

Geometrie 8/3/17

Prop. in V con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ da $v_1, \dots, v_n$ base
si ha $w_1, \dots, w_n$ base ortonormale ca:

$$\tilde{w}_1 = v_1 \quad w_1 = \tilde{w}_1 / \|\tilde{w}_1\|$$

$$\tilde{w}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1} | w_i \rangle \cdot w_i, \quad w_{k+1} = \tilde{w}_{k+1} / \|\tilde{w}_{k+1}\|.$$

Dim. Basta vedere che per $k=0, \dots, n$

$$(1) \text{Span}(w_1, \dots, w_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$$(2) \tilde{w}_{k+1} \perp w_1, \dots, w_k \text{ e non nullo}$$

Perché basta: da (2) $w_{k+1} = \frac{\tilde{w}_{k+1}}{\|\tilde{w}_{k+1}\|}$ è

ben definito $\Rightarrow$ la costruzione è possibile fino a $k=n$; la (1) dice che ho base (generano e sono n); la (2) dice che sono ortogonali e sono unitari.

Si prova per induzione su k .

$k=0$: (1) $0 \leq k$ (2) $\tilde{w}_1 = v_1 \neq 0$.

Paso induttivo: suppongo vero per $k-1$.

- $\text{Span}(w_1, \dots, w_{k-1}) = \text{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$
- $\tilde{w}_k \perp w_1, \dots, w_{k-1}$ e non nullo.

$$\tilde{w}_k = v_k - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k | w_i \rangle w_i}_{\text{comb. lin. di } w_1, \dots, w_{k-1}}$$

$$= \text{comb. lin. } v_1, \dots, v_{k-1}$$

$$\Rightarrow \tilde{w}_k \neq 0, \quad \text{Span}(w_1, \dots, w_{k-1}, \tilde{w}_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$$\text{Span}(w_1, \dots, w_k) \Rightarrow (1) \text{ OK}$$

$$\tilde{w}_{k+1} = v_{k+1} - \underbrace{\sum_{i=1}^k \langle v_{k+1} | w_i \rangle \cdot w_i}_{\text{per (1) \text{ e comb lin di } v_1, \dots, v_k}}$$

$$\tilde{e} \neq 0.$$

$$\text{Resle } \langle \tilde{w}_{k+1} | w_j \rangle = \quad (j \leq k)$$

$$= \langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1} | w_i \rangle \cdot w_i | w_j \rangle$$

$$= \langle v_{k+1} | w_j \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1} | w_i \rangle \cdot \underbrace{\langle w_i | w_j \rangle}_{S_{ij}}$$

$$= \langle v_{k+1} | w_j \rangle - \langle v_{k+1} | w_j \rangle = 0.$$

□

Oss: per costruzione la matrice di cambio
di base da $v_1, \dots, v_n$ a $w_1, \dots, w_n$ è del tipo

$$\begin{pmatrix} (>0) & * & * & & * \\ 0 & (>0) & * & & \vdots \\ 0 & 0 & (>0) & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & (>0) \end{pmatrix}; \text{ in part. the } \det > 0.$$

Def: in $\mathbb{R}^3$ con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ chiamo prodotto
 vettoriale di v e w il vettore

$$v \wedge w = \text{"} \det \begin{pmatrix} e_1 & v_1 & w_1 \\ e_2 & v_2 & w_2 \\ e_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \text{"}$$

(x invece
che $\wedge$)

sviluppo lungo la 1^a col

cioè

$$\begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ -(v_1 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_1) \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$$

($\bar{e}$ è quello che si usa nei paragrafi:
piano param $\rightarrow$ piano cart e
retta cart $\rightarrow$ retta param.)

Fatti: (1) $v \wedge w$ è un vettore
ortogonale a v e w (dunque $\bar{e}$ $\perp$
al piano generato)

(2) $\|v \wedge w\|$ = area del parallelogramma
di lati v e w (dunque $v \wedge w$

è nullo se e solo se v, w lin. dip)

$$(3) \quad \det \begin{pmatrix} v & w & v \wedge w \end{pmatrix} > 0 \quad \text{se } v, w \text{ lin. indep.}$$

(cioè $v, w, v \wedge w$ è una terna libera)

(cioè rispetta regole mano dx) -

Verifico (1) (altr conf.):

$$\langle v \mid v \wedge w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= V_1 V_2 W_3 - V_1 V_3 W_2 \\
&\quad - V_1 V_2 W_3 + V_1 V_3 W_2 \\
&\quad + V_2 V_3 W_1 - V_2 V_3 W_1 = 0 \checkmark
\end{aligned}$$

per $\langle w | v \rangle = 0$ uphole

(2) ...

$$(3) \quad \det \begin{pmatrix} V_1 & W_1 & V_2 W_3 - V_3 W_2 \\ V_2 & W_2 & -V_1 W_3 + V_2 W_1 \\ V_3 & W_3 & V_1 W_2 - V_2 W_1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

Ese: ortogonalizzare con G-S la base

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

w_1, w_2 fatti

w_3 è l'unico vettore unitario ortogonale

a $\text{Span}(w_1, w_2) = \text{Span}(v_1, v_2)$ t.c.

$\det(w_1, w_2, w_3)$ è concorde con $\det(v_1, v_2, v_3)$

(poiché la matrice di cambio base ha $\det > 0$).

