

Geom 11/05/2017

12.2.8

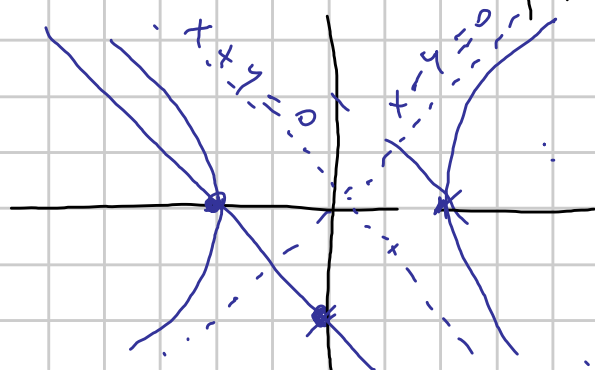
Punti all'∞ di

$$\underline{x^3 + y^3 - x^2 y - x y^2 - x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0}$$

$$(x^2 - y^2 - 1)(x - y + 1) = 0$$

↪

Prodotto di eq. iperbole e rette



$$[1:1:0]$$

$$[1:-1:0]$$

$$\text{all' } \infty [1:\pm 1]$$

$\mathcal{L}$ luogo di punti in $\mathbb{R}^2$

$\overline{\mathcal{L}}$ luogo definito dall'equazione omogenea
aggiungendo z

$$\mathcal{L}_\infty = \overline{\mathcal{L}} \cap \{z=0\}$$

$\Rightarrow \mathcal{L}_\infty$ è dato dalla parte di grado massimo
dell'eq. di $\mathcal{L}$

