

Geometry 3/5/17

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}^t A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0\} \quad A \in \mathcal{M}_{(n+1) \times (n+1)} \\ \text{Sym}$$

$$\overline{\mathcal{L}} = \{[y] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : t y \cdot A \cdot y = 0\} \quad A = \begin{pmatrix} Q & p \\ p^t & c \end{pmatrix}$$

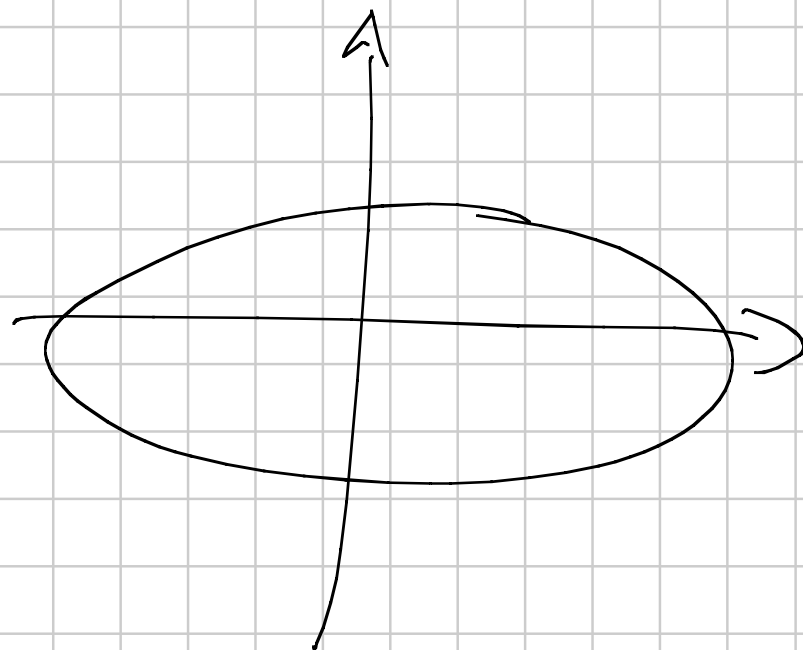
$$\mathcal{L}_\infty = \overline{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{L} = \{[x] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) : t x \cdot Q \cdot x = 0\}$$

$L_\infty = \text{pti all' } \infty \text{ di } R.$

Considera

ellisse $x^2 + y^2 = 1$

ci aspettiamo: $L_\infty = \emptyset$

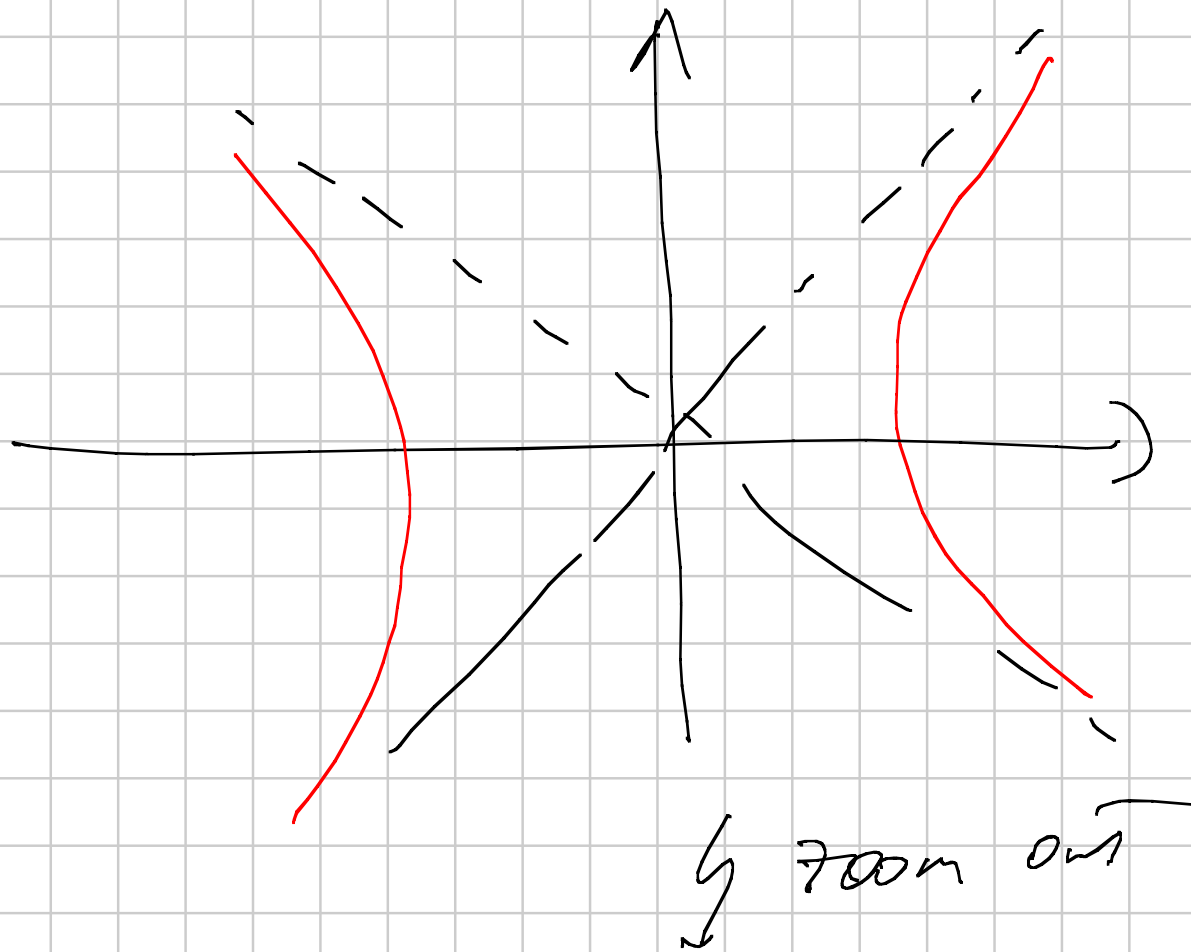


$$\overline{L} : x^2 + y^2 = z^2$$

$$L_\infty = \{ [x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : x^2 + y^2 = 0 \}$$

$$= \{ [x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : x=y=0 \} = \emptyset \quad \checkmark$$

