

Geometrie

Teo: $A A^* = A^* A$ (normale) $\Leftrightarrow \exists M \text{ t.c. } M^* M = I_n$
con $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Casi particolari:

Prop: 1) $A^* = A$ (Hermitiano) $\Leftrightarrow A$ normale e
 $\lambda_j \in \mathbb{R}$

2) $A^* = -A$ (antihermitian) $\Leftrightarrow A$ normale e
 $\lambda_j \in i \cdot \mathbb{R}$

3) $A^* \cdot A = I_n$ (unitaire) $\Leftrightarrow A$ normale e
 $|\lambda_j| = 1$.

Dim: tutte e tre " $\Rightarrow$ normale " false.

Altre " $\Rightarrow$ " :

1) False: $A^* = A \Rightarrow$ sc $Av = \lambda v \quad v \neq 0$

$$\langle Av/v \rangle = \langle \lambda v/v \rangle = \lambda \cdot \|v\|^2$$

$$\langle v/A^*v \rangle = \langle v/Av \rangle = \langle v/\lambda v \rangle = \bar{\lambda} \cdot \|v\|^2$$

2) analog: $A^* = -A$ i.e. $Av = \lambda v$ $v \neq 0$
 Conversely $\bar{\lambda} = -\lambda \Rightarrow \lambda \in i \cdot \mathbb{R}$

3) $A^* \cdot A = I_n$ $Av = \lambda v$

$$\|Av\|^2 = \|\lambda v\|^2 = |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2$$

$$\|v\|^2$$

$$\Rightarrow |z|=1$$

Le "facili":

1) Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normale e $\lambda_j \in \mathbb{R}$

$$\exists U \text{ t.c. } U^* U = I_n \text{ t.c. } U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

$$\Rightarrow A^* = U^{**} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} U^* = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^* \checkmark$$

2,3) anche -



Con: se $A^* = A$ sono fatti equivalenti:

- $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.

- A ha autovel. positivi

- $d_1, \dots, d_n > 0$ (come in $\mathbb{R}$)

Conseguenze reali del Teo spettrale complesso:

Prop: (1) Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è antisimmetrica
(${}^t A = -A$) allora $\exists M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ortogonale
(${}^t M \cdot M = I_n$) t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M$ è diagonale

a blocchi 1×1 det. da $\boxed{0}$.
 2×2 det. da $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ cioè

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{smallmatrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{smallmatrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & -\alpha_3 \\ \alpha_3 & 0 \end{smallmatrix}} & \\ & & & \boxed{0} \\ & & & & \boxed{0} \\ & & & & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

(e viceversa)

(2) Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è ortogonale (${}^t A \cdot A = I_n$)
 allora esiste M ortog. (${}^t M \cdot M = I_n$) t.c.
 $M^{-1} \cdot A \cdot M$ è diagonale o blocchi 1×1 di ± 1

o 2×2 dati da $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ cioè

$$M^T \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \boxed{n_{\varphi_1}} & & & \\ & \boxed{n_{\varphi_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\pm 1} & & \\ & & & & \boxed{\pm 1} & \dots \end{pmatrix}$$

Conseguenza per $n=3$:

• $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ antisym. • $A = 0$ •

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eigenval $0, \pm i\alpha$

• $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale

$$\Rightarrow M^{-1} \cdot A \cdot M = e^{-i}$$

$$I_n (A = I_n), \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

rifl. risp. a
piano

rifl. risp. a
retta (rotaz.
d'angolo π)

riflessione
centrale

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotazione intorno
a z asse

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rotazione intorno a
asse z +
riflessione risp. al
piano xy .

"Dim" : 1) A autismo reale $\Rightarrow A$ autohermitiana
 $\Rightarrow$ autoval in $i\mathbb{R}$.

$\lambda = 0$ autoval $\Rightarrow$ autovett. reale

$\leadsto$ blocco 1×1 $\lambda_0 = 0$

λ autoval $\neq 0$ ha anche $\bar{\lambda}$

($p(t) \in \mathbb{R}[t]$ e $p(\lambda) = 0$ allora $p(\bar{\lambda}) = 0$)

$\Rightarrow \lambda, \bar{\lambda}$ sono $\pm i\alpha$.

