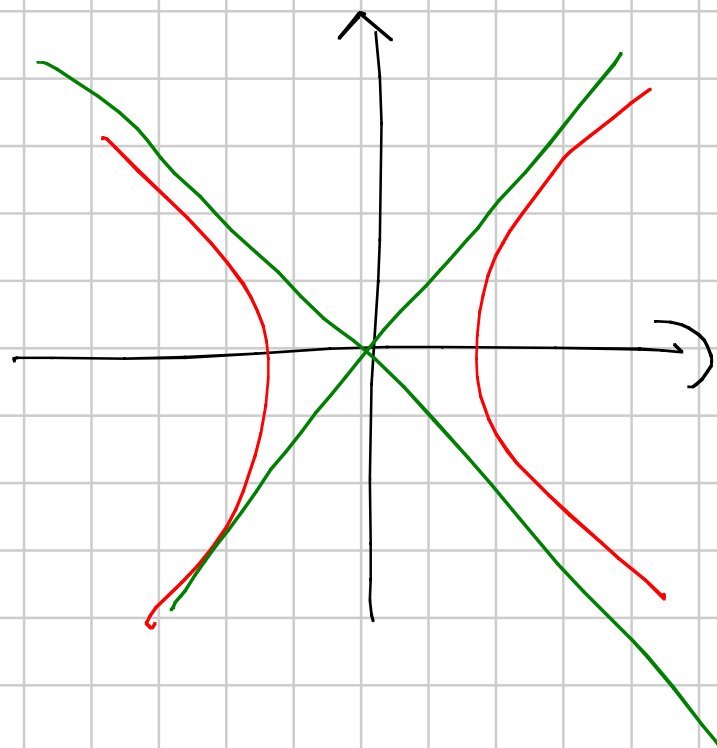
$\Rightarrow$

ok

$\bar{c}$ iperbole



$f \rightarrow$



Σsup: $5x^2 - 8xy + 7y^2 - 4x + 5y - 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 7 & 5/2 \\ -2 & 5/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$(d_1 = 5 > 0) \quad d_2 = 5 \cdot 7 - 16 > 0$

$$d_3 = -35 + 20 + 20 - 28 + 16 - \frac{125}{4}$$

$$= 56 - 63 - \frac{125}{4} < 0 \Rightarrow \text{elliptic}$$

Exemp) : $2x^2 - 2\sqrt{6}xy + 3y^2 - x + 3y = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{6} & -1/2 \\ -\sqrt{6} & 3 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d_1 = 2 > 0)$$

$$d_2 = 6 - 6 = 0$$

$\Rightarrow$ Parabola

solo se $d_3 \neq 0$

$$d_3 = \frac{3\sqrt{6}}{4} + \frac{3\sqrt{6}}{4} - \frac{3}{4} - \frac{9}{2} = \frac{3}{4}(2\sqrt{6} - 1 - 6) \neq 0$$

$\Rightarrow$ ok è parabola.

(Dimo del teo di classifcaz. coniche
rimandato e dopo -)

_____ o _____

Spazi proiettivi

Def: se X è un insieme di punti
relazione un sottoinsieme R di $X \times X$

(cioè alcune coppie di elementi di X).

Scriverei $x R y$ invece che $(x, y) \in R$
perché R esprime un rapporto tra x e y .

Es: $X = \text{genere umano}$

$R = \text{"è figlio di"}$

Davide $\bar{e}$ figlio di Gianfranco

Davide R Gianfranco

~~(Davide, Gianfranco) $\in$ l'insieme delle
coppie in cui
il primo $\bar{e}$
figlio del secondo~~

Esempio: $X = \mathbb{Z}$

relazione $<$ "è minore di"

Sappiamo

$$-7 < 11$$

~~$$(-7, 11) \in <$$~~

l'insieme delle coppie con
primo el. minore del secondo

Def: Se R è una relazione su X dico:

- R riflessiva se $xRx \quad \forall x \in X$
- R simmetrica se $xRy \implies yRx$
- R è antisimmetrica se
 xRy e $yRx \implies x=y$

• R transitive se xRy e $yRz \Rightarrow xRz$

• R è di equivalenza se è
riflessiva, simmetrico, transitiva

• R è di ordine se è
riflessiva, antisimmetrico, transitiva.

$X = \text{essere umano}$

Es: $x R y$ se x e y hanno almeno
un proprietario in comune.

refl: si

simm: si

antisimm: no

trans: no

Es: $x R y$ si x est proprie de y

right: $\bar{m}$ (convention)

siu: no

$\Rightarrow \bar{e}$ d'ordre

antisiu: $\bar{m}$

transluc: $\bar{m}$

Es: $x R y$ se x ha lo stesso numero
di scarpe di y

rifl: si

simon: si

antisim: no

trans: si

$\Rightarrow$ è di equiv.