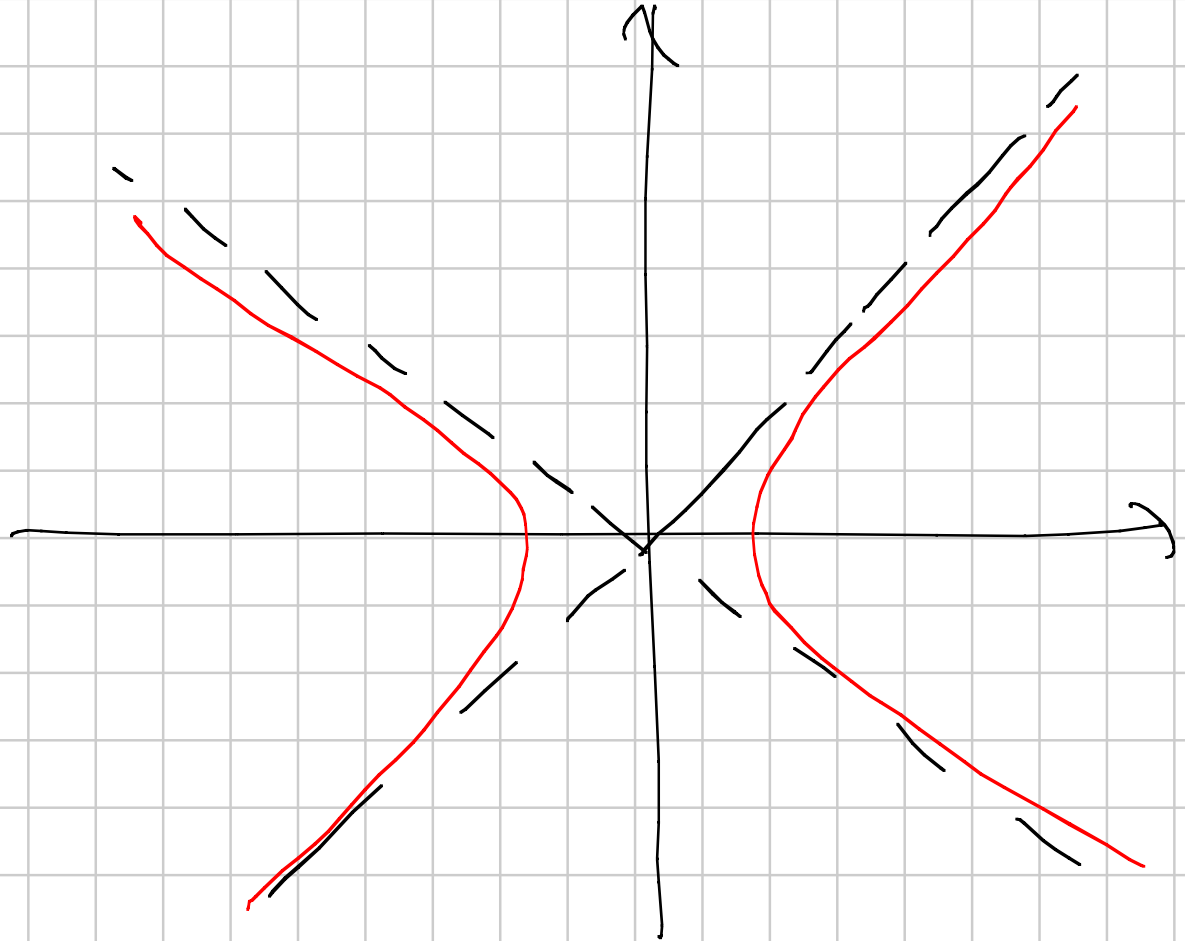
$$\underline{\text{ipubli}} : x^2 - y^2 = 1$$



ci aspettiamo:

$L_\infty = \text{due pt.}$,

le diret. aspt.
omni tot.



$$\overline{L} : x^2 - y^2 = z^2$$

$$L_\infty = \{ [x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : x^2 - y^2 = 0 \}$$