Sui complessi ho autovettore $x+iy$
per $i\alpha$ e

$$(\lambda) \quad A \cdot (x+iy) = i\alpha (x+iy)$$

$$A \cdot (x-iy) = -i\alpha (x-iy)$$

dunque $x+iy, x-iy$ sono autovett. rispetto

ad automodal deriv. $\Rightarrow$ outp. for $\text{low}^{(*)}$

$\text{Su } \mathbb{C} \quad (\text{se } n=2) \quad [A]_{\substack{x+iy, x-iy \\ x+iy, x-iy}}^{x+iy, x-iy} = \begin{pmatrix} ix & 0 \\ 0 & -ix \end{pmatrix}$

$(*) \quad \underbrace{A \cdot x}_{\text{reale}} + i \cdot \underbrace{A \cdot y}_{\text{reale}} = i \underbrace{x x}_{\text{reale}} - \underbrace{x y}_{\text{reale}}$

$\Rightarrow A \cdot x = -xy$

$A \cdot y = x x$

$\Rightarrow [A]_{x,y}^{x,y} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$

(**)

$$\langle x+iy \mid x-iy \rangle_{\mathbb{C}^2} = 0$$

$${}^t \overline{(x-iy)} \cdot (x+iy) = 0$$

$$({}^t x + i {}^t y)(x + iy) = 0$$

$$\|x\|^2 + 2i \langle x \mid y \rangle_{\mathbb{R}^2} - \|y\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \langle x \mid y \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0, \quad \|x\| = \|y\|$$

dunque se li normalizzo ho una base
ortonormale di $\mathbb{R}^2$ rispetto a cui

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

(In generale faccio punto su ogni piano
punto doppi autovetori rispetto ai vari $\pm i\alpha$).

2) A ortogonale $\Rightarrow A$ unitaria
 $\Rightarrow \lambda$ autovel he $|\lambda| = 1$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda = \pm 1$ ho autovett. reale
 $\Rightarrow$ blocchi 1×1 def. de ± 1 .

Se $\lambda = e^{iu} = \cos u + i \sin u \notin \mathbb{R}$

ho autovet. $x - iy$ per $e^{i\varphi}$
 $x + iy$ per $e^{-i\varphi}$

Come sopra: autov. in $\mathbb{C}^n \Rightarrow x, y$ stesse
norma e ortog. in $\mathbb{R}^n$
(posso normalizzarli)

$$A \cdot (x - iy) = (\cos \varphi + i \sin \varphi) (x - iy)$$

$$\underbrace{A \cdot x}_{\text{real}} + i \underbrace{(-Ay)}_{\text{real}} = \underbrace{(\cos u \cdot x + \sin u \cdot y)}_{\text{real}}$$

$$+ i \cdot (\sin u \cdot x - \cos u \cdot y)$$

$$\Rightarrow [A]_{x,y}^{x,y} = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \quad \square$$

Visto:

Def: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ortogonale se ${}^t A \cdot A = I_n$

Fatto: A ortop è isometria, cioè

$$d(Ax, Ay) = d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Oss: anche le traslazioni sono isometrie:

$$\tau_v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\tau_v(x) = x + v$$

infatti

$$d(\tau_v(x), \tau_v(y)) = \|(x+v) - (y+v)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Daunque ogni transf. del tipo

$$x \mapsto Ax + v \quad (\tau_v \circ A)$$

con A ortogonale è una isometria.

Teo : tutte le isometrie di $\mathbb{R}^n$
sono del tipo $x \mapsto Ax + v$
con A ortogonale.

Dim ($n=2$): sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometria.

