Geometria 4/5/17

6) Paraboloide iperbolico

$$z = x^2 - y^2$$

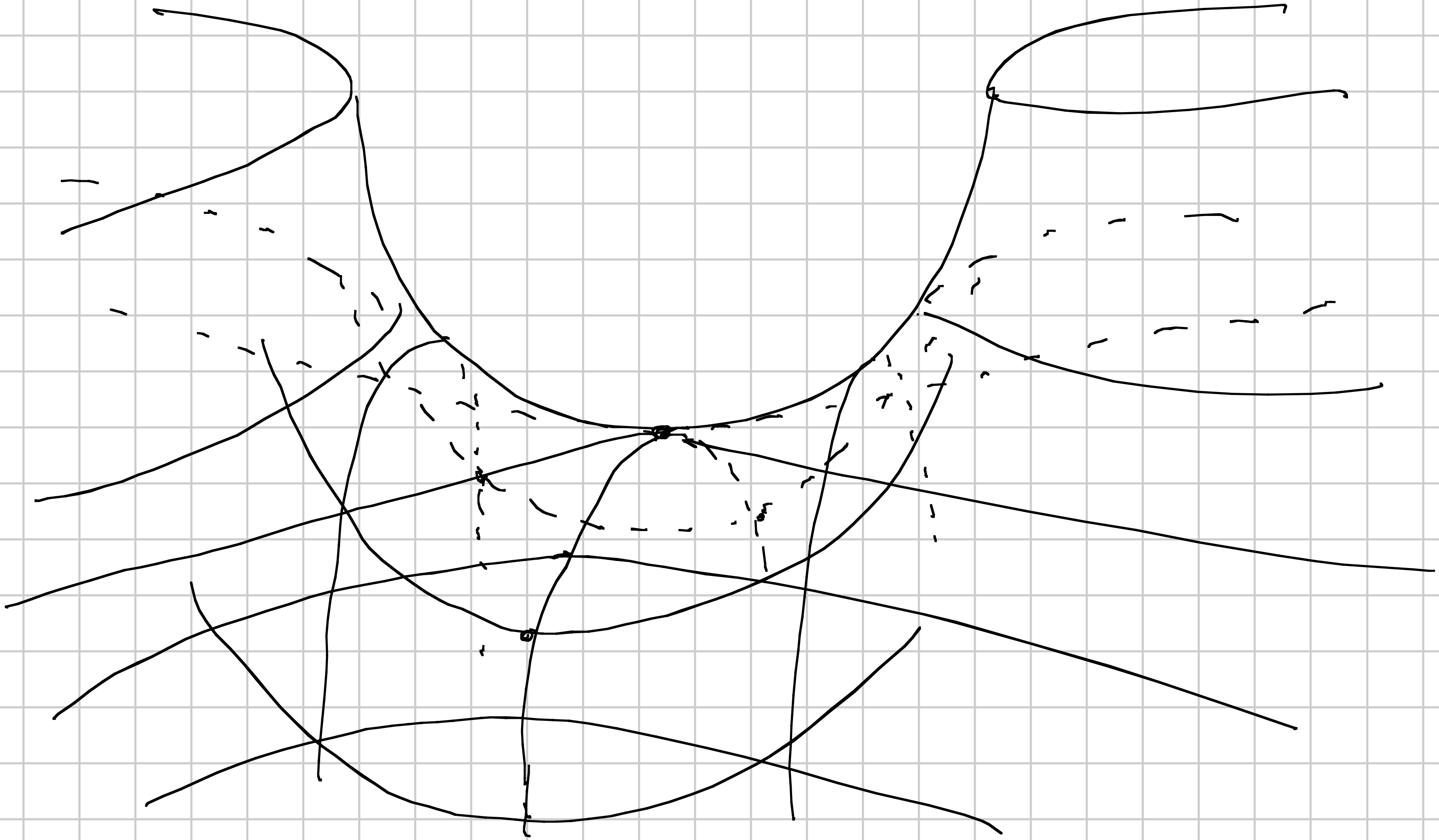
C iperbolico: $\overline{\mathcal{L}}$: $zw = x^2 - y^2$