$$= \{ [x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : y = \pm x \}$$

$$= \{ [1:1], [1:-1] \}$$

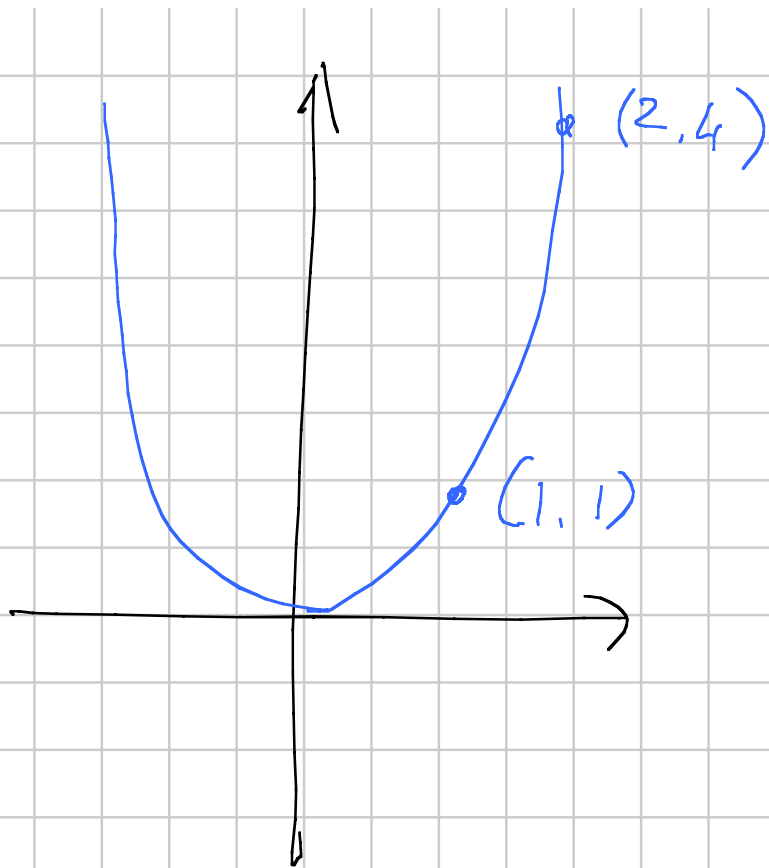


/
dim. bethic
I/II quad

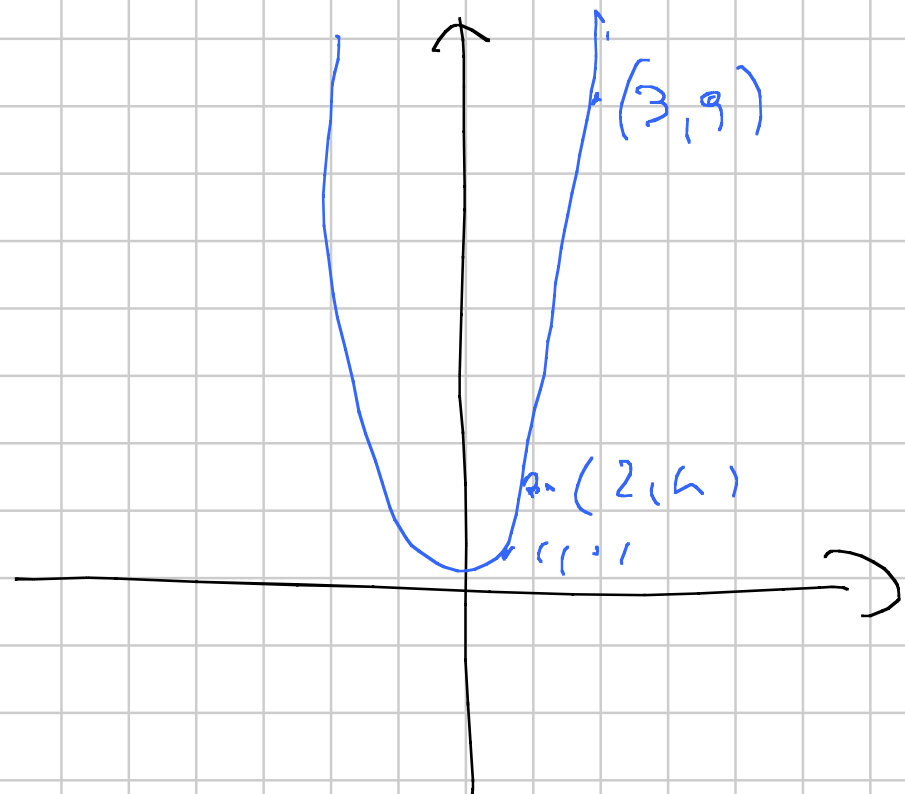
Parabola

$$y = x^2$$

\
dim. bethic
II/IV quad.



↗
Zoom
out



ci aspettiamo: un solo pto all'inf (diret. ass)

$$\overline{L}: yz = x^2$$

$$L_\infty = \{[x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : x=0\} = \{[0:1]\}$$

diret. ass y



Classificazione proiettiva delle quadriche:

Prop: ogni luogo del tipo $\{[y] \in \mathbb{P}^h(\mathbb{R}) : {}^t y \cdot A \cdot y = 0\}$
si trasforma con un cambio di coord. proiettivo
in $\{[y] \in \mathbb{P}^h(\mathbb{R}) : y_1^2 + \dots + y_p^2 = y_{p+1}^2 + \dots + y_{p+m}^2\}$

con $p \geq m \geq 0$

Dim: con un cambio di coord. di matrice M ,
la nuova matrice è ${}^t M \cdot A \cdot M$.

Teo spetti: poiché A è simm $\exists M$ ortog. l.c.

$${}^t M \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_p & \\ & & & \lambda_{p+1} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_{p+n} \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0 \quad \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+m} < 0$$

(e.g. suppose $p \geq m$ e means d. combinations sep. w.)

One combination can be con

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1/\sqrt{\lambda_p} & \\ & & & 1/\sqrt{-\lambda_{p+1}} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{-g_{11}}} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Now $A e$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{-g_{11}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & -g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{-g_{11}}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$