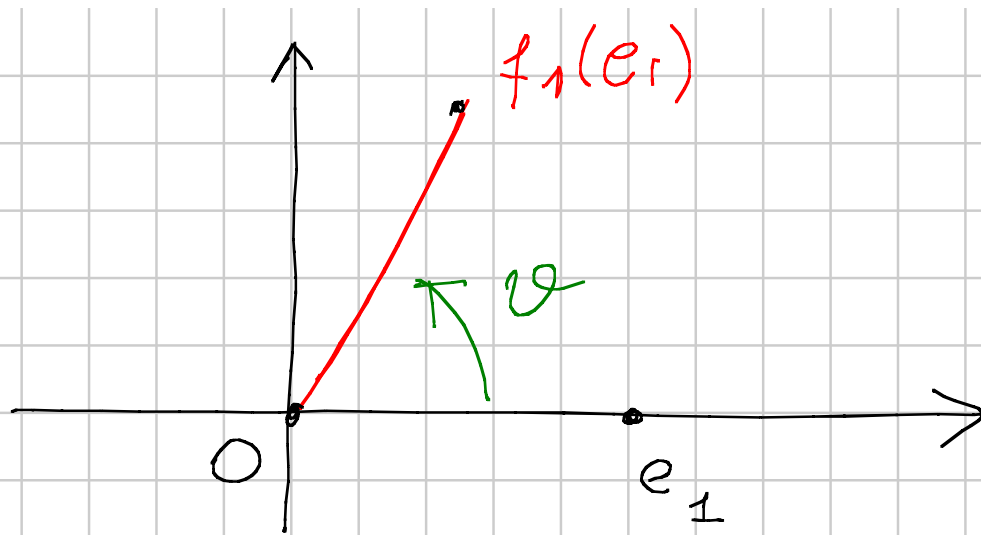
Sia $v = f(0)$ e considero $f_1 = \tau_{-v} \circ f$

Oss (perale): la composizione di due isometrie
è sempre una isometria -

Anche f_1 è isometria e $f_1(0) = 0$.

(Se per caso $v=0$ ho $f_1=1$).

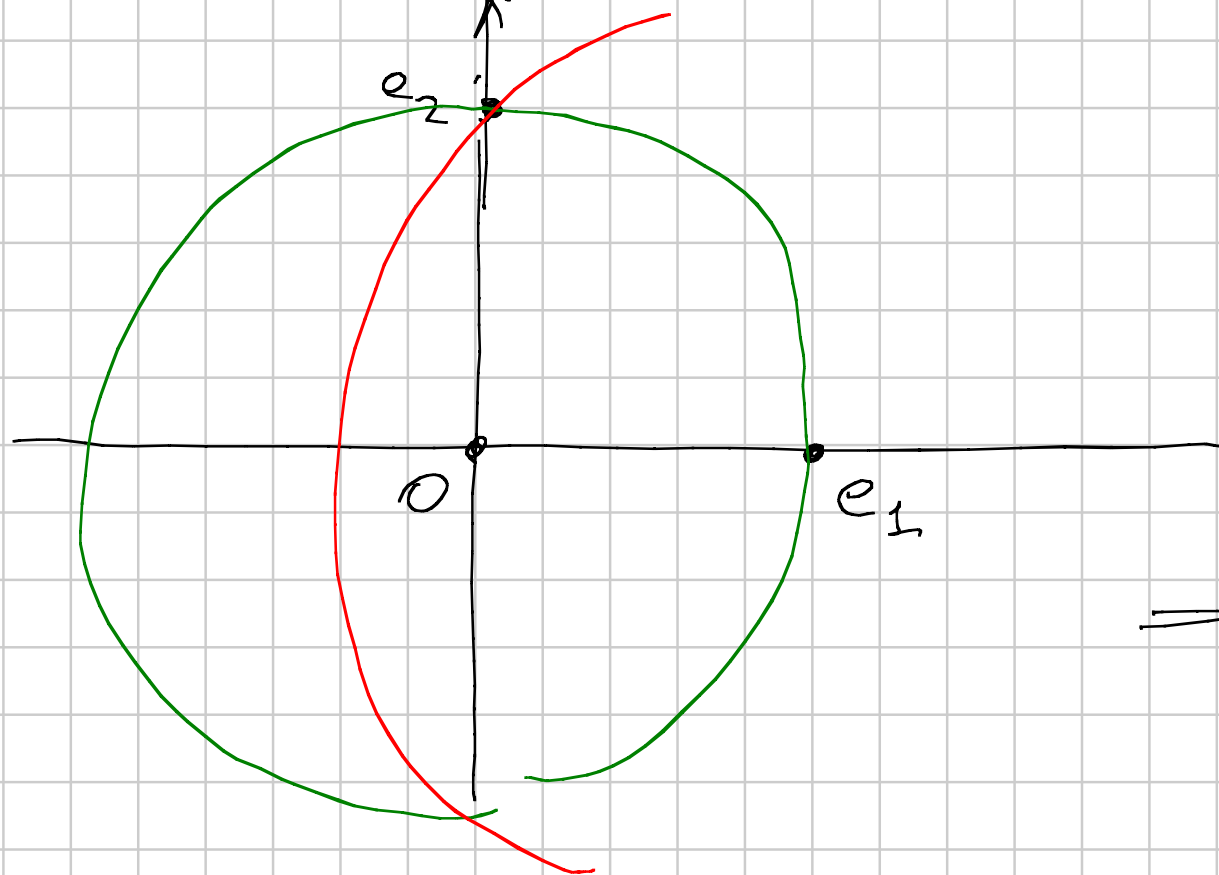
Considero $f_1(e_1)$: deve avere distanza
1 da 0
 $\Rightarrow$ è su S^1