$$(Z+W)(Z-W) = X^2 - Y^2$$

$$Z^2 - W^2 = X^2 - Y^2$$

$$X^2 + W^2 = Y^2 + Z^2$$ iperboloide proiettivo

$z = x^2 - y^2$



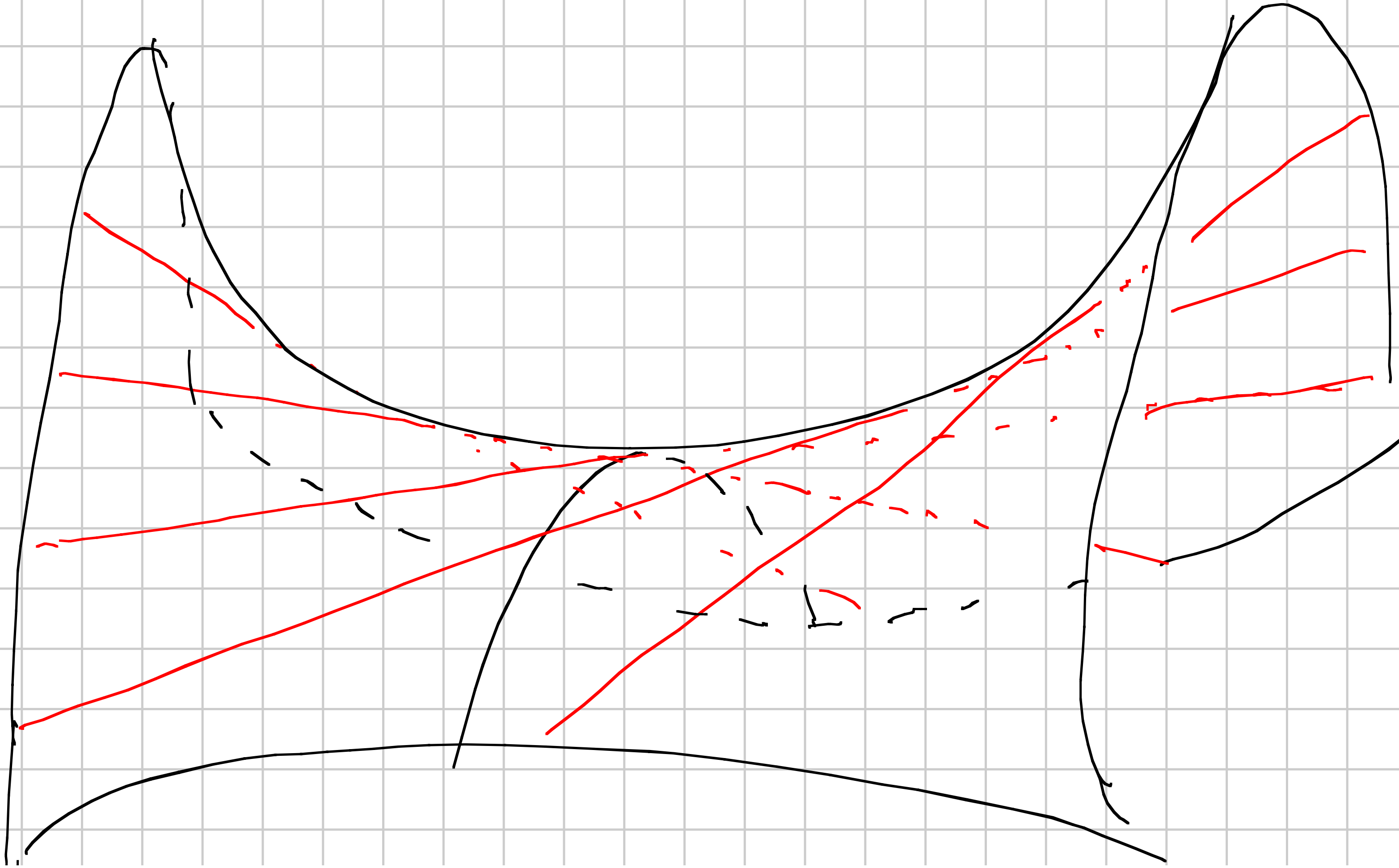
iperboloide a sella

$z = x^2 - y^2$

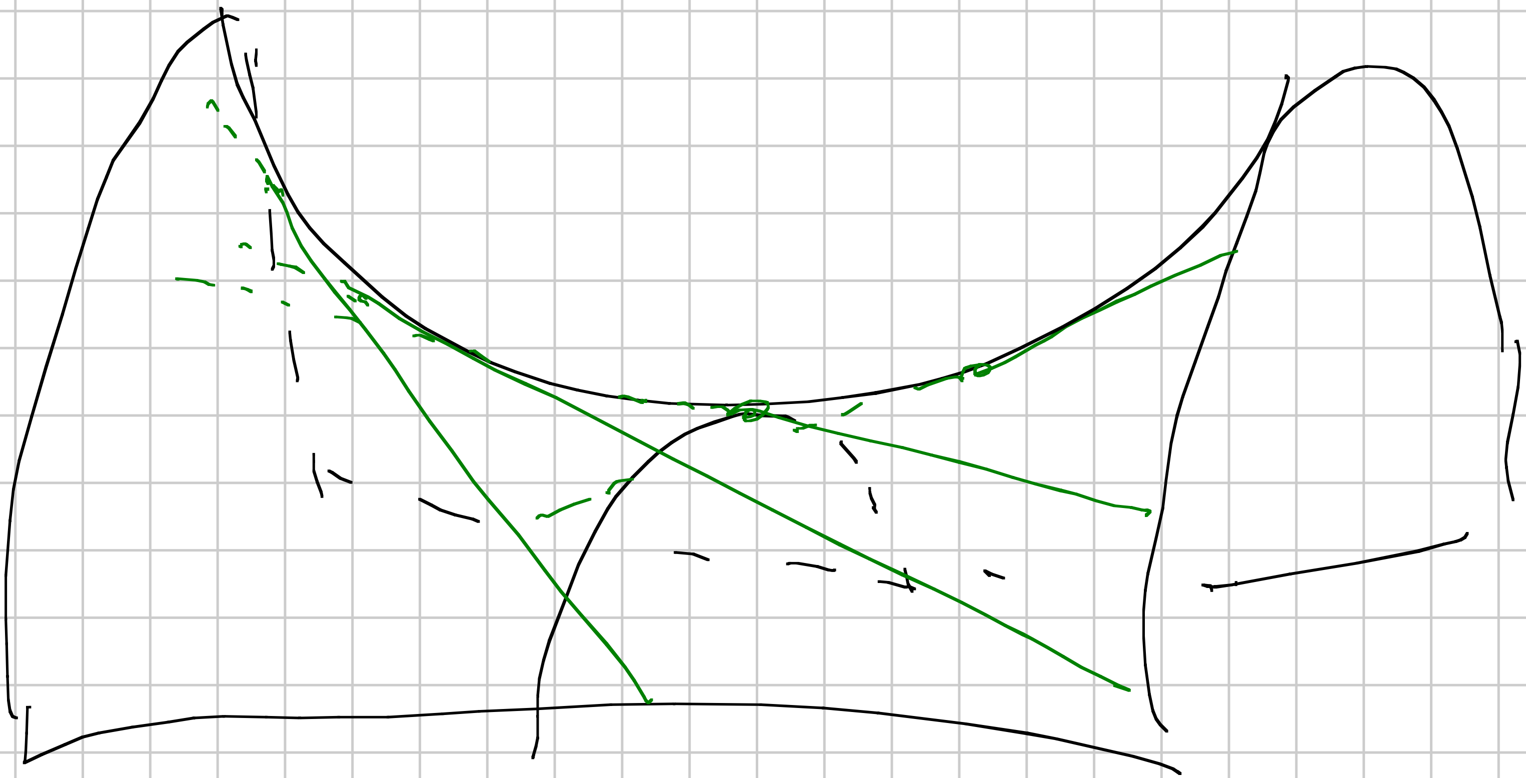
$z = (x+y)(x-y)$

Intersezione con piano $x-y=c$

è la retta $z = c(x+y)$



Strano : $x+y=c \cap$ sella = retta $z=c(x-y)$



Riassumiamo i 6 modelli con pti a ∞ e matrici

1) $\emptyset$ $\quad x^2+y^2+z^2+1=0 \qquad \mathcal{L}_\infty = \emptyset \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