Osservo: $\det(w_1, w_2, w_3)$ è concorde
con $\det(v_1, v_2, w_3)$ -

Dunque w_3 è l'unico vett. unitario,
ortop a v_1 e v_2 ($\Rightarrow w_3 = \pm \frac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|}$)
con segno $\pm$ scelto in modo che

$\det(v_1, v_2, w_3)$ sie coincide con $\det(v_1, v_2, v_3)$.

$$\text{Para moi: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -10 - 6 + 8 + 1 < 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 2 & 5 & -5 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 5 + 30 + 13 \cdot 15 \\ -26 - 4 - 5 > 0$$

$$\Rightarrow w_3 = - \frac{1}{\sqrt{169 + 25 - 1}} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con: se $\dim(V) < +\infty$ un sistema ortop di
 vettori $\neq 0$ si può completare a
 base ortop.

In fatti: $v_1, \dots, v_k$ lin. indep; completo a $v_1, \dots, v_n$;

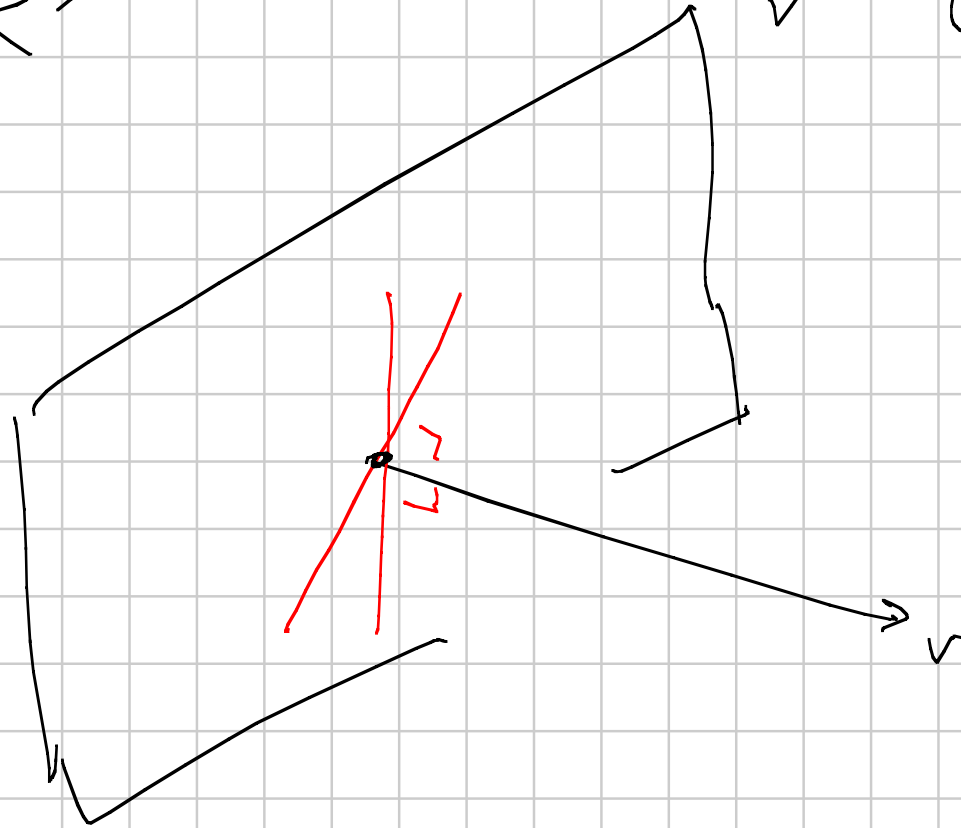
$$\underline{G-S} \rightarrow \begin{array}{c} w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_m \\ \parallel \qquad \qquad \parallel \\ v_1 / \parallel v_1 \parallel \quad v_k / \parallel v_k \parallel \end{array}$$

$$\longrightarrow v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_m \quad \square$$

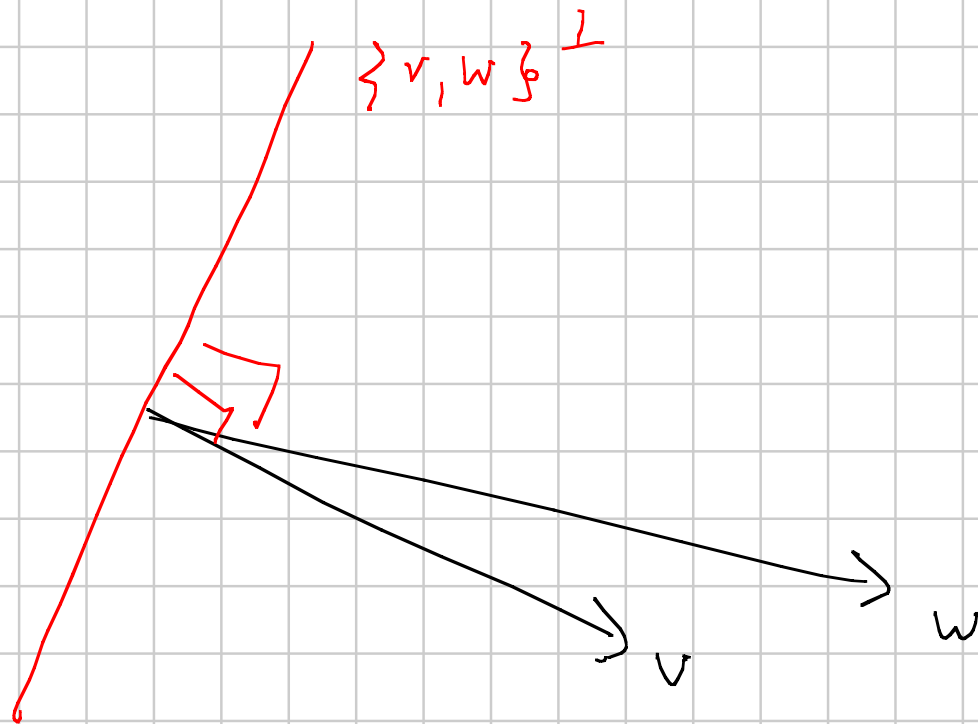
Def: se $X \subset V$ è un sottoinsieme
chiamo $X^\perp = \{v \in V : \langle v/x \rangle = 0 \quad \forall x \in X\}$.