Considero $f_2 = \pi_{- \varphi} \circ f_1$: è isometria

e $f_2(0) = 0$, $f_2(e_1) = e_1$:

Consider $f_2(e_2)$:



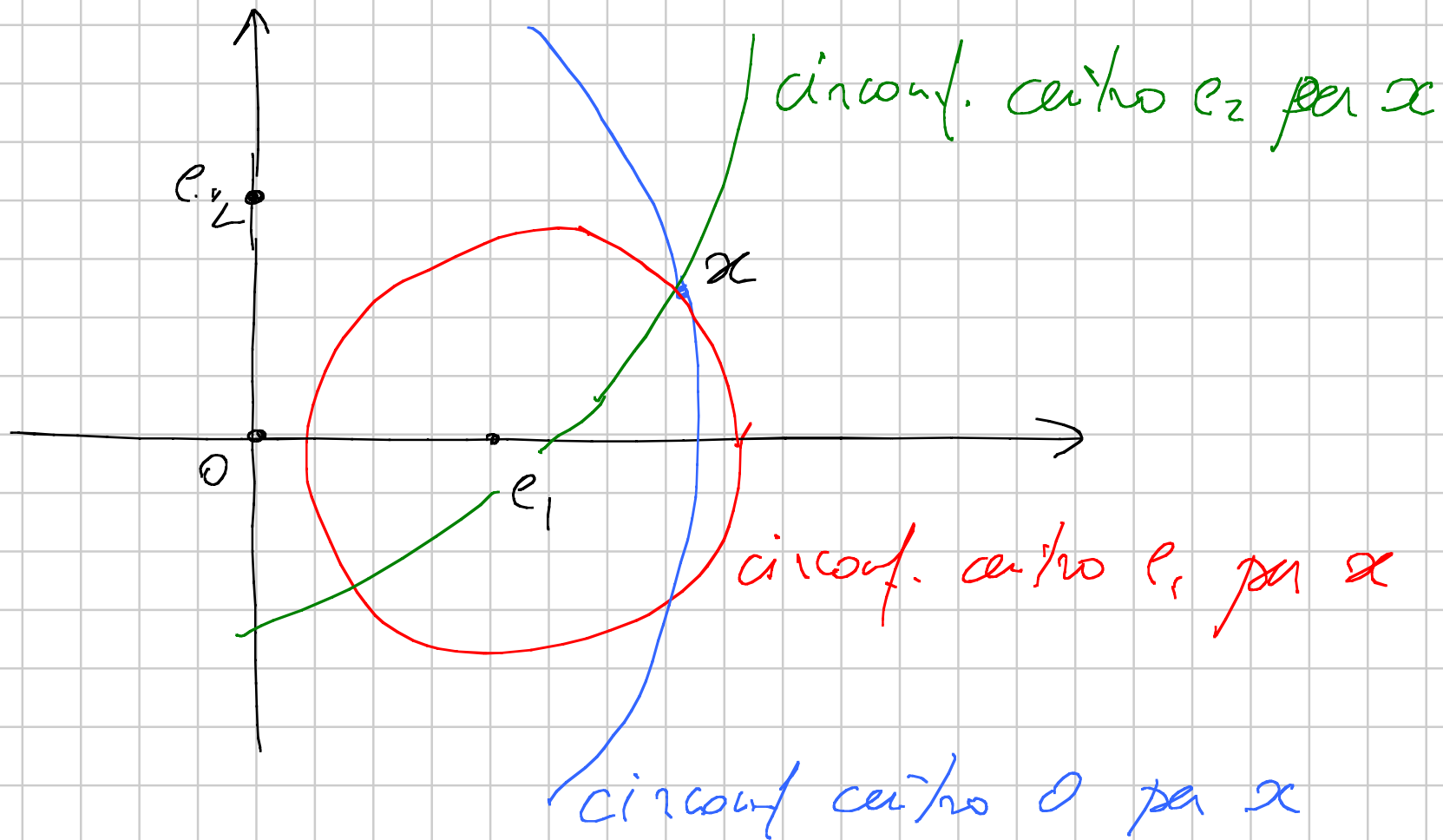
$$\Rightarrow f_2(e_2) = \pm e_2$$

Se $f_2(e_2) = e_2$ oppure $f_3 = f_2$;

se $f_2(e_2) = -e_2$ oppure $f_3 = \sigma \circ f_2$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ riflessione rispetto
all'asse delle ascisse.

Ora ho $f_3(0) = 0$, $f_3(e_1) = e_1$, $f_3(e_2) = e_2$.
ed è isometria



$f_3(x)$ deve stare su tutto e 3 $\Rightarrow f_3(x) = x$

$\Rightarrow f_3 = \text{id}$. Due casi:

$$\bullet) f_3 = f_2 = \pi_{-v} \circ f_1 = \pi_{-v} \circ \tau_{-v} \circ f = \text{id}$$

$$\Rightarrow \tau_{-v} \circ f = \pi_{-v}$$

$$\Rightarrow f = \tau_v \circ \pi_v$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \cdot x + v$$

OK

(τ composition d. new translation.
e new rotation) -

$$\bullet) f_3 = \sigma \circ f_2 = \sigma \circ \pi_v \circ f_1 = \sigma \circ \pi_v \circ \tau_v \circ f = id$$

$$\Rightarrow \pi_v \circ \tau_v \circ f = \sigma$$

$$\Rightarrow T_v \circ f = \pi_v \circ \sigma$$

$$\Rightarrow f = T_v \circ \pi_v \circ \sigma$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \cdot x + v$$

$$\begin{pmatrix} \cos u & +\sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix}$$