$$x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 0$$

$$(x+y)(x^2 - y^2) = 0$$

$$(x+y)^2 (x-y) = 0$$

↑

↑

$$[1:-1]$$

$$[1:1]$$



(doppio, infatti è p.to all' ∞ di iperbole e di rette) —

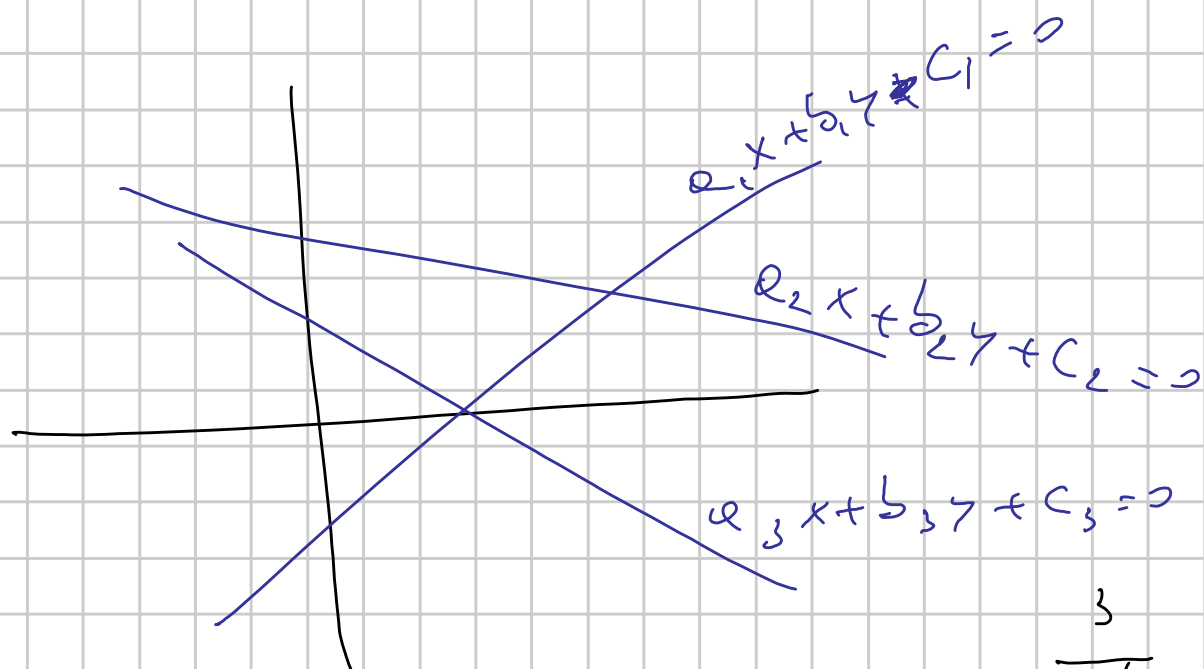
12.2.8

$$X \subset \mathbb{R}^2$$

definito da eq. di 3° grado

con 3 p.ti ∞ all' ∞ , non contenente rette —
(distinti)

Contenere ~~rette~~ sarebbe facile:



Le $[b_i, -a_i]$ sono
distinti nel
proiettivo $\Rightarrow$ ho
3 pti: all' ∞
distinti.

$$\prod_{i=1}^3 (a_i x + b_i y + c_i) = 0$$

Modifico per non avere

le tre rette nel luogo di punti X :

$$X: \prod_{i=1}^3 (a_i x + b_i y + c_i) = 1$$

stesso luogo ell' ∞ dato da
 $[b_i, -a_i] \quad i = 1, \dots, 3$

12.2.12 Punti all'infinito di

$$\{x \in \mathbb{A}^2 : \underbrace{(x_1 + x_2 - (x_1 + x_2)^2)} \cdot \underbrace{(x_1 x_2 + 1)} \cdot \underbrace{(x_1 - \sqrt{\pi})} \underbrace{(x_1^2 + 17x_2)} = 0\}$$

Considero i punti ell' ∞ dei singoli fattori.

$$x_1 + x_2 - (x_1 + x_2)^2 = 0$$

$$[1 : -1] \quad (\text{doppio})$$

$$x_1 x_2 + 1 = 0$$

$$[1 : 0]$$

$$[0 : 1]$$

$$x_1 - \sqrt{2} = 0$$

$$[0, 1]$$

$$x_1^2 + 17x_2 = 0$$

$$[0:1]$$

(doppio)