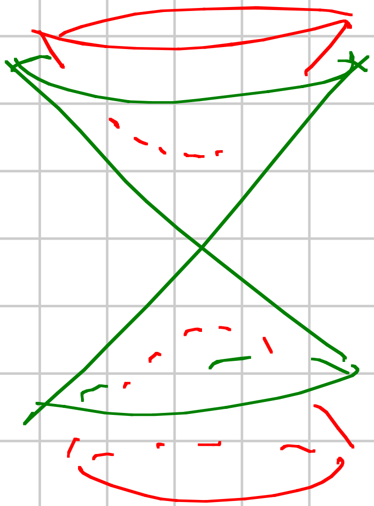
2) ellissoide $\quad x^2+y^2+z^2=1 \qquad \mathcal{L}_\infty : x^2+y^2+z^2=0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$\emptyset$

3) parab. ell $\quad z=x^2+y^2 \qquad \mathcal{L}_\infty : x^2+y^2=0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$= \{[0:0:1]\}$

4) iperb. ell (2 falde) $\qquad z^2 = 1 + x^2 + y^2$

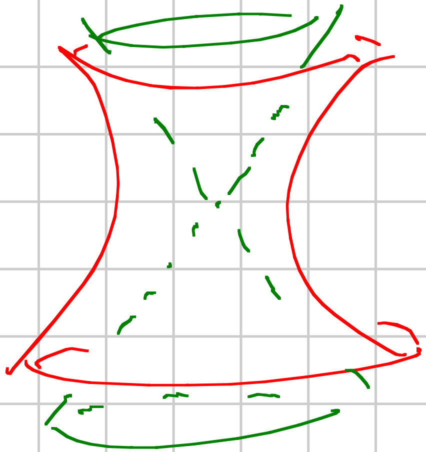


$\mathcal{L}_\infty : z^2 = x^2 + y^2$

l'unica conica proiettiva non deg. non vuota

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

5) iper. b. iperbolico $\qquad x^2 + y^2 = 1 + z^2$

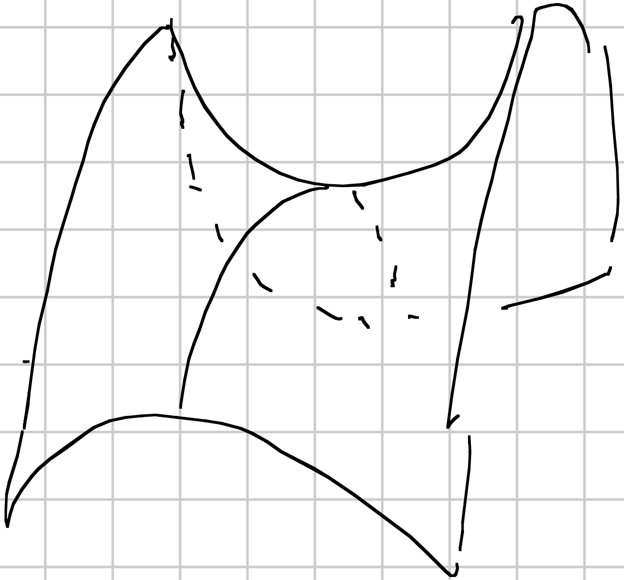


$\mathcal{Q}^P_\infty$: conica sopra

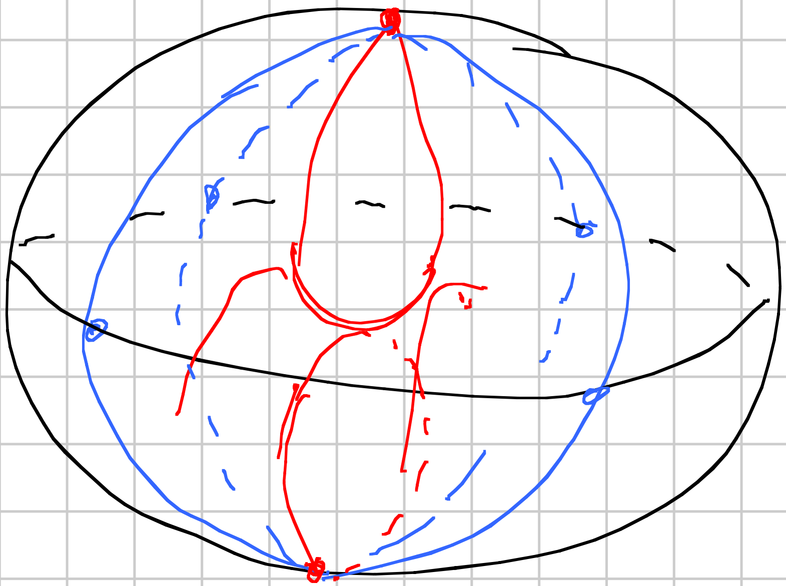
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