matrix 2×2 orthogonal

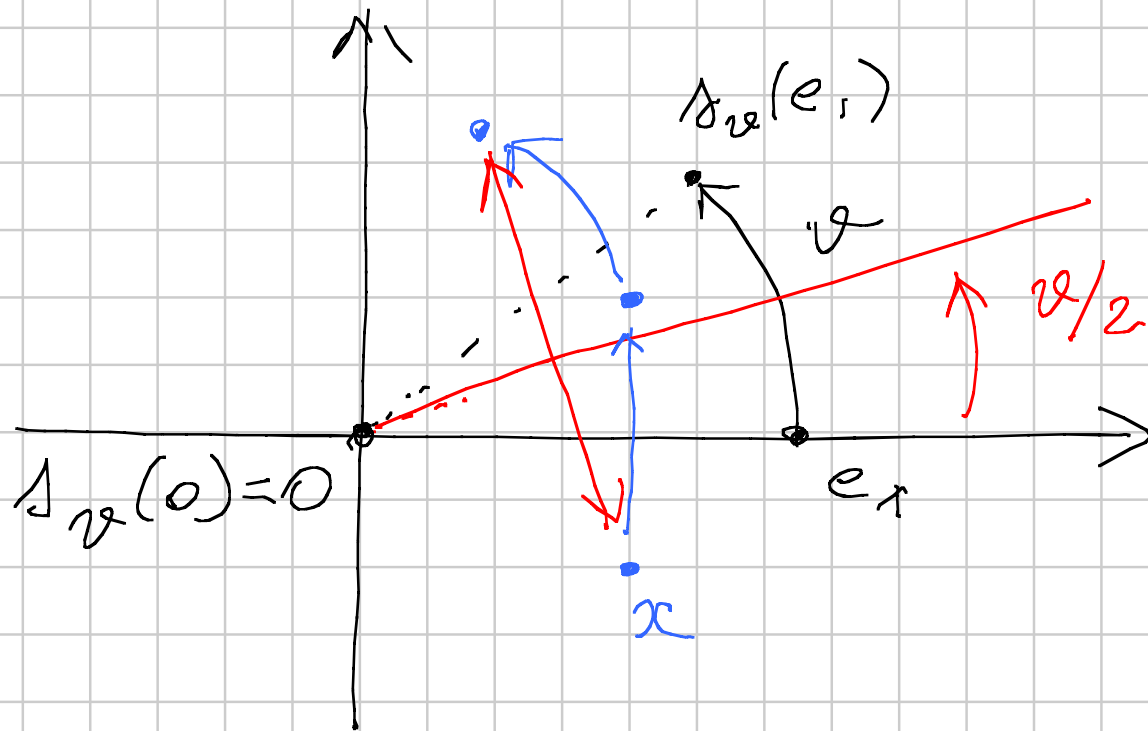
OK

Dalle dimo segue che le
isometrie di $\mathbb{R}^2$ sono:



1) rotazione composta con Traslazione

2) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$ composta con Traslazione
?



$$A_\alpha = R_\alpha \circ \sigma$$

Fatto: A_α è
la riflessione
rispetto alla
retta L
inclinazione $\alpha/2$

Esercizio: verificare il Fatto geometricamente.

Lo verifico analiticamente:

$$C = \cos \vartheta/2$$

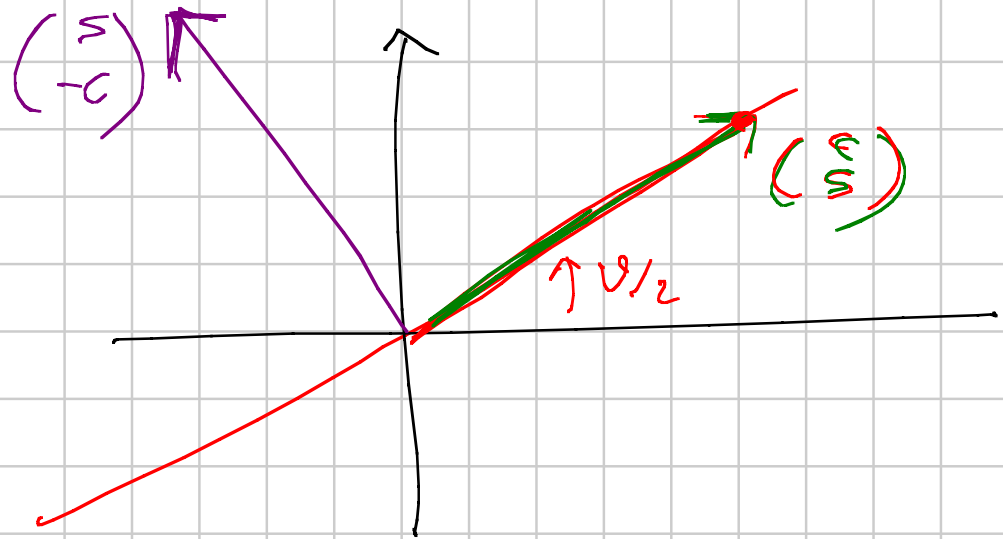
$$S = \sin \vartheta/2$$

Devo vedere che

$$A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix}$$

mappe

$$\begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -S \\ C \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -S \\ C \end{pmatrix}.$$



$$A = \begin{pmatrix} c^2 - s^2 & 2sc \\ 2sc & s^2 - c^2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 - s^2 & 2sc \\ 2sc & s^2 - c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^3 - cs^2 + 2cs^2 \\ 2sc^2 + s^3 - sc^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} s \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^3 - cs^2 - 2cs^2 \\ -2sc^2 - s^3 + sc^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad 0 \quad \underline{\hspace{10em}}$$

Coniche (modelli metrici)

Luoghi nel piano $\mathbb{R}^2$ definiti da
condizioni metriche:

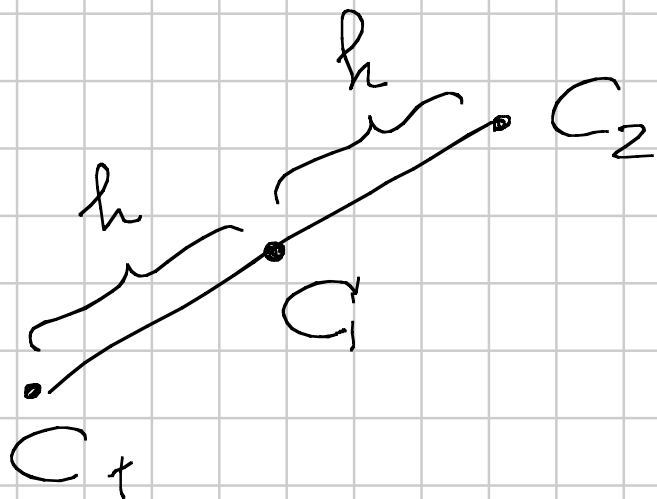
Circonfere: $\{P: d(P, C) = r\} \quad \begin{matrix} C \in \mathbb{R}^2 \\ r > 0. \end{matrix}$

Se scelgo un sistema di rif. con origine in C

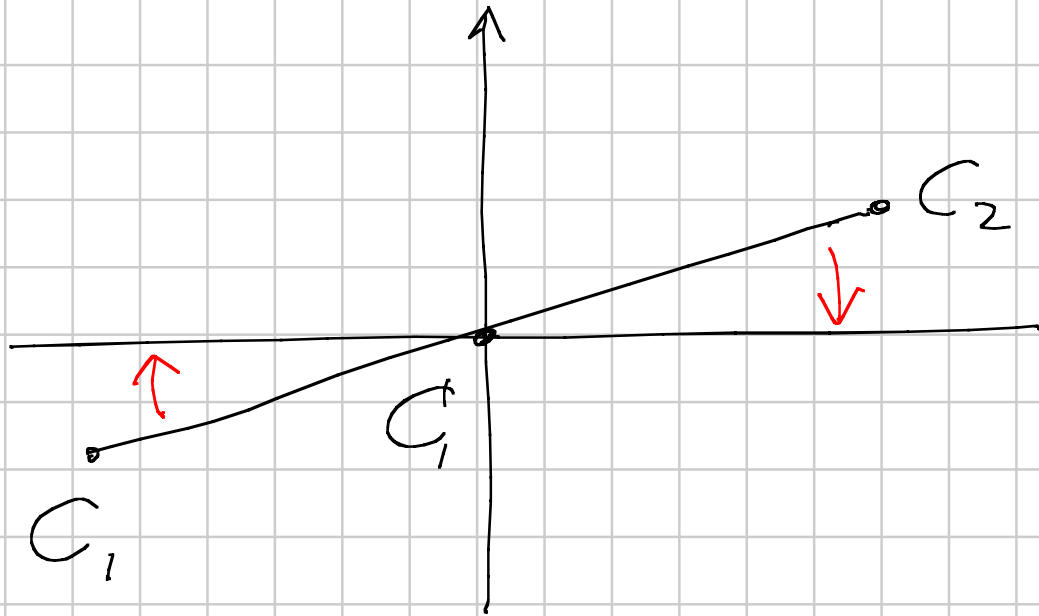
ho equazione

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ellisse : $\{P : d(P, C_1) + d(P, C_2) = 2k\}$
 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2, k > 0.$



Transito me traslazione $\Rightarrow$ $C_1 = 0$;