Σ_S : in $\mathbb{R}^3$

$v^\perp$ (invcl $\{v\}^\perp$)



$\mathcal{L}_S : v, w \in \mathbb{R}^3$ lin. indep.



Oss: (1) $X^\perp$ è sempre un sottospazio

$$(2) X^\perp = (\text{Span}(X))^\perp$$

(1) uffa: se $v_1, v_2 \in X^\perp$, cioè $\langle v_1 | x \rangle = \langle v_2 | x \rangle = 0 \quad \forall x \in X$
allora $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 | x \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle v_1 | x \rangle}_0 + \lambda_2 \underbrace{\langle v_2 | x \rangle}_0 = 0 \quad \forall x \in X$

$$(2) X^\perp \supset (\text{Span}(X))^\perp$$

(in generale $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$)

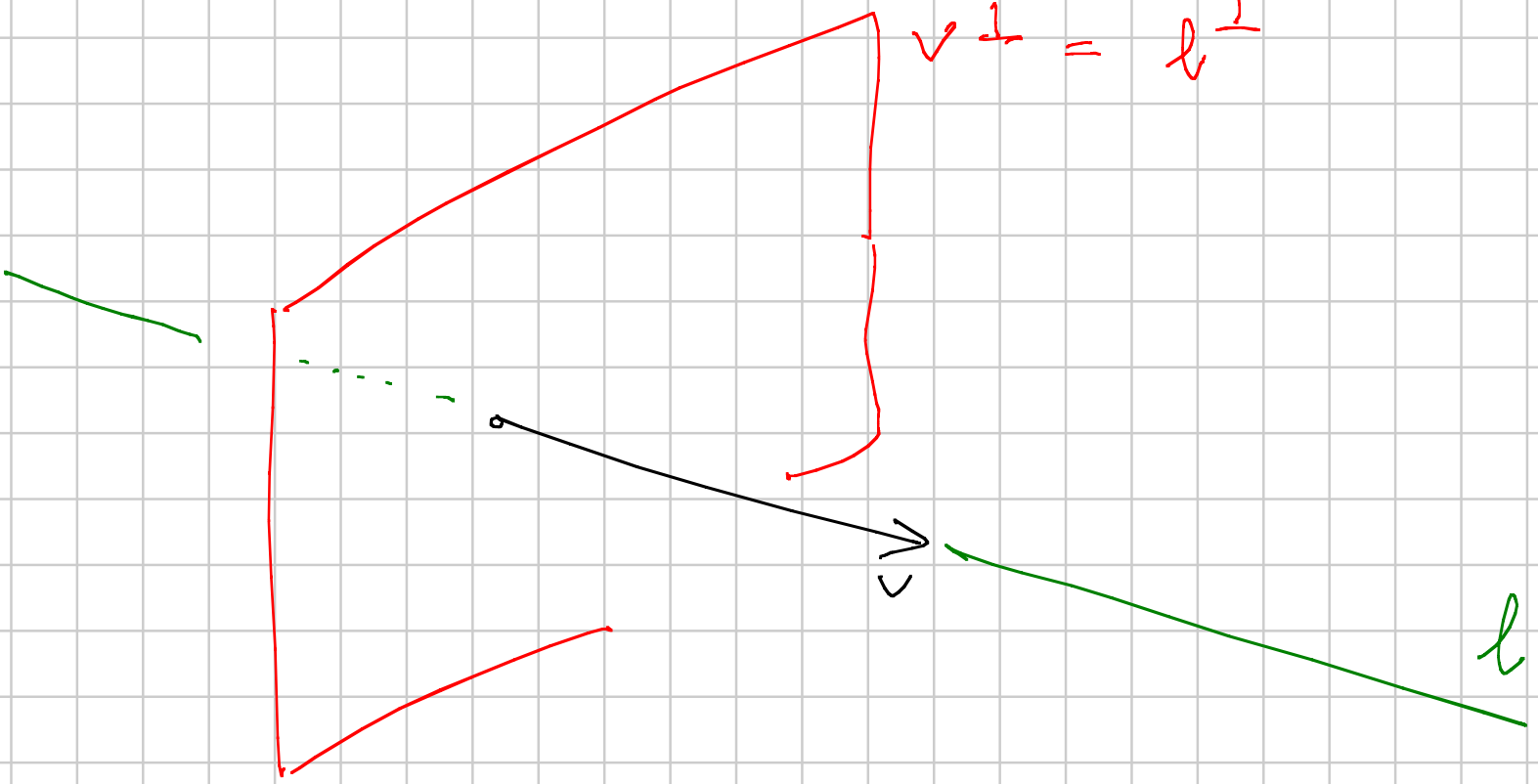
Vicenza : se $v \in X^\perp$ devo provare che
 $v \in (\text{Span}(X))^\perp$, cioè secondo che $\langle v/x \rangle = 0$
 $\forall x \in X$

devo provare che $\langle v/y \rangle = 0 \quad \forall y \in \text{Span}(X)$.