6) parab. iperb. $\quad z = x^2 - y^2$

$\mathcal{Q}_\infty : x^2 - y^2 = 0 \qquad x = \pm y \qquad$ due rette distinte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$



dispongo $\mathbb{R}^3$ come se fosse limitato.



$$\mathbb{R}^3 \longleftrightarrow \{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1 \}$$

$$x \longmapsto \frac{x}{1 + \|x\|}$$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \pi \cup \infty = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$$

$x \sim -x$

<u>Teo</u>: ogni quadrica affine non degenere in $\mathbb{R}^3$

$$\left(\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} \qquad \begin{array}{l} A \in M_{4\times 4} \\ \text{simm} \\ \det(A) \neq 0 \end{array} \right)$$

può essere trasformata tramite cambi di coord. affini in una delle 6 descritte

(tramite $M = \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ + cambi segno e epuoi

la matrice A diventa una delle 6

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$).

Inoltre se $A = \begin{pmatrix} Q & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix}$ i segni degli

autovalori di A e di Q dicono quale dei

6 modelli si trova.

<u>Dim</u>: possibilità per i segni degli autovalori di Q (a meno di cambiare segno all'eq.)

$$+\,+\,+ \qquad +\,+\,- \qquad \underbrace{+\,+\,0 \qquad +\,-\,0} \qquad 0\,0\,*$$

autoval di A

$+ + + +$

$+ + + -$

autoval A

$+ + + - \; (+ + - +)$

$+ + - -$

$\otimes$

tramite $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ trovo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

<u>NO</u>; $\det = 0$

$\downarrow$

prima mi riconduco via ortog. a

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & * \\ 0 & \lambda_2 & 0 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

poi con matrici simpli arrivo a

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & \pm 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & \pm 1 & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

poi con traslazione

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \pm 1 & \\ & & & c \end{pmatrix}$$

infine con omotetie a

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \pm 1 & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

che a meno di cambio segno e riordino è

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

⊗ con ortop + omotetie mi riconduco a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & \pm 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

poi con traslaz su asy a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

infine con
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & a & b \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$
a

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & I_1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Oss</u>: se ho $\mathcal{L} = \{ x \in \mathbb{R}^3 : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \}$ e $d_3 = 0$ non posso concludere che è un paraboloide: devo verificare che $d_4 \neq 0$.

Come si fa dato A a capire quale quadrica è definita da ${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$?

Se d_1, d_2, d_3, d_4 sono $\neq 0$ ok.

In realtà basta $d_2 \neq 0$ (ma sapendo $d_4 \neq 0$).

Infatti:

$d_2 > 0 \Rightarrow Q$ ha due autoval concordi; se serve cambio segno, e li suppongo $++$. Ora,

d_3:
- $> 0 \Rightarrow Q: +++$ d_4:
  - > 0 $A: ++++$ vuoto
  - < 0 $A: +++-$ ellissoide
- $= 0 \Rightarrow Q: ++0 \Rightarrow$ parab. ell.
- $< 0 \Rightarrow Q: ++-$ d_4:
  - > 0 $A: ++--$ iperb. iperb
  - < 0 $A: ++-+$ iperb. ell

$d_2 < 0 \Rightarrow Q$ ha due autoval discordi

$$d_3 \begin{cases} > 0 \longrightarrow \text{concludo come sopra} \\ = 0 \longrightarrow Q : + - 0 \Rightarrow \text{parab. iperb.} \\ < 0 \longrightarrow \text{concludo come sopra} \end{cases}$$

<u>SUGGERIMENTO</u> : non mandare a memoria schemi sui segni di $d_1\ d_2\ d_3\ d_4$

ma ricordiamo che si usano $d_1 d_2 d_3 d_4$
per capire i segni degli autoval di Q e A
e che questi segni danno la classificaz.