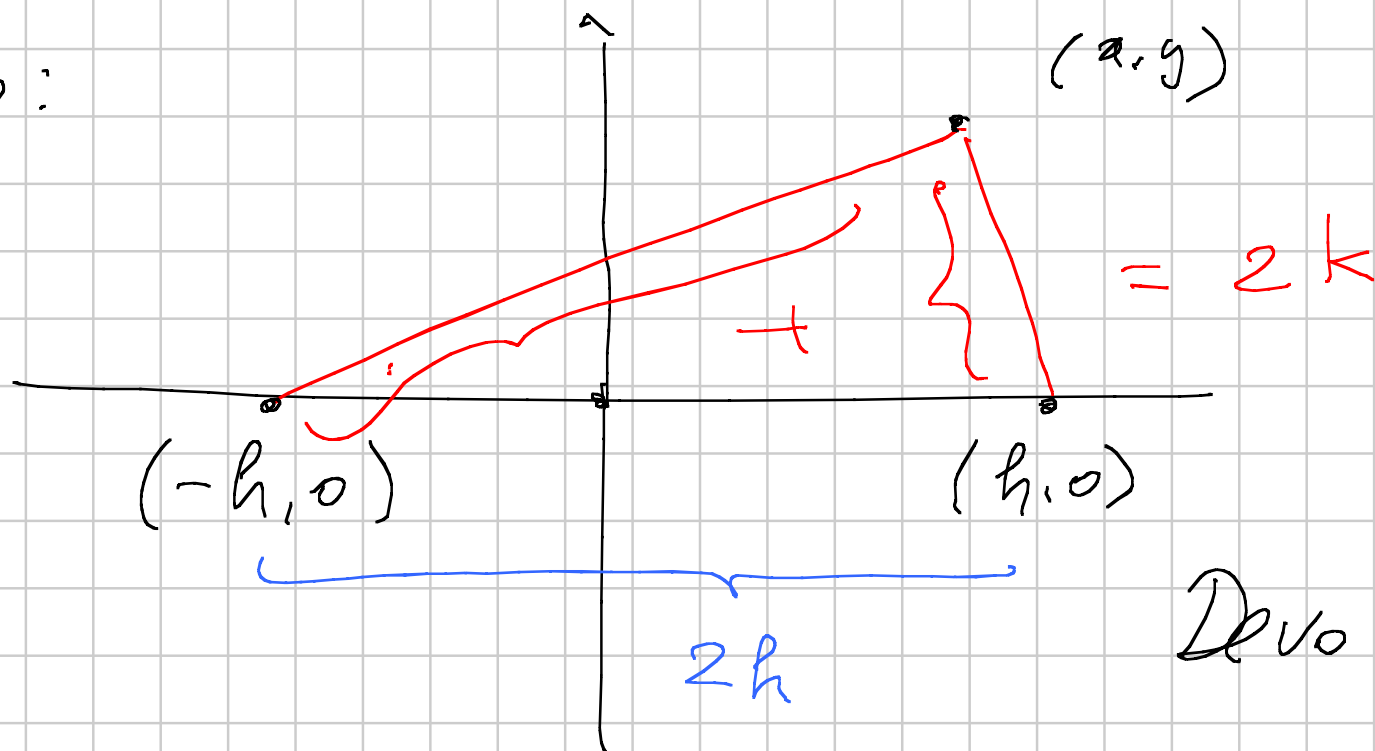


Transito rotazionale $\Rightarrow$ ω $\Rightarrow$ ω

$$C_1 = (-h, 0)$$

$$C_2 = (h, 0)$$

Osservo:



Devo avere $h < k$

(se $h > k$ viene $\emptyset$,
se $h = k$ viene il
segmento che unisce C_1 e C_2).

Equazione:

$$\sqrt{(x+h)^2 + y^2} + \sqrt{(x-h)^2 + y^2} = 2k$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+h)^2 + y^2} = 2k - \sqrt{(x-h)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + 2\cancel{xh} + \cancel{h^2} + \cancel{y^2} = 4k^2 - 4k\sqrt{(x-h)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2\cancel{xh} + \cancel{h^2} + \cancel{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{4k}\sqrt{(x-h)^2 + y^2} = \cancel{4k^2} - \cancel{4xh}$$

$$\Rightarrow \cancel{k^2 x^2 - 2k^2 h x + k^2 h^2} + \cancel{k^2 y^2} = \cancel{k^4 - 2k^2 h x + h^2 x^2}$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - h^2)x^2 + k^2 y^2 = k^2(k^2 - h^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2 - h^2} = 1 \quad k^2 - h^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a > b > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = k \\ b = \sqrt{k^2 - h^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} k = a \\ h = \sqrt{a^2 - b^2} \end{array}$$

Fatto: ogni (x, y) che soddisfa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
 soddisfa anche l'equazione iniziale.

$\Rightarrow$ eq. canonica ellisse $\tilde{c}$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
 $a > b > 0$.

Ipotesi : $\{ P : |d(P, C_1) - d(P, C_2)| = 2k \}$
 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$ distinti, $k > 0$

Via trasl. + rotaz. suppongo $C_1 = (-h, 0)$
 $C_2 = (h, 0)$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+h)^2 + y^2} - \sqrt{(x-h)^2 + y^2} = \pm 2k$$

Stesi paraggi di prima; mi ricordo a

$$\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{h^2 - k^2} = 1$$

$$h > k$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a > b > 0$$