12.2.11

Descrivere i p.ti ell' ∞ dei sottoinsiemi
di $\mathbb{R}^3$ dati dalle eq

$$x^2 + y^2 = 1$$

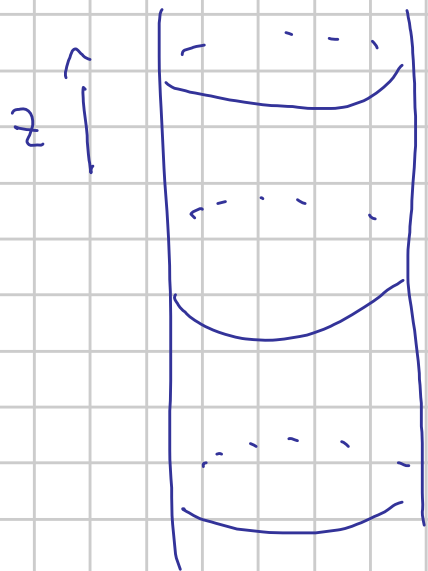
e

$$x^2 + y^2 = z^2$$

→ Parte di grado massimo

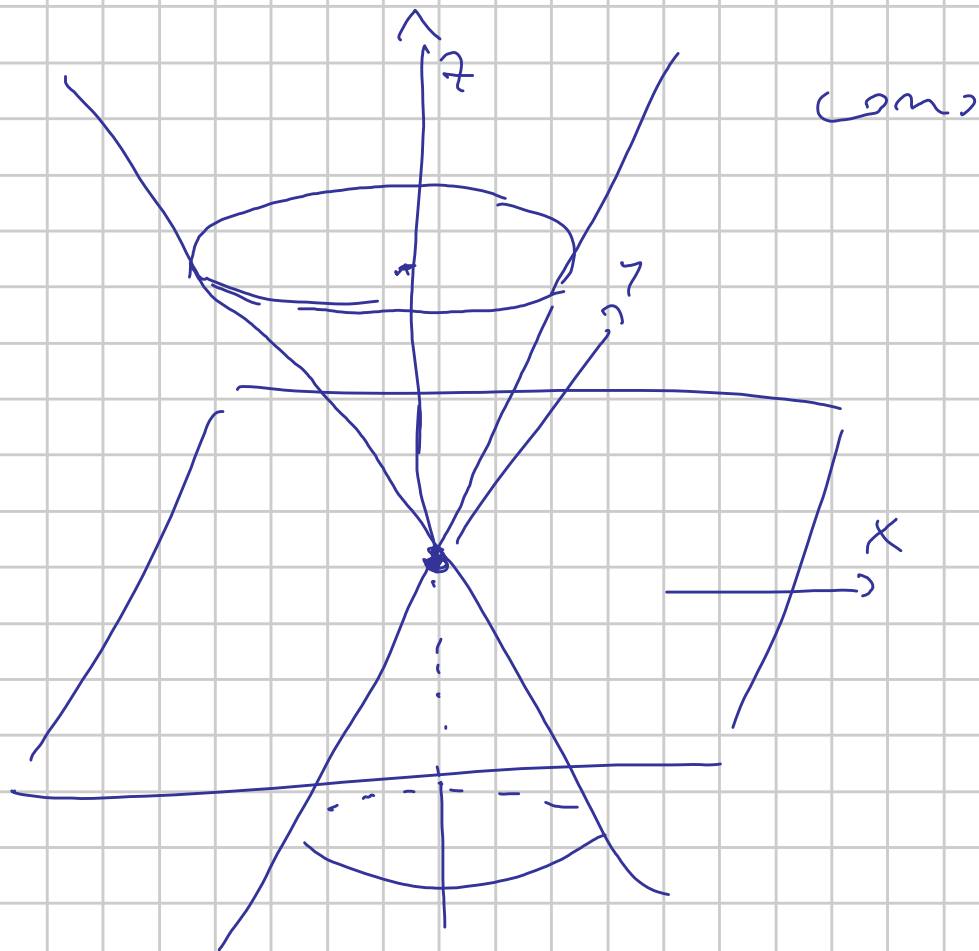
$$x^2 + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow [0:0:1]$$



$$x^2 + y^2 = z^2$$

— D



punti all' ∞ : una circonf.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$[x' : y' : 1]$$

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

luogo dei punti all' infinito

L' unica conica proiettiva reale $\neq \emptyset$

(2.3.1)

Punti di intersezione

$$\Omega \doteq \{ [t+2 : t+4 : 2t+7] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) ; t \in \mathbb{R} \}$$

con il luogo di p.ti all' ∞ in $\mathbb{R}^3$ di

$$\mathcal{L} : \underline{3x^2 - xy + 2yz - 6z^2 - 5x + 11y - 2z = 0}$$

$$\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 = \{ [x : y : z : 1] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{parte} \\ \text{finita} \end{array} \text{ di } \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \{ \underbrace{[x : y : z : 0]}_{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{parte} \\ \text{all' } \infty \end{array} \text{ di } \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$$

$\mathcal{L}_\infty$ = punti all' ∞ di $\mathcal{L}$
 = insieme definito da parte di grado max
 di equaz. di $\mathcal{L}$

$$= \{ [x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid 3x^2 - xy + 2yz - 6z^2 = 0 \}$$

$$\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}_\infty : 3(t+2)^2 - (t+2)(t+4) + 2(t+4)(2t+7) - 6(2t+7)^2 = 0$$

calcul. ...