<u>Oss</u>: se dopo qualche permutaz. delle coordinate ho $d_2 \neq 0$ tutto va bene.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ -5 & 0 & 9 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$d_2 = 0$

$d_2 = 0$

$d_2 < 0 \leadsto$ calcolo d_3 e d_4 e concludo

Caso escluso: d_2 rimane nullo per qualsiasi permutazione delle coordinate.
In tal caso basta il segno di d_1, d_3, d_4 poiché si ha necessariamente d_1 e $d_3 \neq 0$.

Ese 11.2.1 — Classificare le coniche date

- $x^2 + 2xy - y^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$d_2 = -2 < 0$

$\Longrightarrow$ o deg. o iperbole

$d_3 = \sqrt{3} + 0 + 0 + 1 + \sqrt{3} + 0 + 0 \Longrightarrow$ iperbole

- $$\begin{pmatrix} 2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -3 & 5 \\ -5/2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$d_2 = -6 - \frac{1}{4} < 0$

$$d_3 = 18 + \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + \frac{75}{4} + \frac{3}{4} - 50$$

$$= 18 + \frac{25}{2} + \frac{39}{2} - 50 = 18 + 32 - 50 = 0$$

$\Longrightarrow$ è degenere.

$$2x^2 - xy - 3y^2 - 5x + 10y - 3 = 0$$

$(x+y-3)(2x-3y+1) = 0$: due rette incidenti

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & -3/2 \\ 2 & -3/2 & -\sqrt{11} \end{pmatrix}$$

$d_2 = 35 - 4 > 0$

$d_1 > 0$

$$d_3 = -35\sqrt{11} + 6 + 6 - 28 + 4\sqrt{11} - \frac{45}{4}$$

$$= -31\sqrt{11} - 16 - \frac{45}{4} < 0$$

ellissi

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -5/2 \\ 2 & -5/2 & -19 \end{pmatrix}$$

$d_2 = 0$

se $d_3 \neq 0$ è parabole

$$d_3 = -171 + 15 + 15 - 12 + 171 - \frac{75}{4} \neq 0$$

parabole

- $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad d_2 = 0$

$d_3 = \mp 4 \neq 0$ parabole

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad d_2 < 0$

$d_3 \neq 0$ iperbole

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad d_3 = 0 \quad$ degenere

$$x^2 - 2xy - 2y - 1 = 0 \qquad [\ldots]$$

$(x^2-1) - 2y(x+1) = 0 \qquad (x+1)(x-2y-1) = 0$ due rette incidenti

- $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 6y - k = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 \\ -3 & 5 & 3 \\ -5 & 3 & -k \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} d_1 > 0 \\ d_2 > 0 \end{array}$$

$$d_3 = -25k + 45 \cancel{+45} - 125 + 9k \cancel{-45}$$

$$= -16k - 80 = -16(k+5)$$

$k > -5 \qquad d_3 < 0 \qquad$ ellisse

$k < -5 \qquad d_3 > 0 \qquad \emptyset$

$k = -5 \qquad \begin{pmatrix} +1 & & \\ & +1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad$ un punto

infatti: $\quad 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 6y + 5 = 0$

$(x+y-1)^2 + 4(x-y-1)^2 = 0$

$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad (1,0)$

- $x^2 + kxy - 3y^2 + 2x + y - 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & k & 2 \\ k & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$(d_1 > 0)$

$d_2 = -12 - k^2 < 0$

$$d_3 = 24 + 2k + 2k + 24 + 2k^2 - 2$$
$$= 2\left(k^2 + 2k + 23\right) \neq 0$$

sempre iperbole

- $kx^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$

$$\begin{pmatrix} k & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 1 > 0$

