

Cgeom

5/5/2017

12.1.1

$$X = \mathbb{N}$$

$$(i) \quad n \in \mathbb{R} \quad m \in \mathbb{R} \quad \kappa \quad |n| = |m|$$

- reflexive ✓
- symmetric ✓
- transitive ✓

$$(ii) \quad n \in \mathbb{R} \quad m \in \mathbb{R} \quad |n| \geq |m|$$

- reflexive

$$(|n| \geq |n|)$$

• simmetrica NO ($|l| \geq |o|$ ma non $|o| \geq |l|$)

• antisimmetrica ✓ ($|u| \geq |m|$ e $|m| \geq |u|$

in $\mathbb{Z}$ non
sarebbe vero che è
antisimmetrica, es: 5, -5

$\Rightarrow u = m$ perché
($u, m \in \mathbb{N}$, quindi ≥ 0)

• transitiva ✓

$|u| \geq |m|, |m| \geq |p| \Rightarrow$
 $|u| \geq |p|$

(iii) $u R m$ e $|u| < |m|$

• riflessiva : NO

($|u| < |u|$)

• simmetrica : NO

(come prima)

- antisimmetrica, $\neq 0$ (in realtà in $\mathbb{N}$
non può mai succedere
 $|n| < |m|$ e $|m| < |n|$)
- transitività ✓ (come prima)

(12.1.2) (i) $X =$ le popolazioni mondiali

$a R b$ se a è discendente di b

• riflessiva ✓ ("ognuno è discendente di se stesso")

• antisimmetrica ✓ (io sono l'unica persona
che è mio ascendente e
mio discendente)

• simmetrica No

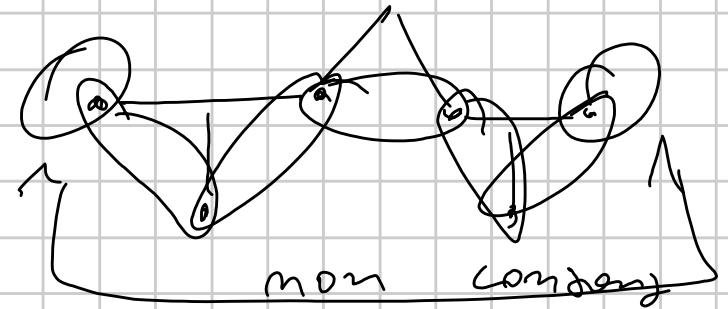
• transitiva ✓

(ii) $a R b$ k a conlanguineo di b

• riflessiva ✓

• simmetrica ✓

• transitivo No



12.2.2 corrisp. biunivoca tra

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

e

$$\mathbb{R}/\sim$$

$x \sim y$ se

$$x - y \in \mathbb{Z}$$

insieme di classi di equiv. in $\mathbb{R}^k - \{(0,0)\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ se } \exists \lambda \neq 0 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

• rappresentanti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$$\mathbb{R} \cong \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

dove di ogn non sono presi uno

multiplo dell'altro.

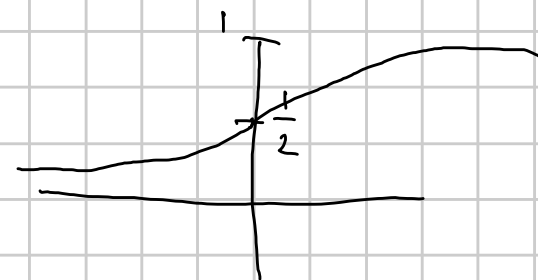
• rappresentanti per $\mathbb{R}/\sim$

$[0, 1)$

Definiamo una mappa $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$

$$x \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

che è biiettiva e dunque



$f: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}/\sim$ definita da

$$\begin{cases} f\left(\left[\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right) = [\psi(x)] \\ f\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right) = [0] \end{cases}$$

è una bijezione.