Ma $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \quad x_j \in X, \lambda_j \in \mathbb{R}$

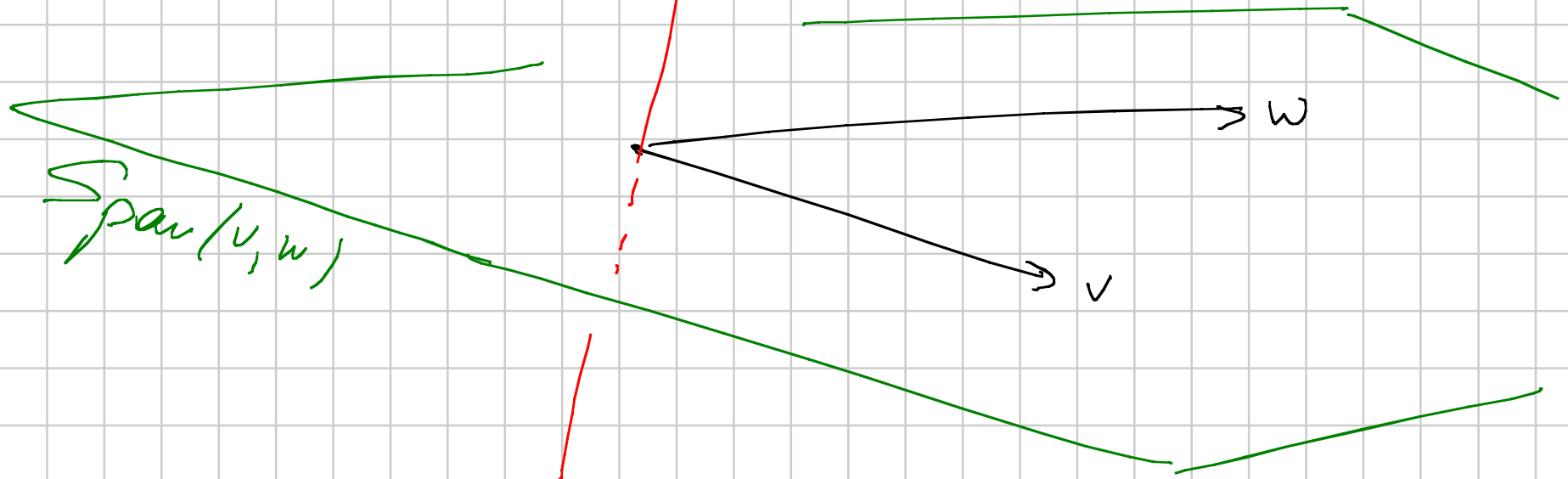
$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle v/y \rangle &= \langle v / \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \rangle \\ &= \lambda_1 \underbrace{\langle v/x_1 \rangle}_0 + \dots + \lambda_k \underbrace{\langle v/x_k \rangle}_0 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Fig. 1



Ex:

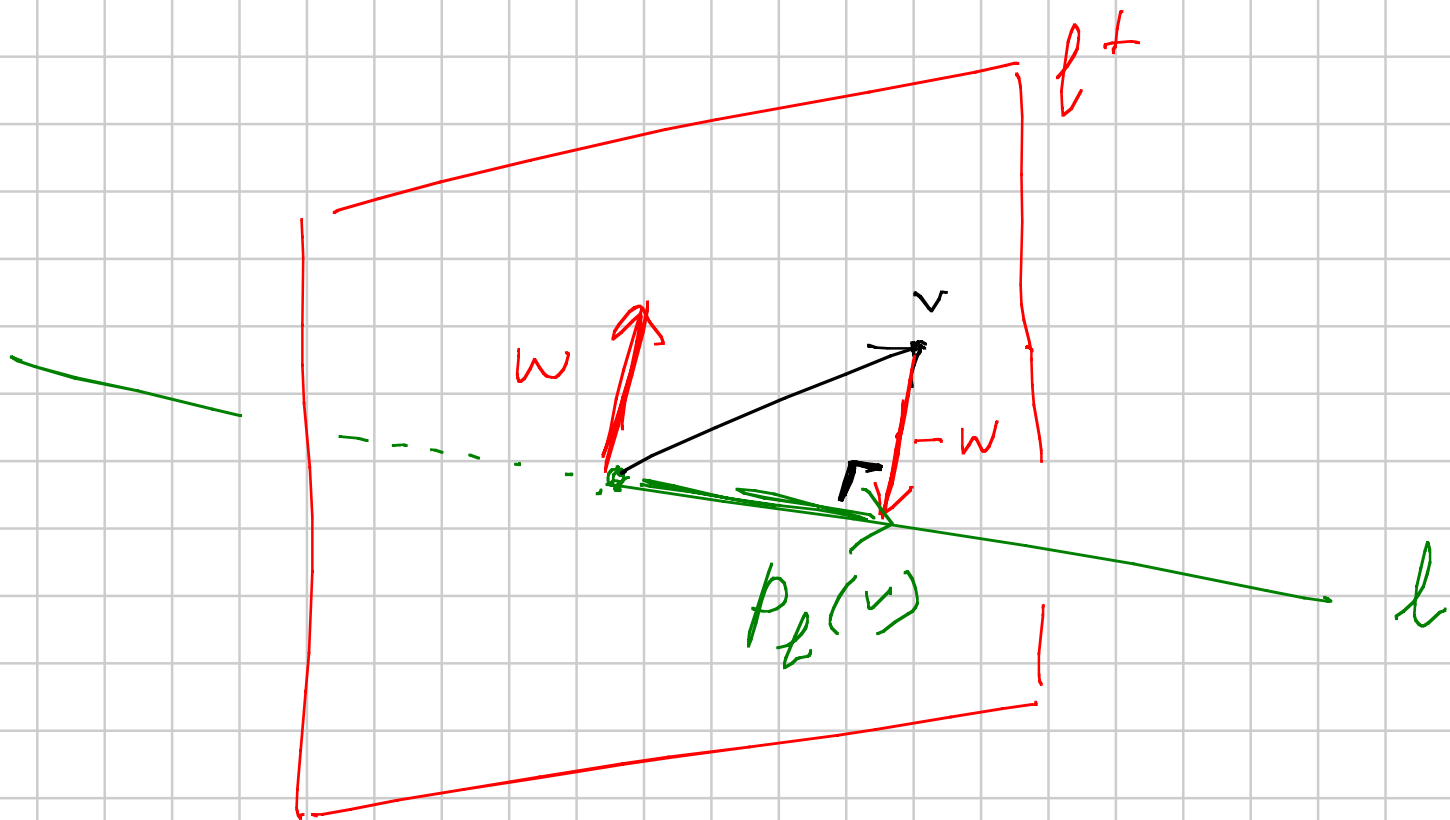
$$\{v, w\}^\perp = (\text{Span}(v, w))^\perp$$



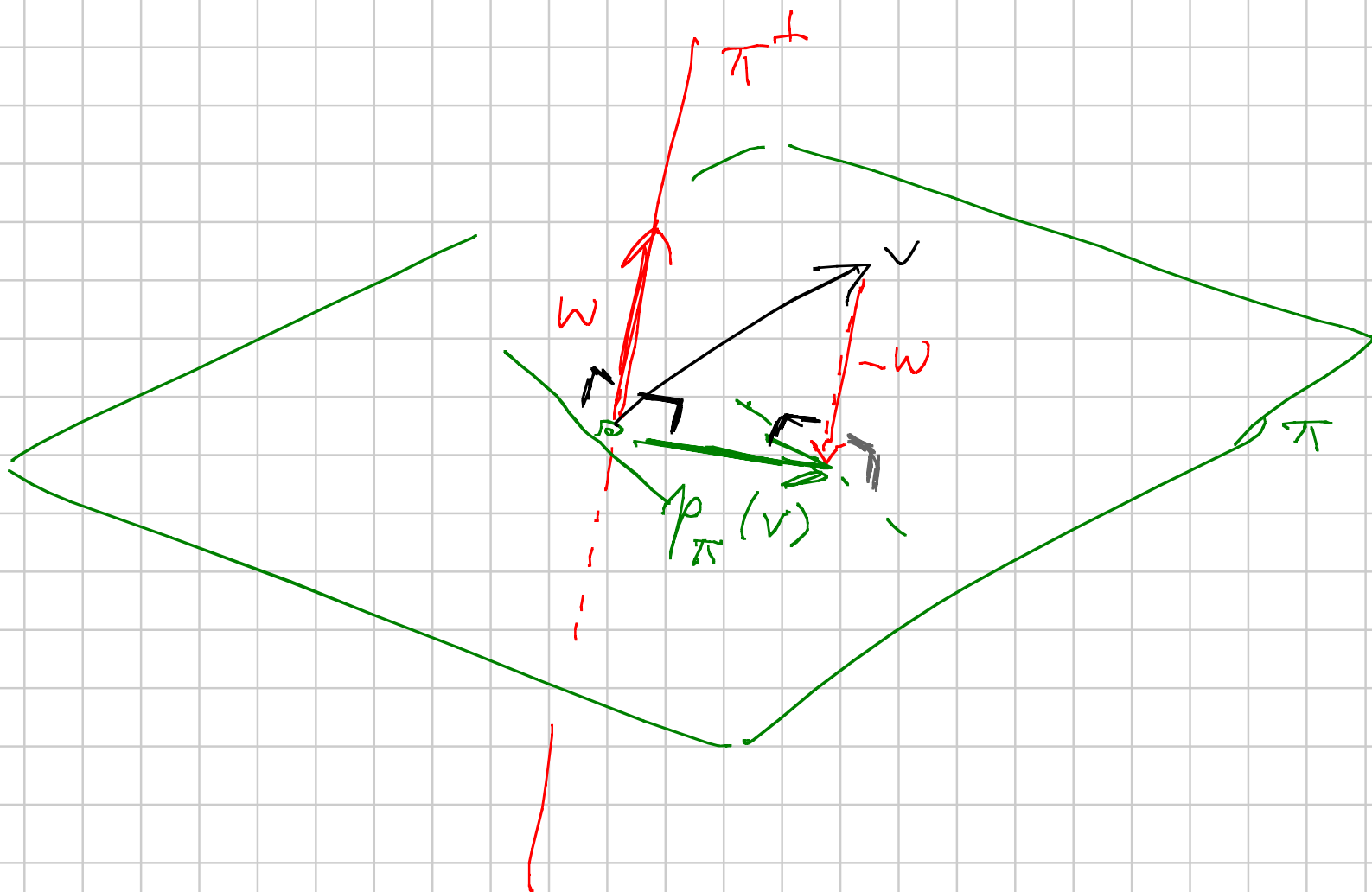
Prop: se $\dim(V) < +\infty$ e $W \subset V$ è sottosp.
si ha $V = W \oplus W^\perp$