$d_2 = k - 4$

$$d_3 = 5k + 4 + \cancel{4} - \cancel{4} - 20 - k$$

$$= 4k - 16 = 4(k-4)$$

$k > 4$ $\quad d_1 > 0 \quad d_2 > 0 \quad d_3 > 0 \quad \emptyset$

$k < 4$ $\quad d_2 < 0 \quad d_3 \neq 0$ iperbole

$k = 4$ degenere

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$$

$$(2x+y)^2 - 2(2x+y) + 5 = 0 \Longrightarrow \emptyset$$

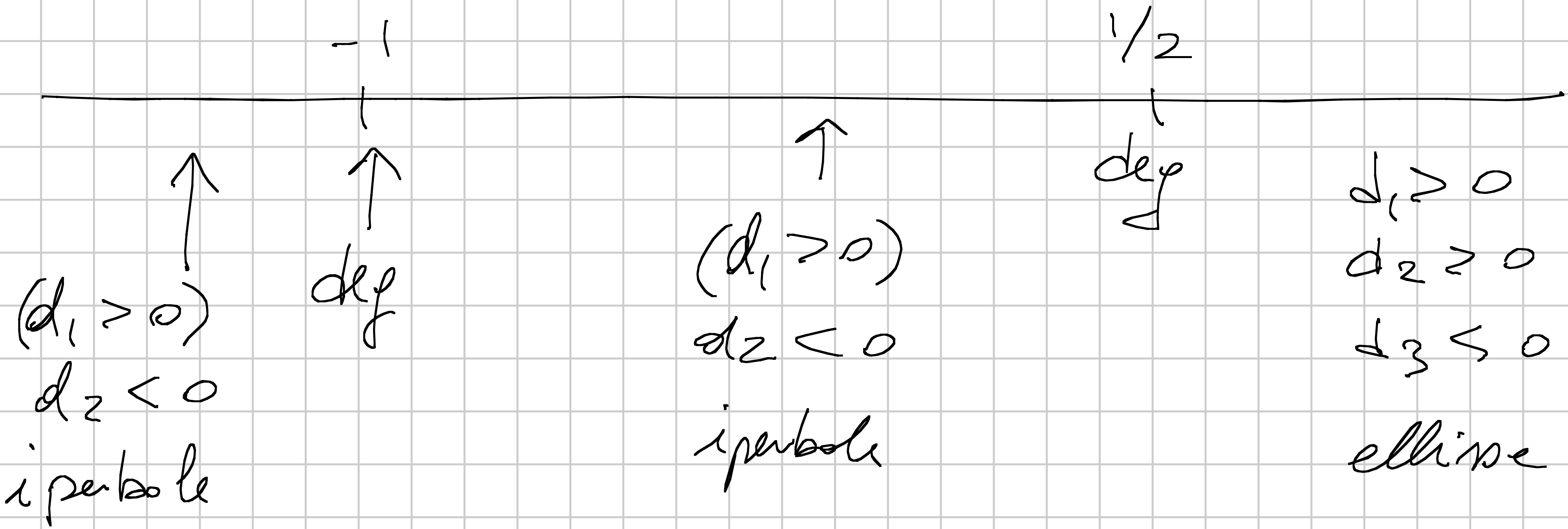
- $x^2 - 2xy + 2ky^2 + 2kx + 2y + 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & 2k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$d_1 > 0$

$d_2 = 2k - 1$

$$d_3 = \cancel{2k} \cancel{-k} \cancel{-k} - 2k^3 - 1 - 1 = -2(k^3 + 1)$$



-1
1/2
(d1 > 0)
d2 < 0
iperbole
deg
(d1 > 0)
d2 < 0
iperbole
deg
d1 > 0
d2 > 0
d3 < 0
ellisse

• $(k+1)x^2 + (k-1)y^2 + 2kx + 2y - 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} k+1 & 0 & k \\ 0 & k-1 & 1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d_3 = \cancel{1} - \cancel{k^2} + 0 + 0 - k^3 \cancel{+k^2} + 0 - k \cancel{-1}$$

$$= -k\,(k^2+1)$$

-1	0	1
parab.	deg	parab

$- \ - \ +$	$+ \ - \ +$	$+ \ - \ +$	$+ \ + \ -$
ellisse	iperbole	iperbole	ellisse

$k = 0 \qquad x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \qquad x^2 = (y-1)^2$

$x = y - 1$
$x = 1 - y$ due rette incidenti