Es: $n = 2$

$[x:y:z]$

$$0 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$



wzi

$$x^2 = y^2$$

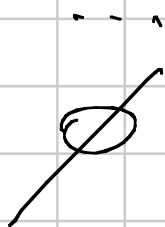
$$x^2 + y^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

due rette in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

un pto



def^a



l'unica conica
proiettiva non degenera
non vuota

ellisse

$$\mathcal{L} \quad x^2 + y^2 = 1$$

iperbole

$$x^2 - y^2 = 1$$

parabole

$$y = x^2$$

$\overline{\mathcal{L}}$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$x^2 - y^2 = z^2 \leadsto$$

$$y + z^2 = x^2 \text{ sono 2 linee dei conici}$$

$$yz = x^2$$

$$y = x - y$$

$$z = x + y$$

$$x = z$$

poiché c'è una
sola conica proiett.
con dep. e punto rosso

$$\Delta (x-y)(x+y) = z^2$$

$$x^2 - y^2 = z^2$$

campi e meno d. transf.
proiettive

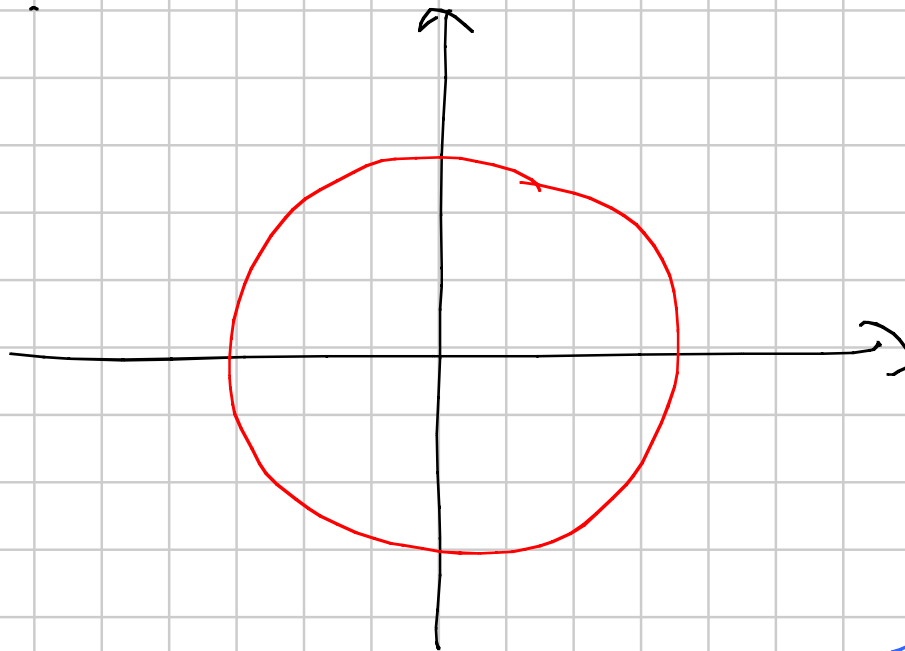
$$Y^2 + Z^2 = X^2$$

stima e meno
dei nomi

Interpret. geom.:

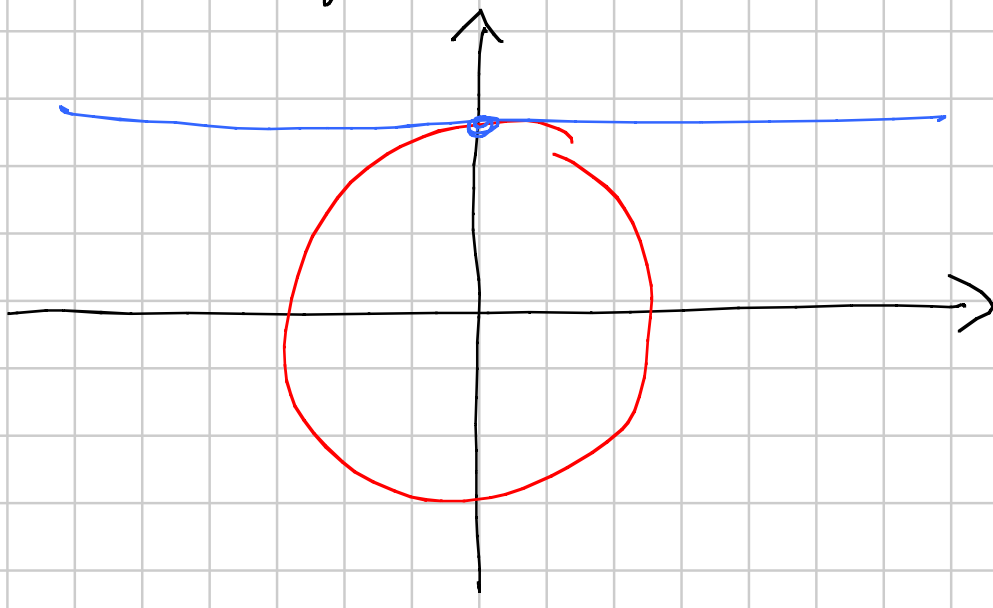
ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

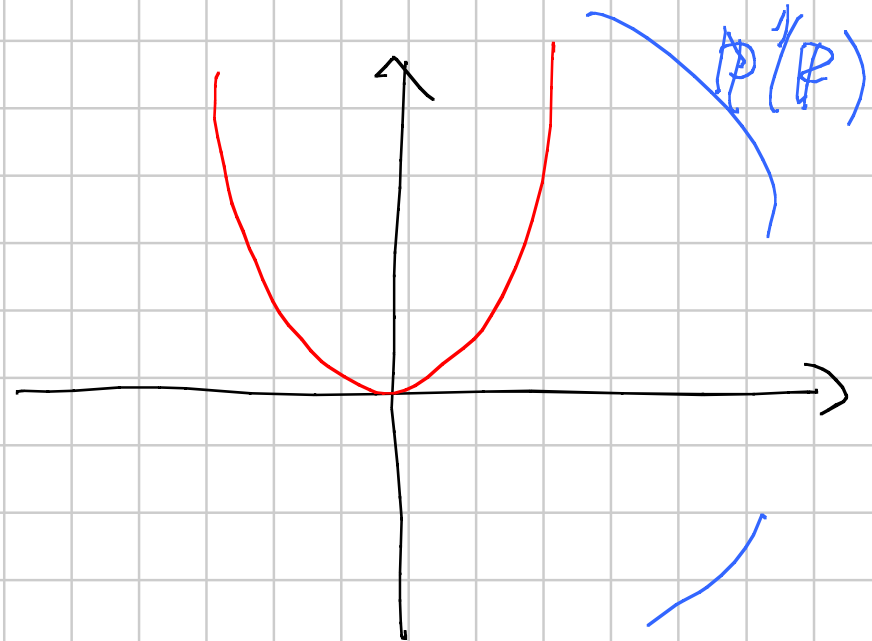
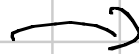


