

Geom 5/4/2017

1 variable $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ $x \in (a,b)$

x min loc $\Rightarrow f'(x) = 0$, $f''(x) \geq 0$

$f'(x) = 0$, $f''(x) > 0 \Rightarrow x$ min loc

In n variables:

$$f(x+h) = f(x) + \langle \text{grad}(f)_x, h \rangle + \frac{1}{2} \langle h, H(f)_x h \rangle + o(\|h\|^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f \Rightarrow H(f)_x \text{ è simmetrica}$$

$\Rightarrow$ per il teo. spettrale e mano di un cambio di base isometrico posso scrivere

$$\langle h | h \rangle_{H(f)_x} = \lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono autovalori di $H(f)_x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x+h) &= f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot h_n + \\ &+ \lambda_1 \cdot h_1^2 + \dots + \lambda_n \cdot h_n^2 + o(\|h\|^2) \end{aligned}$$

Se x è min loc. $\Rightarrow \text{grad}(f)_x = 0$, $H(f)_x$ ha
autovalori ≥ 0

Se $\text{grad}(f)_x = 0$ e $H(f)_x$ ha autovalori > 0
 $\Rightarrow x$ è min loc.

oss per i segni degli autovalori si può usare
il criterio dei segni dei minori principali d_j -

ES 10.1.1 (2) Trova gli autovalori di f/A

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & -\frac{1}{5}(7+i) \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1(A) = 4+i$$

$$\det = 3 + 3i + \frac{1}{5}(15 - 5i) = 3 + 3i + 3 - i = 6 + 2i$$

$$t^2 - (4+i)t + 6+2i$$

$$\Delta = 16 + 8i - 1 - 24 - 8i = -9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4+i \pm 3i}{2} \begin{cases} 2+2i \\ 2-i \end{cases}$$

Autovettori

$$\boxed{Av = \lambda v}$$

$$v_1 \quad (2-i)x + 3y = (2+2i)y$$

$$(2-i)x = (2i-1)y$$

(es. $\mathbb{C}^2$ coord)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2i-1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

$$v_2 \quad (2-i)x + 3y = (2-i)y$$

$$v_2 = \dots$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -3 & t-1 & 0 \\ -2 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)^3 + (t-1)(2-6)$$

$$= (t-1)(t^2 - 2t + 1 - 4) = (t-1)(t^2 - 2t - 3) =$$

$$= (t-1)(t+1)(t-3)$$

$$\lambda_1 = t+1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3$$

3 autoval. distinti $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile

autovettori

$$Av = \lambda v$$

$$w_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = x \\ 3x + y = y \\ 2x + z = z \end{array} \right.$$

$$2y = z$$

$$x = 0$$

$$x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = -x \\ 3x + y = -y \\ 2x + z = -z \end{array} \right.$$

$$z = 2x + 2y$$

$$3x + 2y = 0$$

$$z + x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots \end{array} \right.$$

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-2 & -3 & 3 \\ 0 & t+1 & -3 \\ -2 & 0 & t-1 \end{pmatrix} =$$

$$= t^3 - 2t^2 - t + 2 + 6t - 18 + 6 =$$

$$= t^3 - 2t^2 + 5t - 10 = (t-2)(t^2 + 5)$$

autoval.

$$2, \pm i\sqrt{5}$$

(autoval. distinti $\Rightarrow$
diagonalizzabile)

autovettori : sistema a coefficienti complessi

$$(g) \quad f: V \rightarrow V \quad V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} -3x_1 - 8x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

basis di V $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$$f(w_1) = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(w_2) = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -14 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -6$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -7$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -7$
 autovalori di $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

autovettori

$$v_1: \begin{cases} -x - 4y = x \\ -3x - 5y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1$$

$$v_2: \begin{cases} -x - 4y = -7x \\ -3x - 5y = -7y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = v_2$$

autovettori di f

$$\lambda = 1 \quad 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

autovettori

$$\lambda = -7 \quad 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

scritti come
elementi di V

$$(h) \quad V = \mathbb{R}_{\leq 1}[t] \quad f: V \rightarrow V$$

$$f(p(t)) = p(3) + (p(-2)) \cdot t$$

$$f(1) = 1 + t$$

$$f(t) = 3 - 2t$$

$$B = \{1, t\}$$

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$p_f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 5 \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