$$3t^2 + 22t + 39 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 117}}{3} = \frac{-11 \pm 2}{3} \quad \begin{matrix} \sim 3 \\ \sim -13 \end{matrix}$$

Print all' ∞ :

$$\left[t+2 : t+4 : 2t+7 \right] \Big|_{t=-3} = [-1 : 1 : 1]$$

$$\left[t+2 : t+4 : 2t+7 \right] \Big|_{t=-\frac{13}{3}} = \left[-\frac{7}{3} : -\frac{1}{3} : -\frac{5}{3} \right] =$$

$$= [7 : 1 : 5]$$

12.3.2 Almeno un p.d. di intersezione di

$$\gamma_1 = \{ [t-1 : t^2-4 : -t] : t \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$$\gamma_2 = \{ [1-3t^2 : 1+t : 1+3t^2] : t \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

Devo imporre che un generico punto di Z_1
sia proporzionale a generico punto di Z_2

$$v_t = \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-4 \\ -t \end{pmatrix} \text{ proporz. a } \begin{pmatrix} 1-3s^2 \\ 1+s \\ 1+3s^2 \end{pmatrix} = w_s$$

posso cercare λ :

$$v_t = \lambda w_s$$

oppure posso imporre

$$\text{rank} \begin{pmatrix} t-1 & 1-3s^2 \\ t^2-4 & 1+s \\ -t & 1+3s^2 \end{pmatrix} \leq 1$$

Dovremo chiedere che i det dei 3 minori 2×2 siano tutti nulli.

- Siano le I^0 eq. e usano t e s (o vicev.)
- Siano le I^1 eq. e (sostituendo diventa in una sola variabile) e risolver

• Scrivo $\underline{U}$ eq. e controllo.

$$\underline{I} : (t-1)(1+3s^2) - (-t)(1-3s^2) = 0$$

$$\left(\begin{array}{c} \underline{I}^2 \text{ e } \underline{U}^2 \\ \text{risultato} \end{array} \right) \quad t(1+3s^2) - (1+3s^2) + t(1-3s^2) = 0$$

$$t = \frac{1+3s^2}{2}$$

$\underline{I}^2$ e $\underline{U}^2$

$$(t-1)(1+s) - (t^2-1)(1-3s^2) = 0$$

$$\left(\frac{3s^2-1}{2} \right) (1+s) - \left(\frac{9s^4+6s^2-15}{4} \right) \left(\frac{1+3s^2}{2} \right) (1-3s^2) = 0$$

$$(3s^2-1) [4(1+s) - 9s^4 - 6s^2 + 15] = 0$$

$$s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \bar{e} \text{ sol} \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

$$s = -1 \quad \bar{e} \text{ sol} \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

e solution, so

$$t = 1 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{N.D.}$$

$$\underline{t = 2, s = -1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ok

12.3.4 Stekline per ogni $t \in \mathbb{R}$

P $[t-4 : 1-4t : t^2+t+1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ appartiene
alla retta ℓ passante per $[4 : -1 : 5]$ e $[3 : 3 : -1]$

Se $\pi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$\ell = \pi(\ell \setminus \{0\})$$

$$\ell = \text{Span} \begin{pmatrix} t-4 \\ 1-4t \\ t^2+t+1 \end{pmatrix}$$

retta in $\mathbb{R}^3$

$$\ell \rightarrow \text{ssp. di dim 2 in } \mathbb{R}^3$$
$$\ell = \pi(W \setminus \{0\})$$

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$P \in \mathbb{R} \iff R \in W$$

$$\iff \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & t-4 \\ -1 & 3 & 1-4t \\ 5 & -1 & t^2+t+1 \end{pmatrix} = 0$$