$P^1(\mathbb{R})$

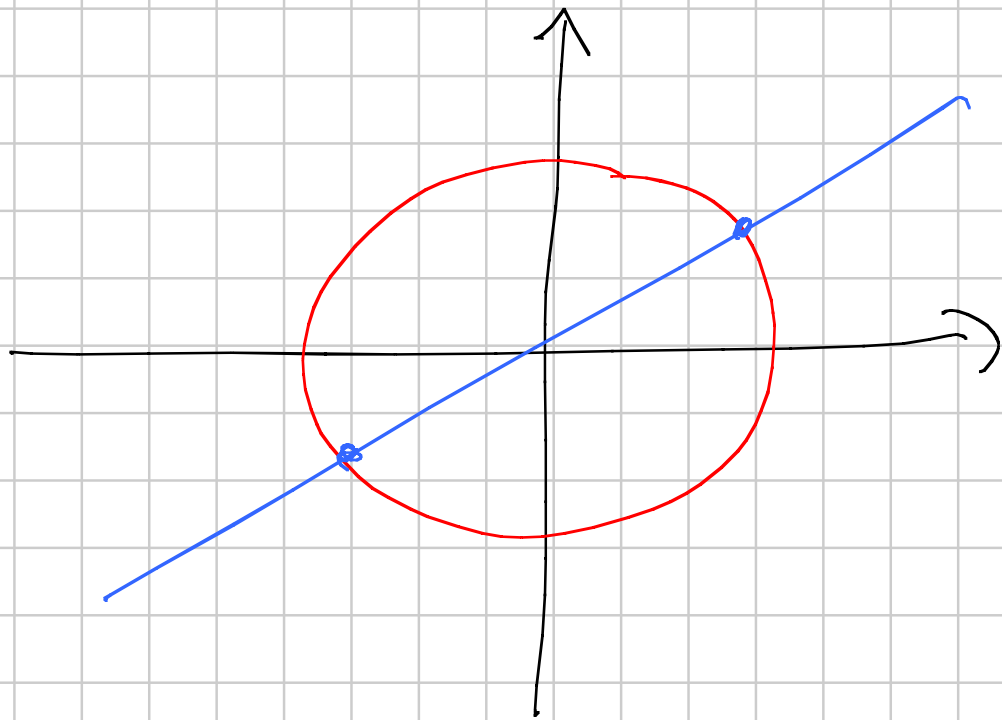
Per trasformarlo è possibile unire uno
trasf. proiettiva che manda ℓ_∞ in
solo pto dell'ellisse:



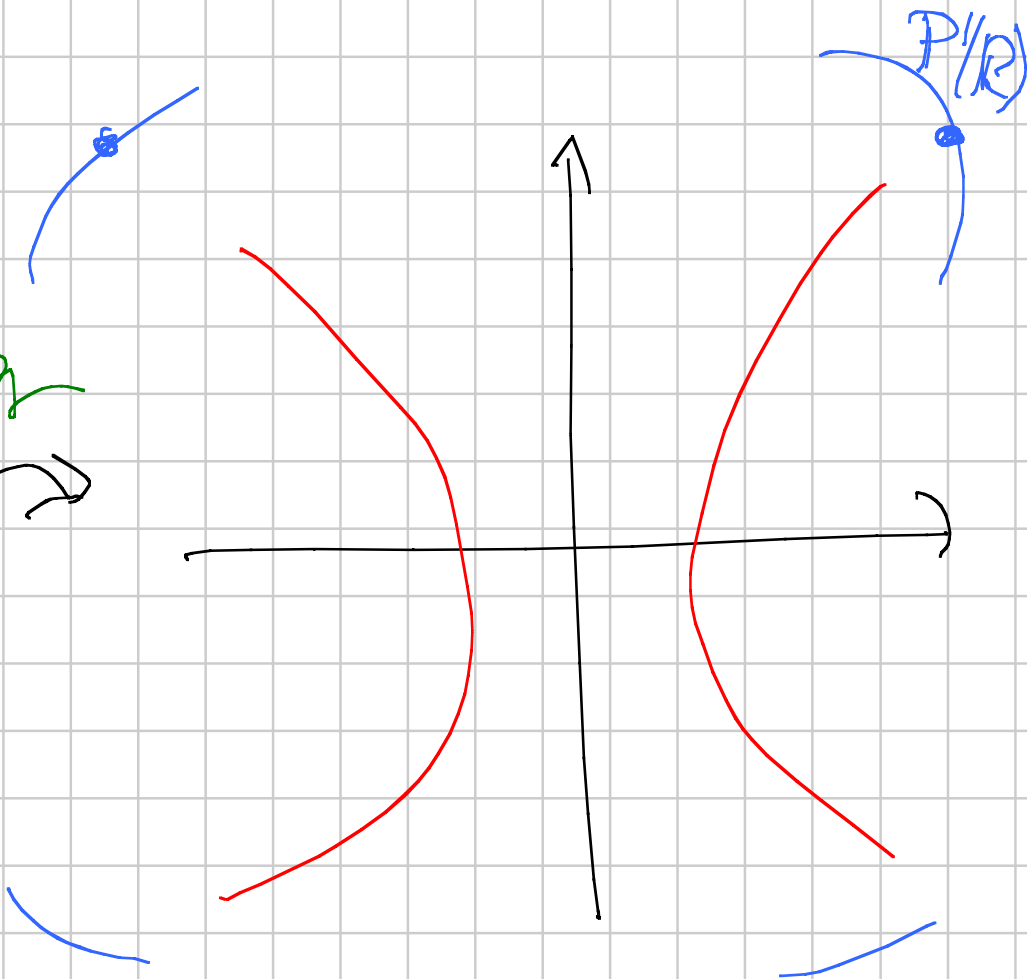
g



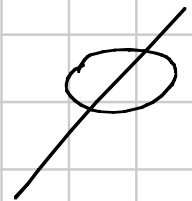
iperbola:



g
 R



Coniche proiettive non deg.: $x^2 + y^2 = z^2$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