autoval. distinti $\Rightarrow$ diagonalizzabile $\Rightarrow$ autovectori

$$(i) \quad f: V \rightarrow V \quad V = \{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] : p(1) = 0 \}$$

$$f(p(t)) = (t-1) \cdot p'(t) + (t^2-1) \cdot p(-2)$$

$$B = (t-1, t^2-1)$$

$$f(t-1) = \underline{(t-1)} \cdot 1 + \underline{(t^2-1)} (-3)$$

$$f(t^2-1) = (t-1) \cdot 2t + (t^2-1) 3 = -2(t-1) + 5(t^2-1)$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 6$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -1$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10}$$

$$P_f(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 1$$

autovalori di $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

$$V_{1,2} : x - 2y = (3 \pm \sqrt{10}) x$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \pm \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

autovettori di f

w_1, w_2

$$w_{1,2} = (-2)(t-1) + (2 \pm \sqrt{10})(t^2-1)$$

10. 1. 2

V sp. vet.

$$f: V \rightarrow V$$

$$, W \subset V$$

$$f(W) \subset W$$

$$g: W \rightarrow W$$

$$g(w) = f(w)$$

$$\forall w \in W$$

p. coroll. di g divide p. coroll. di f .

Prendo B base di W e completo a C base di V

$$C = (B, D)$$

↑ vettori della base di W

$$[f]_C^C = \left(\begin{array}{c|c} [f]_B^B & X \\ \hline 0 & Y \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P_f(t) &= \det(t \cdot I_n - [f]_e^e) = \\
&= \det(t \cdot I_\kappa - [g]_B^B) \cdot \det(t \cdot I_{n-\kappa} - Y) = \\
&= P_g(t) \cdot P_Y(t)
\end{aligned}$$

10.1.3 V sp. vet $\dim < \infty$ / $\mathbb{K}$ $f: V \rightarrow V$ lineare

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)}$$

che autovalori può avere f ?

Se f è diagonale

come può essere fatta?

$$\begin{array}{c}
V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{f} V \\
\text{Im}(f) = \text{Ker}(f) \rightarrow 0
\end{array}$$

$$f \circ f = 0$$

Se λ è autovalore $f(v) = \lambda v$ $f(f(v)) = \lambda^2 \cdot v$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

f può non essere nulla : ES $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Ker}(A) = \text{Im}(A) = \text{Span}(e_1)$$

ma ~~Se f~~ è diagonalizzabile, f è coniugata
a matrice nulla $\Rightarrow$ ~~$f = 0$~~

(10.1.4) Per quali $n \in \mathbb{N}$, qualsiasi $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$
 ha almeno 1 autovalore reale -

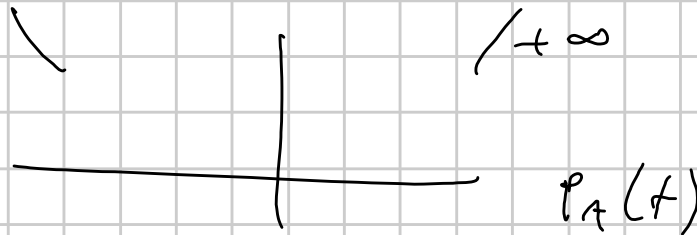
$p_A(t)$ è polinomio di grado n a coeff in $\mathbb{R}$

Se n dispari



$p_A(t)$ ha
 almeno 1
 radice $\in \mathbb{R}$

Se n pari



NO

ES

$$M_{n \times n}(\mathbb{R}) \ni A = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c|c} \hline 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 2 \times 2 \end{array} & \begin{array}{c|c} \hline 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 2 \times 2 \end{array} & \begin{array}{c} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c|c} \hline \dots & \hline 2 \times 2 \end{array} & \begin{array}{c|c} \hline 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 2 \times 2 \end{array} \end{array} \right)$$

$$p_A(t) = (t^2 + 1)^{n/2}$$

↑
solo radici $\pm i \notin \mathbb{R}$

(10.1.5)