12.2.1

$\alpha: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ induce mappa

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

α manda lo 0 di $\mathbb{R}^4$ nello 0 di $\mathbb{C}^2$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

$$z = x + iy \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^4 \ni (x_1, y_1, x_2, y_2) \xrightarrow{\alpha} (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) \in \mathbb{C}^2$$

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \sim$$

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ s.t. } v = \lambda w$$

$$= \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \sim$$

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ s.t. } v = \lambda w$$

(che riscrive la stessa
relazione di sopra pensando
i vettori come elementi di
 $\mathbb{C}^2$ invece di $\mathbb{R}^4$)

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\cong}$$

$$v \equiv w \text{ se } \exists \lambda \in \mathbb{C} \\ \text{t.c. } v = \lambda w$$

Ogni classe di equival. di $\cong$ è unione
di classi di equival. di $\sim$

Quindi ogni classe di equivalenza $\approx$
è contenuta in un'unica classe di
equivalenza di $\cong$.

$$(\text{ovvero } v \approx w \Rightarrow v \cong w)$$

Quindi la mappa $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
data da

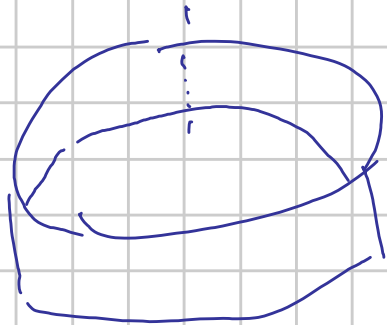
$$[v]_{\approx} \longmapsto [v]_{\cong}$$

è ben definita, ogni elemento di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

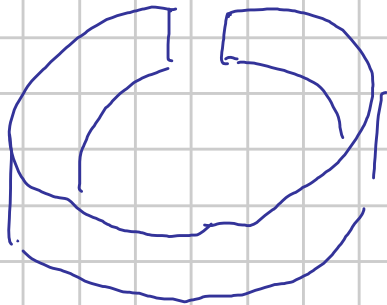
(che è come dire ogni classe di equiv.
 $[v] \simeq$) viene mappata tramite $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$
 nell' unica classe di equiv. $[v] \simeq$ che
 lo contiene.

12.2.4 Descrivere un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3 - \{0\}$
 A c. la restrizione dello rel. di eq. di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
 dove il motto di Noëlius.