Def: chiamo proiezione ortogonale su W
e indico con P_W la proiezione su W
associata allo $V = W \oplus W^\perp$

Es:



101



Ü55: in dir infinite τ folso die $V = W \oplus W^\perp$.

Dim: $W \cap W^\perp = \{0\}$; se $w \in W \cap W^\perp$
 then $\|w\|^2 = \underbrace{\langle w | w \rangle}_W = 0 \Rightarrow w=0, \checkmark$

$V = W + W^\perp$; prendo $w_1, \dots, w_k$ base ortog. di W
e la completo a base ortogonale $w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_m$
di V ; poiché $v_j \perp w_i \quad i=1, \dots, k$

$$\Rightarrow v_j \in W^\perp \quad j = k+1, \dots, n$$

$$\Rightarrow W^\perp \supset \text{Span}(v_{k+1}, \dots, v_n)$$

dimando che

$$V = \underbrace{\text{Span}(w_1, \dots, w_k)}_W + \text{Span}(v_{k+1}, \dots, v_n)$$

(anzi $W^\perp = \text{Span}(v_{k+1}, \dots, v_n)$) . $\square$

Oss: se $\dim V < +\infty$ allora $(W^\perp)^\perp = W$.

Def: $\langle w | y \rangle = 0 \quad \forall y \in W^\perp \quad \forall w \in W$

$$\Rightarrow w \in (W^\perp)^\perp \quad \forall w \in W$$

$$\Rightarrow W \subset (W^\perp)^\perp \quad (\text{auch mit
dim-Formel})$$

Se $\dim(V) = n$ ho

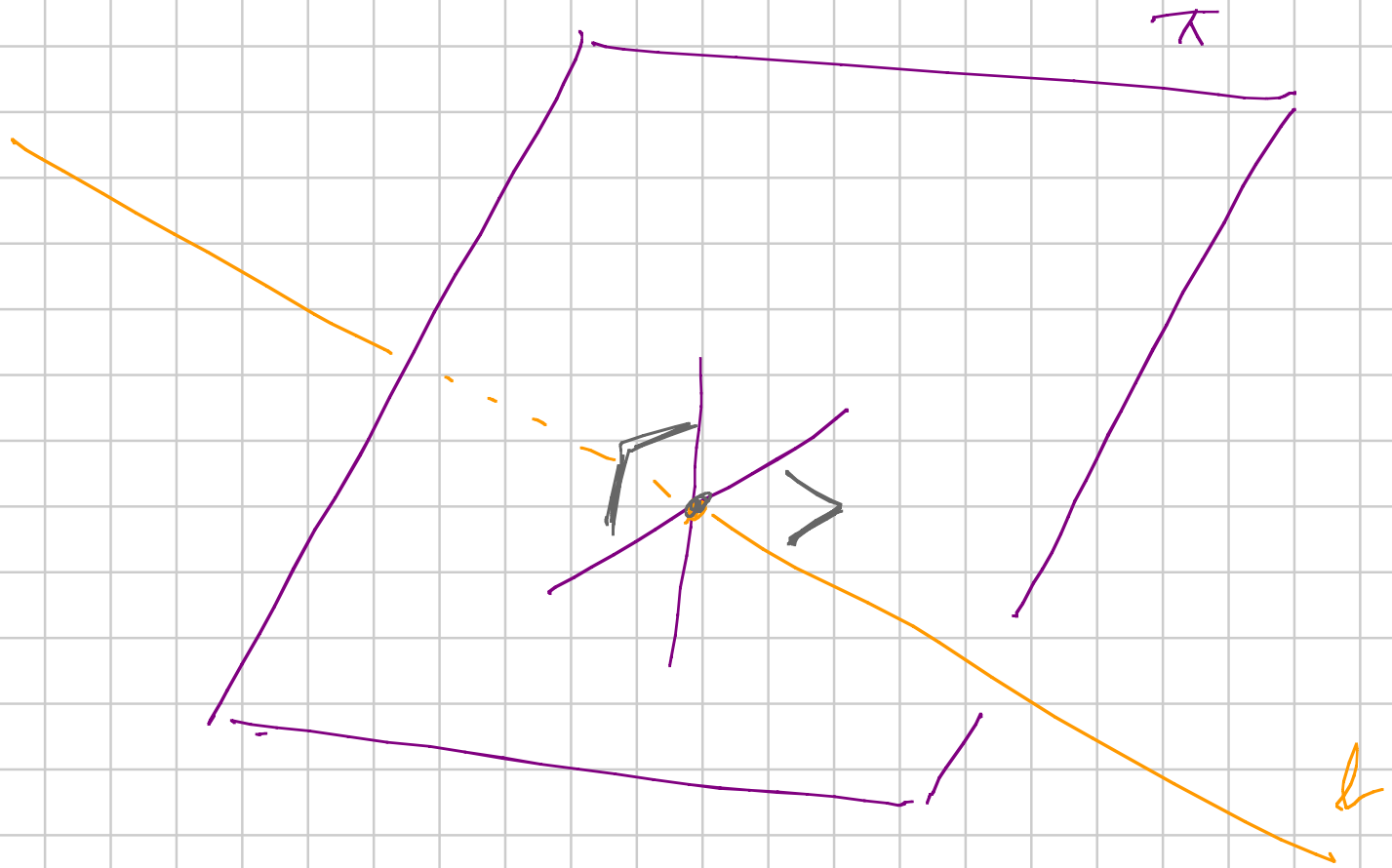
$$\cancel{V} = \underset{k}{W} \oplus \underset{n-k}{W^\perp} = \underset{n-k}{W^\perp} \oplus \underset{n-(n-k)}{(W^\perp)^\perp}$$