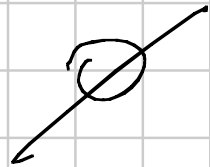


Quadriche proiettive non deg. in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2 + w^2$$



ellissoide proiettivo

iparaboloidi proiettivi

Prossimo step: classificazione affine
delle coniche e delle quadriche (in $\mathbb{R}^3$)
non degeneri -

Teo: se $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$A \in M_{3 \times 3}$ simm. e $\det(A) \neq 0$ allora

esiste una trasf. affine di $\mathbb{R}^2$ che manda A in:

- se $d_2 = 0$, la parabola $y = x^2$
- se $d_2 < 0$, l'iperbola $x^2 - y^2 = 1$
- se $d_2 > 0$, se $d_1 \cdot d_3 < 0$, l'ellisse $x^2 + y^2 = 1$
 se $d_1, d_3 > 0$, il $\emptyset$ $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Dim: Fatti:

i) i casi elencati per d_1, d_2, d_3 sono tutti
 i possibili (infatti se $d_2 > 0$ ho $d_1 \neq 0$;

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow a_{11} \neq 0$$

ii) i casi con cambiano con :

- cambi di coord. affini
- cambi di segno dell'equazione

$$A = \begin{pmatrix} Q & l \\ t_l & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & l \\ t_l & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t N Q N & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \det(Q) \quad d_2' = \det({}^t N Q N) = \det(N)^2 \cdot \det(Q)$$

concorde con d_2

Quindi se $d_2 > 0$ ha gli autovalori concordi
 e ${}^t N Q N$ ha anche una più autoval. concordi
 e concordi con quelli di $Q \Rightarrow d_1'$ concorde con
 d_1

E d_3' concorde con d_3 :

$$\det(A') = \det({}^t M A M) = \det(M)^2 \cdot \det(A).$$

gives us $A' = -A = \begin{pmatrix} -Q & -1 \\ -1 & -C \end{pmatrix}$

$$d_2' = \det(-Q) = d_2$$

$$\begin{aligned} d_1' &= -d_1 \\ d_3' &= -d_3 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow d_1' \cdot d_3' = d_1 \cdot d_3 \end{array} \right.$$

(c) Conclusione: pero che con cambi di
 coord. origin + cambi spuo mi
 riconduco a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^2 - y = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^t \\ {}^t l & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} {}^t M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q M & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t M Q M & * \\ * & * \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Così (come nel caso proiettivo) mi riconduco a:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{impossibile;} \\ \det(A) = 0 \\ \text{sarebbe} \end{array}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad - \quad d_2 = 0$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad - \quad d_2 > 0$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad - \quad d_2 < 0$$

in questi due casi

* traslo: $A' = \begin{pmatrix} I & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & l \\ \epsilon_l & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ t_r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & Qr+l \\ t_l & tl_r+c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q & Qr+l \\ trQ+tl & * \end{pmatrix}$$

scelgo $v = -Q^{-1}l$ e $trav =$

$$A' = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \pm 1 \\ & & c \end{pmatrix} \quad c \neq 0$$

Cambia ancora con $\begin{pmatrix} \sqrt{|c|} & \\ & \sqrt{|c|} \end{pmatrix}$ e trova

$$A = \begin{pmatrix} |c| & \\ & \perp |c| \\ & & c \end{pmatrix} \text{ diviso per } c$$

e trova $\begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \pm 1 & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$ da cui ϕ ,
ellisse, iperbole

Nel caso $d_2 = 0$ ho

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{come sopra}]{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & k & c \end{pmatrix}$$

Ultimo cambio con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Voglio che

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k \\ ak & bk+c \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & ak \\ ak & 2bk+c \end{pmatrix}$$

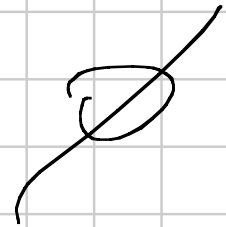
Beste solution $a = -1/2k$ $b = -c/2k$.

$\square$

Modelli affini delle quadriche non degeneri

↳ poi faremo vedere che ogni quadrica non degeneri deriva una di loro tramite transf. proiettive.