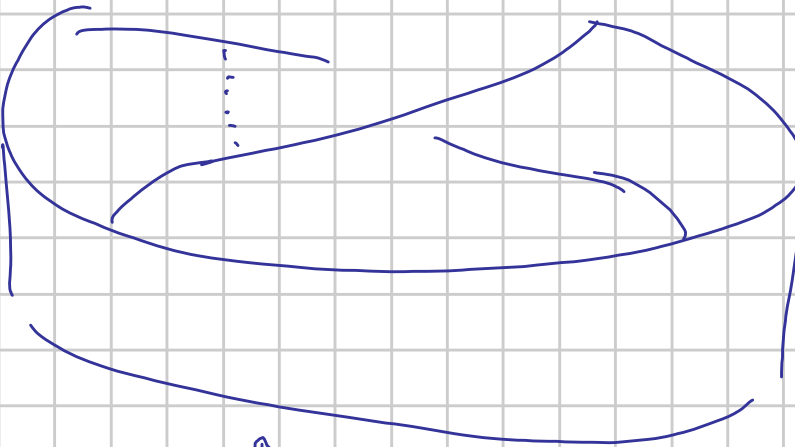
Flöckins



↓



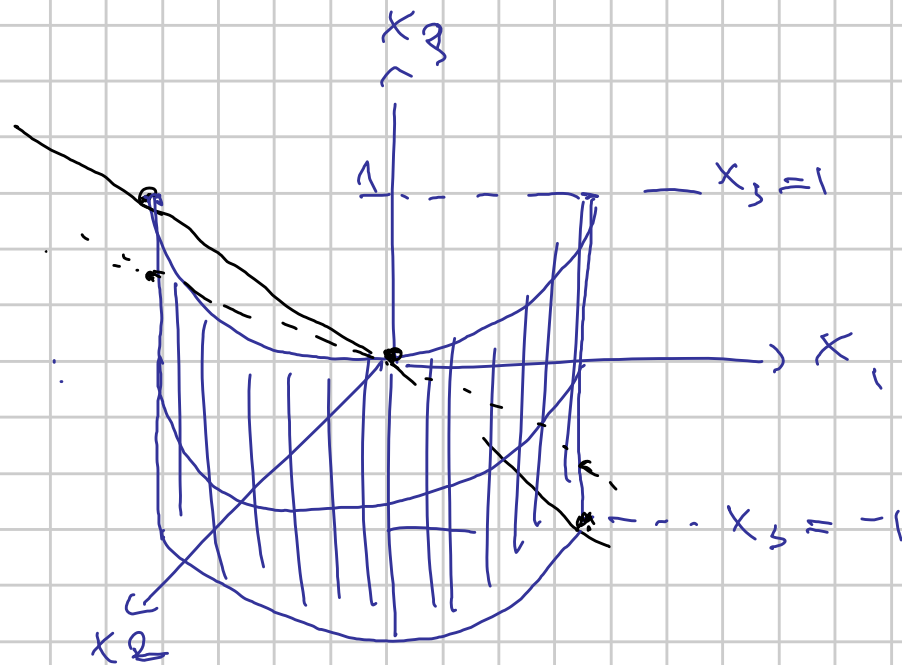
→



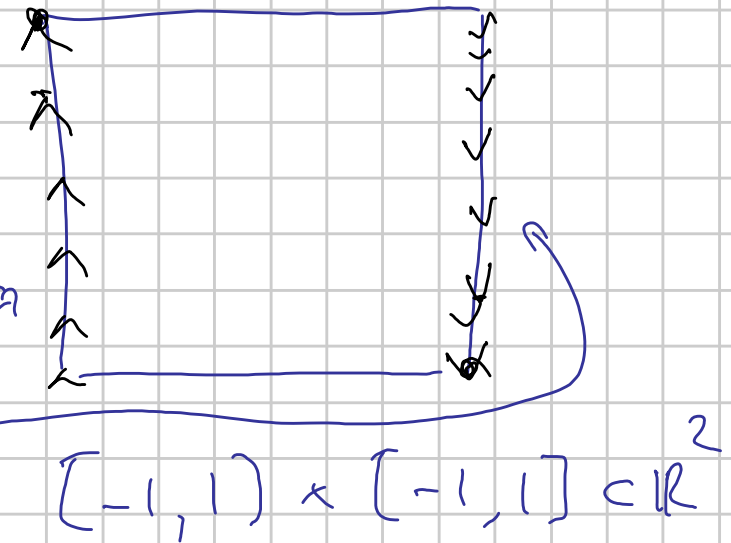
↑



$$Q = \{ x \in \mathbb{R}^3, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_2 \geq 0, \quad |x_3| \leq 1 \}$$