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$ $n/2$ - blocchi 2×2

Date $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$

che regone A e diagonalizzabile di A e
quelle di A ?

$$\det(A) = \det({}^t A)$$

traspongo tutto, ma ${}^t I_n = I_n$

$$p_{{}^t A}(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_n - {}^t A) = \det(\lambda \cdot I_n - A) =$$

$$= p_A(\lambda)$$

$\Rightarrow A, {}^t A$ hanno gli stessi autovalori,
con le stesse molteplicità algebriche -

$$m.g.(\lambda \text{ risp. a } {}^t A) = \dim(Ker(\lambda I_n - {}^t A)) =$$

$$= n - \dim(\lambda I_n - {}^t A) = n - \dim(\lambda I_n - A) =$$

$$= m.g.(\lambda \text{ risp. a } A)$$

$\Rightarrow$ per tutti gli autovalori A e ${}^t A$ hanno la
stessa m.g.

$\Rightarrow A$ diagonalizzabile $\Leftrightarrow {}^t A$ diagonalizzabile

perché A diagonalizzabile se $\forall \lambda$ m.a. $(\lambda) =$
 $= m.g.(\lambda)$

10.1.6

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$p_A(t)$ ha n radici reali
(contate con molteplicità)

A è diagonalizzabile come matrice complessa,

cioè $\exists P \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ invertibile tale $P^{-1} \cdot A \cdot P$ è diagonale.

? A è diagonalizzabile tramite una matrice reale?

Idea provare che per ogni λ radice di $p_A(t)$

$$\begin{aligned} \text{ho che } m.g.^{(\mathbb{R})}(\lambda) &= m.o.(\lambda) \\ m.g.^{(\mathbb{R})}(\lambda) &= \dim_{\mathbb{R}}(\text{Ker}(\lambda \cdot I_n - A)) = \\ &= n - \text{rk}_{\mathbb{R}}(\lambda I_n - A) \end{aligned}$$

$$m_j^{(\mathbb{C})}(\lambda) = \dim_{\mathbb{C}} (\ker (\lambda I_n - A)) =$$

$$= n - \text{rk}_{\mathbb{C}} (\lambda \cdot I_n - A)$$

sono uguali
perché li calcoliamo

tramite i determinanti
dei minori.

Per $\mathbb{R}$ A diagonale su $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow m_j^{(\mathbb{C})}(\lambda) = m_{\mathbb{C}}(\lambda)$$

$$\Rightarrow m_j^{(\mathbb{R})}(\lambda) = m_{\mathbb{R}}(\lambda)$$

di autovettori reali $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile
su $\mathbb{R}$

10.1.7 $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con tutti i coeff positivi

Prova che A ha autovalori distinti e che
 A ha due autovettori, uno di coord concordi,
l'altro di coord discordi.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d > 0$$

$$P_A(t) = t^2 - (a+d)t + ad - bc$$

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) =$$

$$\begin{aligned}
 &= a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc = \\
 &= (a - d)^2 + 4bc > 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ radici reali distinte

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\lambda_1 I - A =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [(d-a) + \sqrt{\Delta}] & -b \\ -c & \frac{1}{2} [(a-d) + \sqrt{\Delta}] \end{pmatrix}$$

$$\Delta = (a-d)^2 + 4bc > (a-d)^2$$

$$\sqrt{\Delta} > |a-d|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [(d-a) + \sqrt{\Delta}] > 0$$

$$\frac{1}{2} [(a-d) + \sqrt{\Delta}] > 0$$

Se $v_i \in K_n$ $(I, I - A)$ v_i *additive*

$$\frac{1}{2} [(d-a) + \sqrt{\Delta}] x - by = 0$$

ovvero $y = \frac{1}{b} \frac{1}{2} [(d-a) + \sqrt{\Delta}] \times$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 > 0

primi coord. sono concordi

Per d_2 $y = \frac{1}{b} \frac{1}{2} [(d-a) - \sqrt{\Delta}] \times$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 < 0

$\Rightarrow$ coord
discordi.