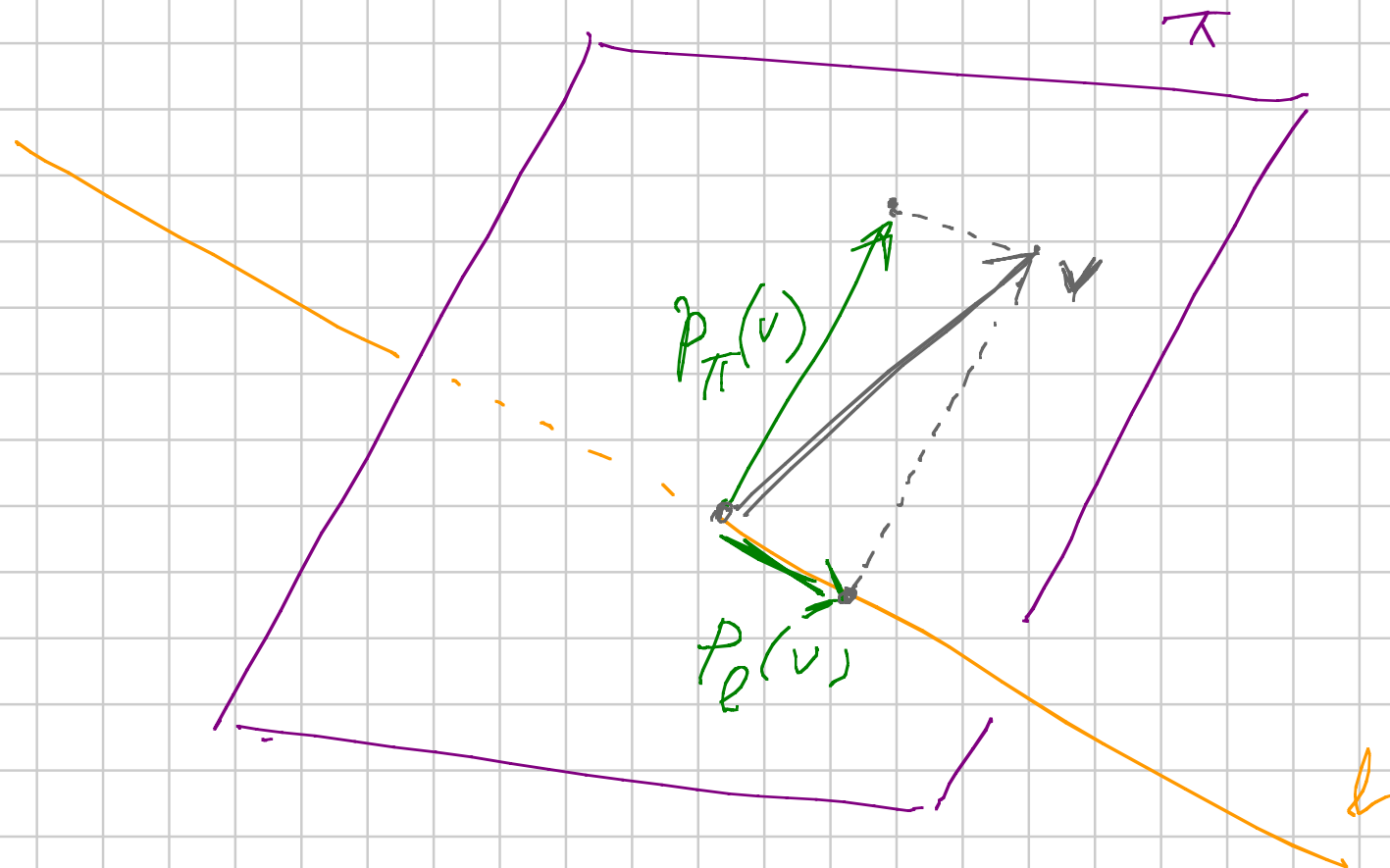
$$\Rightarrow \dim((W^\perp)^\perp) = k \Rightarrow \checkmark$$

Con: la proiezione su $W^\perp$ associata a $V = W \oplus W^\perp$
è la proiezz. ortog. su $W^\perp$.