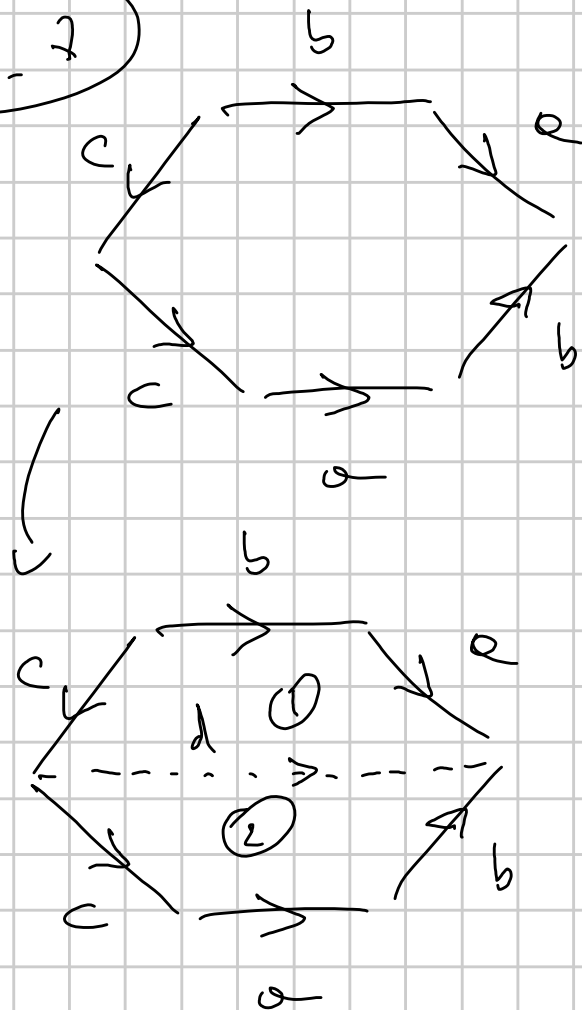


$\cong$



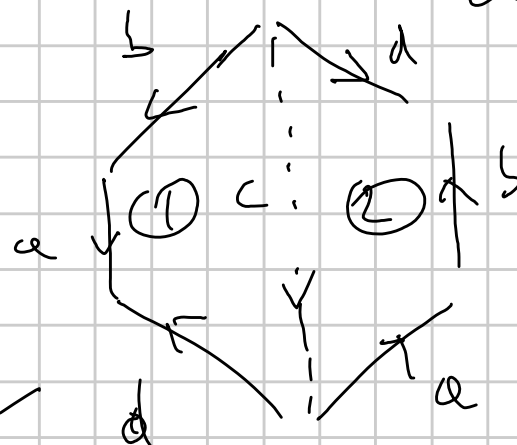
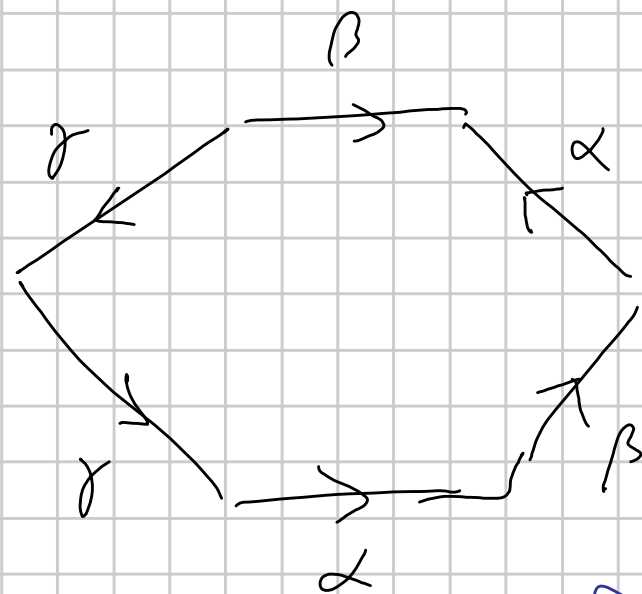
identificati delle rel. di eq.
che da $\mathbb{R}^3$

12.2.2

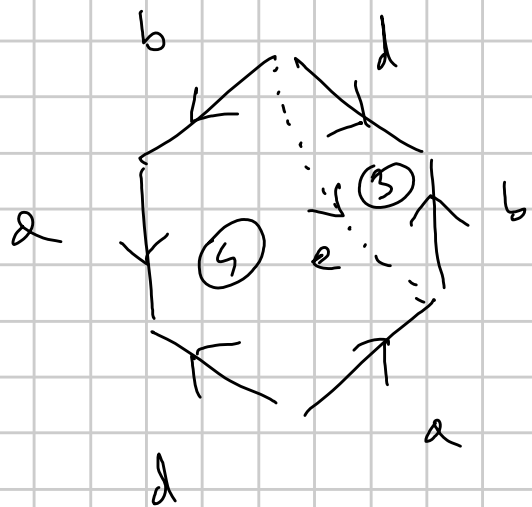


$\xrightarrow{\quad}$
uncoll
lungs c

11



$\xrightarrow{\quad}$
=



im collo
lungo b

