

Geometria 9/3/2017

Filippo Callegaro EMAIL: callegaro@dm.unipi.it

LUNEDÌ

RICEVIMENTO

16-19

UFFICIO 401

DIP. NAT.

(ANNUNCIARSI VIA EMAIL)

3.1.4

Stabilire se f è bilineare, in tal

caso se è simmetrica, in tal caso se è DEF. POS.

(a) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = 7x_1y_2 + 8y_1y_2 - 5x_2y_1$
NOT BILINEARE

(b) $f(x, y) = -3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 8x_2y_1 + 7x_2y_2$
bilineare,
non simmetrica

(c) $f(x, y) = 7x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - 4x_2y_2$

bilinear, symm, def-pos.?

$$f(v, v) = -4 \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\wedge$
0

$\Rightarrow$ non def pos.

$$(d) \quad 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$$

bilin, symm.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det = -1 < 0$$

$$3x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$$

nulls on $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\text{for } \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad 3 + 6\varepsilon + 3\varepsilon^2 - 8 - 8\varepsilon + 5 = \underline{\underline{3\varepsilon^2 - 2\varepsilon}}$$

per $0 < \varepsilon \ll 1$ è negativo
non lo è.

(e) $f(x, y) = 4x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$
bil, simm.

$$\det \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} > 0$$

$$4x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = \left(2x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{11}{4}x_2^2$$

sempre ≥ 0 , nullo solo per $v = 0$ —

3.1.6 Per V sp. vett. su $\mathbb{R}$ e forme bilin. associate
 $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, dire se f è p. scalare

$$(a) \quad V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$f(A, B) = \sum_{i,j=1}^2 \overbrace{\left(1 + (-2)^{i+j}\right)}^{\text{coeff}} (AB)_{ij}$$

bil: f. su B . rispetto ad A ho:

- mult. a $2 \times$ per B (lin)
- estrazione di alcuni coeff. (lin)
- combinazione lineare di soli coeff. (lin)

$\Rightarrow \checkmark$

viceversa per B analogo

sim ? : scribo explicitamente

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(A, B) &= 5 (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) - 7 (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ &\quad - 7 (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) + 17 (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ non sim.

$$(b) \quad V = \mathbb{R}_{\leq 2}(t) \quad f(p(t), q(t)) = p(1) \cdot q'(-1) + q(1) \cdot p'(-1)$$

bil fissata q

- valore p in 1 (lin)

- derivare p (lin)

- valore p' in -1 (lin)

- combin. lineari di tali valori

simul $\checkmark$

def. pos. ?

$$f(p, q) = f(q, p)$$

$$p(t) \equiv 1$$

$$p'(t) = 0$$

$$f(p, p) = 0$$

nullo su $p(t) \equiv 1$

$$p(t) = -t + 2$$

$$p(1) = 1 \quad p'(-1) = -1$$

$$f(p, p) = -2 < 0$$

8.1.7

Stake line per metri metri $A, \langle \cdot | \cdot \rangle_A$

e p scalare

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \sqrt{2} \\ 5 & 3 & -1781 \\ \sqrt{2} & -1781 & e \end{pmatrix}$$

• riman ✓

• non def pos

calcolo $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ in

$$v = w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle v | v \rangle_A < 0$$

$\Rightarrow$ non def. pos.

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

rimuovi $\checkmark$
def. pos.?

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \langle v | v \rangle_A = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2 =$$

$$= (x_1 + 2x_2)^2 + \frac{2}{3}x_2^2 + 3\left(x_3 - \frac{1}{3}x_2\right)^2 \geq 0$$

è comb. lin. di quadrati con coeff pos.

nullo se

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 - \frac{1}{3}x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = 0$$

def pos $\checkmark$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

non simm.

Anticipo per analisi in più variabili

In 1 variabile

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \quad \text{derivate}$$

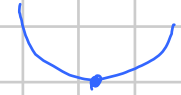
$$f''(x) = \text{derivate di } f'(x)$$

$$\text{Taylor} \quad f(x+t) = f(x) + f'(x) \cdot t + \frac{1}{2} f''(x) t^2 + o(t^2)$$

se $f'(x) \neq 0 \Rightarrow f$ è crescente / decrescente in
 $f' > 0$ $f' < 0$
 intorno di x

se $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0$ p.to di min. loc

$f''(x) < 0$ p.to di max loc



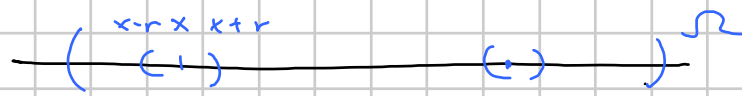
In più variabili: prendo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, cioè

$\forall x \in \Omega \exists r > 0$ t.c.