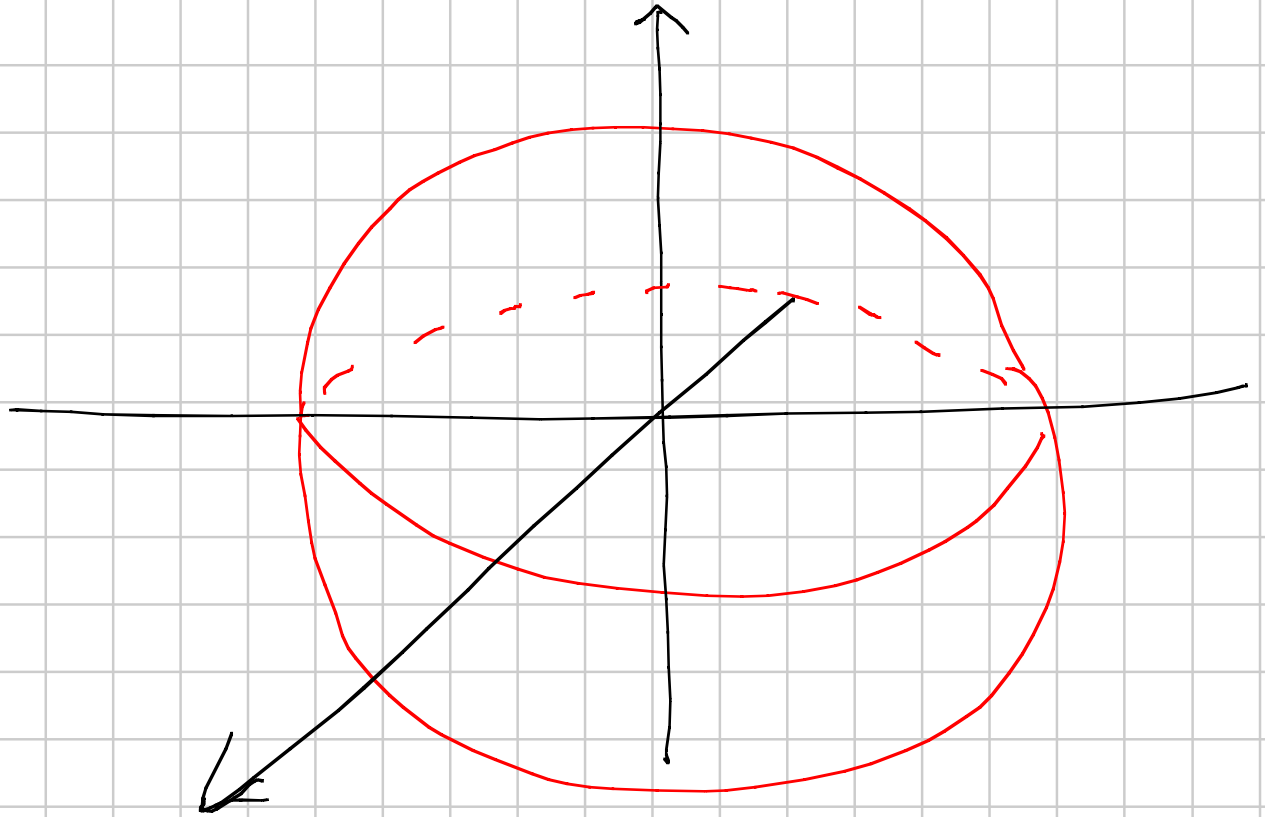
$$1) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$



$$2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

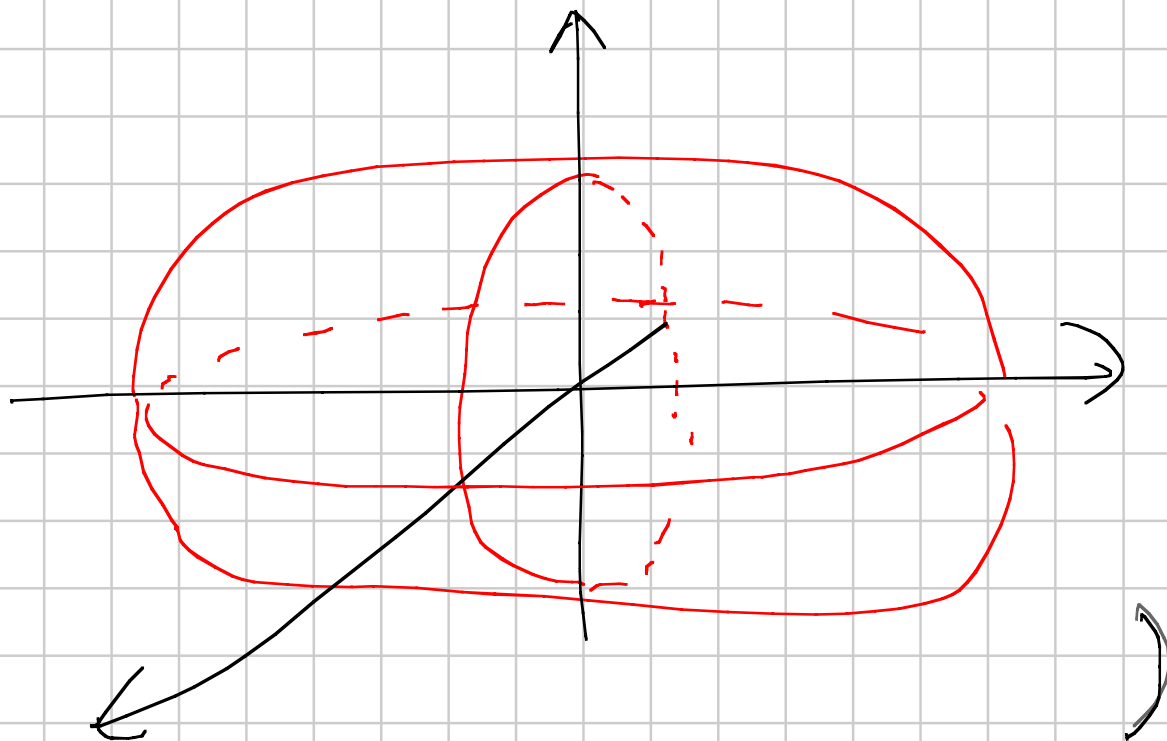
ellissoide

$$(\bar{L} = x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \\ \text{ellissoide proiettivo})$$