(Suggerimento: la decom. $V = W \oplus W^\perp$ è
lo stesso che $V = (W^\perp)^\perp \oplus W^\perp$.)

Es:





Prop: se $w_1, \dots, w_k$ è base ortogonale di W

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

Dim: completo $w_1, \dots, w_k$ e base $w_1, \dots, w_n$
ortogonale per V . Ho:

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\cap \\ W}}$$

$$+ \sum_{i=k+1}^n \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\cap \\ W^\perp}}$$



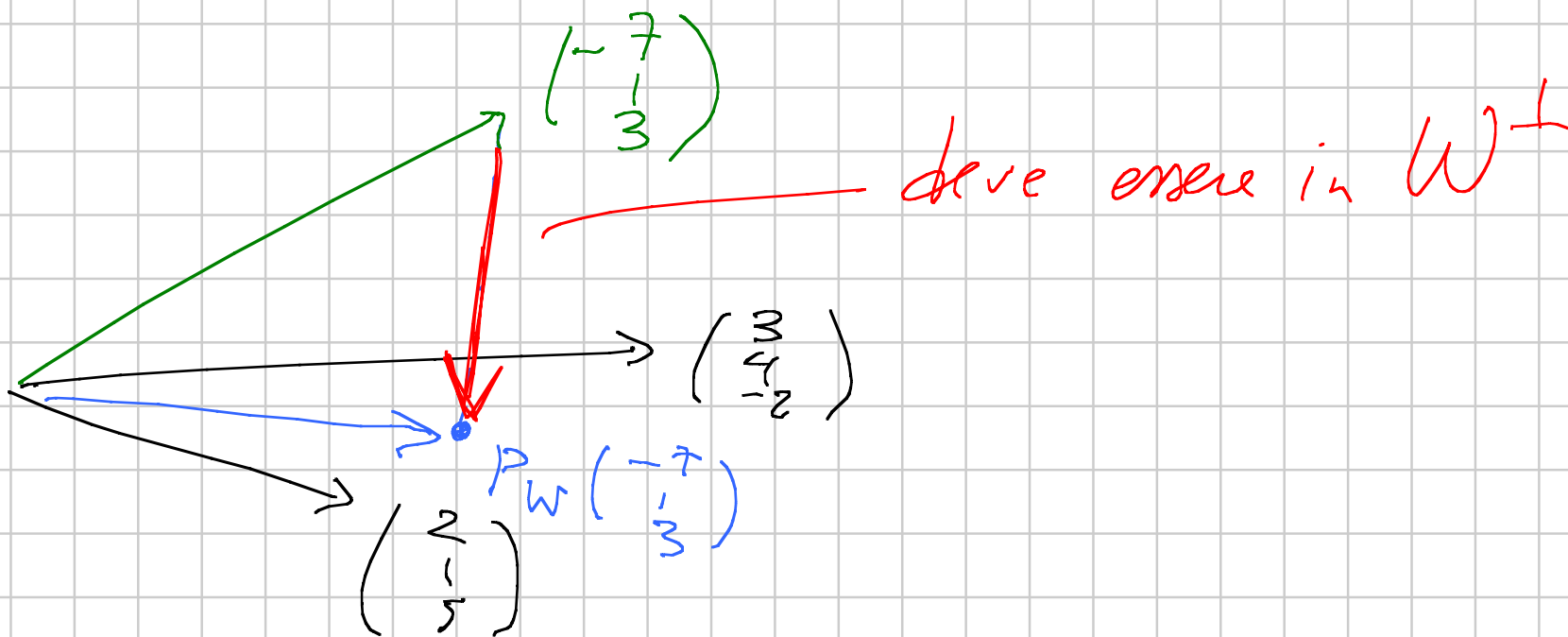
$$\underline{Es}: \text{ in } \mathbb{R}^3 \quad W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$v = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{aligned} P_W(v) &= \frac{-14 + 1 + 15}{4 + 1 + 25} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{-21 + 4 - 6}{9 + 16 + 4} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{23}{29} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

($\alpha, \beta, \gamma \dots$ calcoli)

Va verificare che $\vec{e}$ giunto:



due per zero aree $\begin{pmatrix} -7-\alpha \\ 1-\beta \\ 3-\gamma \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Prop (disuguaglianza di Bessel):

se $w_1, \dots, w_k$ sono vett. ortog. non nulli.

$$\sum_{i=1}^k \frac{|\langle v | w_i \rangle|^2}{\|w_i\|^2} \leq \|v\|^2.$$

Qm: $v = P_W(v) + P_{W^\perp}(v)$

$$\Rightarrow \|v\|^2 = \|P_W(v)\|^2 + 2 \underbrace{\langle \underbrace{P_W(v)}_W \mid \underbrace{P_{W^\perp}(v)}_{W^\perp} \rangle}_{=0} + \|P_{W^\perp}(v)\|^2$$

$$\geq \|P_W(v)\|^2$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^k \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i \right\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^k \left| \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \right|^2 \cdot \|w_i\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{|\langle v | w_i \rangle|^2}{\|w_i\|^2}$$

□