(calcolo determinante) $15(t^2 - 5t + 6) = 0$

$$t = 2 \quad \text{or} \quad t = 3$$

12.4.1 Trovare i combinanti di coord. affini di $\mathbb{R}^n$
che lasciano fissi i p.ti all' ∞ -

$$X' = A X + v$$

$$\text{su } \mathbb{R}^n$$

$$v \in \mathbb{R}^n$$

$$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

invertibile

mi pti all'∞
✓

$$[Y'] = [A \cdot Y]$$

$$\text{su } \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$$

voglio $[Y] = [A \cdot Y]$

cioè $A = K Id$

$$\uparrow \forall Y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow A = K Id \quad K \in \mathbb{R}$$

$v \in \mathbb{R}^n$ qualsiasi

$\Rightarrow$ vanno bene composiz.
di traslazioni e
omotetie -

13.1.1 Parabola di vertice $(2, -1)$, passante
per $(5, 1)$, p.to ell' ∞ $[1:1]$

$x^2 = y$ (e meno li cambi li coord.)
p.to ell' ∞ e $[0:1]$

Cerco eq. nella forma

$$c \underbrace{(x + y + a)^2}_{x^2} = \underbrace{(x - y + b)}_y$$

Vertice $\bar{x}$ $(2, -1)$

$$\Rightarrow (x) \ 2 - (-1) + b = 0$$
$$(x) \ 2 + (-1) + a = 0$$
$$b = -3 \quad a = -1$$

... passando per $(5, 1)$: sostituisco

$$c (x + y - 1)^2 = (x - y - 3)$$

$$c (6 - 1)^2 = (4 - 3) \quad c = \frac{1}{25}$$

13.1.2 Iperbole con p.ti all' ∞ $[1:2]$ e $[-1:3]$
centro $(4, -5)$ passando per $(5, 1)$

$XY = c$ eg. 2 meno di cambio coord.

Conoscendo i p.ti all' ∞ so che

gli ordinati sono

$$(2x - y + a) \quad e \quad (3x + y + b)$$

impongo l'atteggiamento degli ordinati per $(4, -5)$

$$a = -13$$

$$b = -7$$

$$(2x - y - 13)(3x + y - 7) = c$$

e allora c imponendo l'atteggiamento per $(5, 1)$

$$(-4) \cdot (+9) = c \quad c = -36$$

13.4.1

es.

Trova il tipo affine di quadrica di
 $(x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$

simmetrica, $\det A \neq 0$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

"L è un paraboloide iperbolico"
equivale a

"esiste trasf. affine $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $A \in$
 $f(L) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 \right\}$ "

Il numero "2" ha il tipo affine di pseudoidade
iperbolico

Come trovare il tipo affine di una quadrica?

Usa d_1, d_2, d_3, d_4 per trovare i

segni di autovalori di Q e A

$A = \begin{pmatrix} Q & | \\ - & \cdot \end{pmatrix}$ e regione nell'eq. che
ritiene.

Attenzione cioè vol. se $d_4 \neq 0$ ($\det A \neq 0$)
 quindi devo sempre verificare se
 $\det A \neq 0$ (ovvero se predice
 è degenerate) -

(13.4.1) (a) $2x^2 - y^2 + z^2 + 4xz + 2yz - 2x + 6y - 2z = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$d_1 > 0$$

$$d_2 < 0$$

$$d_3 = 0$$

(inoltre $d_4 \neq 0$,
 va calcolato)

$\Rightarrow$ parab. iperbolico

$$\text{Ant.} \quad d_1 \quad Q \quad + - 0$$

$$\text{Ant.} \quad d_1 \quad A \quad + - + -$$

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2z = x^2 - y^2$$

circle parab. hyperb.

$$(C) \quad 2x^2 + 4y^2 - z^2 + 6xy - 2xz + 4yz - 4y + 2z - 1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$d_1 > 0 \quad d_2 < 0$$

$$d_3 = \dots = < 0$$

$$d_4 = \dots = > 0$$

Q

+ - +

A

+ - + -

Ci o e

$$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Ci o e

$$x^2 + z^2 = y^2 + 1$$

Ci o e

hyperboloid

a 2 fold