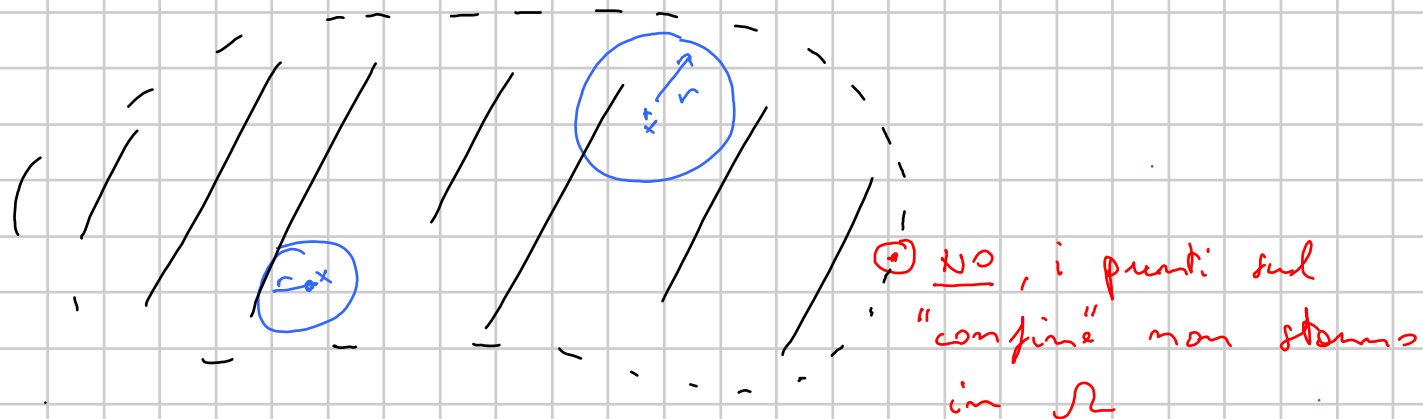
$\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$ è contenuto in Ω

↗ palla di centro x , raggio r

Per $n = 1$



Per $n=2$



Ovvero, Ω è aperto se preso qualsiasi $x \in \Omega$ ci si può spostare in qualsiasi direzione (di poco) restando dentro Ω .

Derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i+t, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x)}{t}$$

(derivare come se la variabile fosse solo x_i)

e le altre variabili fossero fissate) -

Es $f(x, y, z) = x^7 \cos(yz^3) e^{3x^5z}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 7x^6 \cos(yz^3) e^{3x^5z} + x^7 \cos(yz^3) 15x^4z e^{3x^5z}$$

Derivazione di funzione composta

$$n = 1 \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$n > 1 \quad \bigcup_{\substack{\mathbb{R}^n \\ f = (f_1, \dots, f_k)}} \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial g(f_1(x), \dots, f_k(x))}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(f(x))}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) =$$

incremento di g
lungo i -esima coord

incres. di i -esima coord
di f lungo x_j

Per $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ chiamo gradiente di f in x

$$\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Per $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^k$ chiamo matrice jacobiana di f in x

$$\begin{aligned} Jf(x) &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, n}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in M_{k \times n}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Prop $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$

$$J(g \circ f)(x) = (Jg)(f(x)) \cdot (Jf)(x)$$

↗ prodotto di matrici
righe per colonne

Inoltre

$$(J(g \circ f)(x))_{ij} = \frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(x) =$$

$$= \sum_{l=1}^k \underbrace{\frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(x))}_{Jg(f(x))_{il}} \underbrace{\frac{\partial f_l}{\partial x_j}(x)}_{Jf(x)_{lj}}$$

Derivate seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x)$$

ES $f(x, y) = x^3 y^2 \cdot \sin(x^4 e^{7y})$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2 \sin(x^4 e^{7y}) + x^3 y^2 \cos(x^4 e^{7y}) 4x^3 e^{7y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 2y \sin(x^4 e^{7y}) + x^3 y^2 \cos(x^4 e^{7y}) x^4 e^{7y} \cdot 7$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 6xy^2 \sin(x^4 e^{7y}) + 3x^2 y^2 \cos(x^4 e^{7y}) 4x^3 e^{7y} + \\ &+ 3x^2 y^2 \cos(x^4 e^{7y}) 4x^3 e^{7y} + x^3 y^2 (-\sin(x^4 e^{7y})) (4x^3 e^{7y})^2 + \\ &+ x^3 y^2 \cos(x^4 e^{7y}) 12x^2 e^{7y} \end{aligned}$$