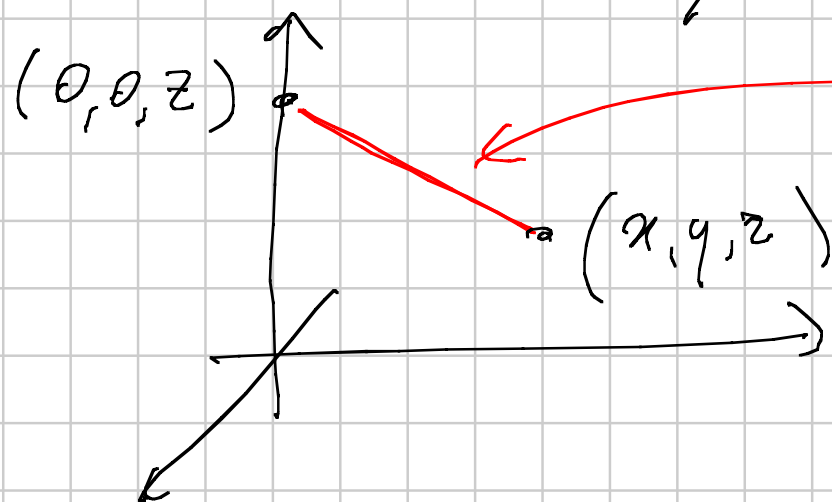
(dal pto di vista unitario, non offio, altri:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$3) \quad z = x^2 + y^2$$

Oss: se in una equazione x e y compaiono
solo nell'espressione $x^2 + y^2$

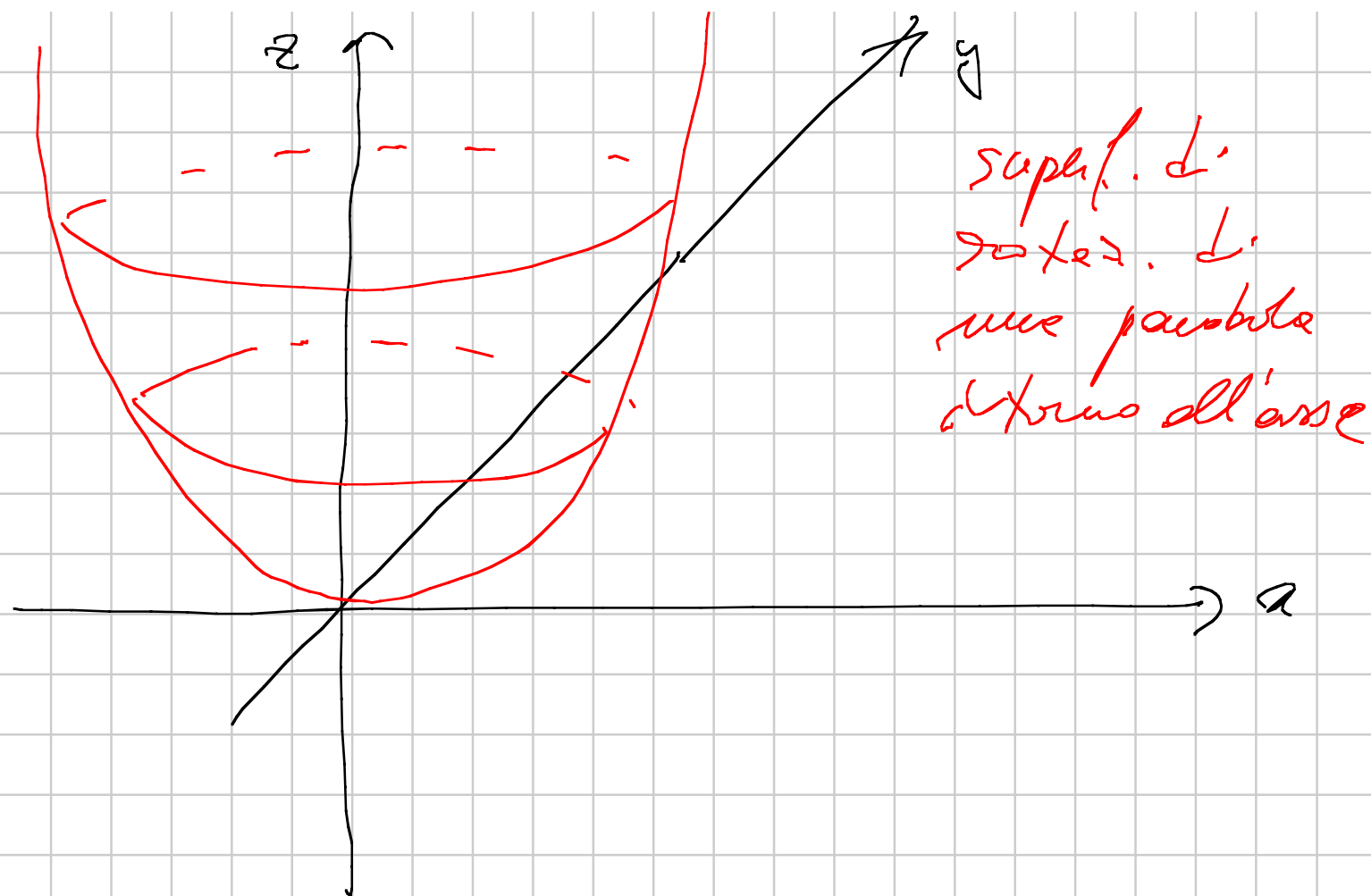


$\sqrt{x^2 + y^2}$ = dist. del pto
dell'asse z

$\Rightarrow$ l'equazione descrive una superficie di
rotazione attorno all'asse z

$\Rightarrow$ basta distinguere nel piano xz
e poi ruotare.

$$z = x^2 + y^2$$



Parché "ellittico"?

$\overline{Z}$

$$ZW = x^2 + y^2$$

$$x = X \quad y = Y$$

$$z = W + Z \quad w = W - Z$$



$$(W + Z)(W - Z) = X^2 + Y^2$$

$$W^2 - Z^2 = X^2 + Y^2$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = W^2 \quad (\text{ellissoide proiettivo})$$

}

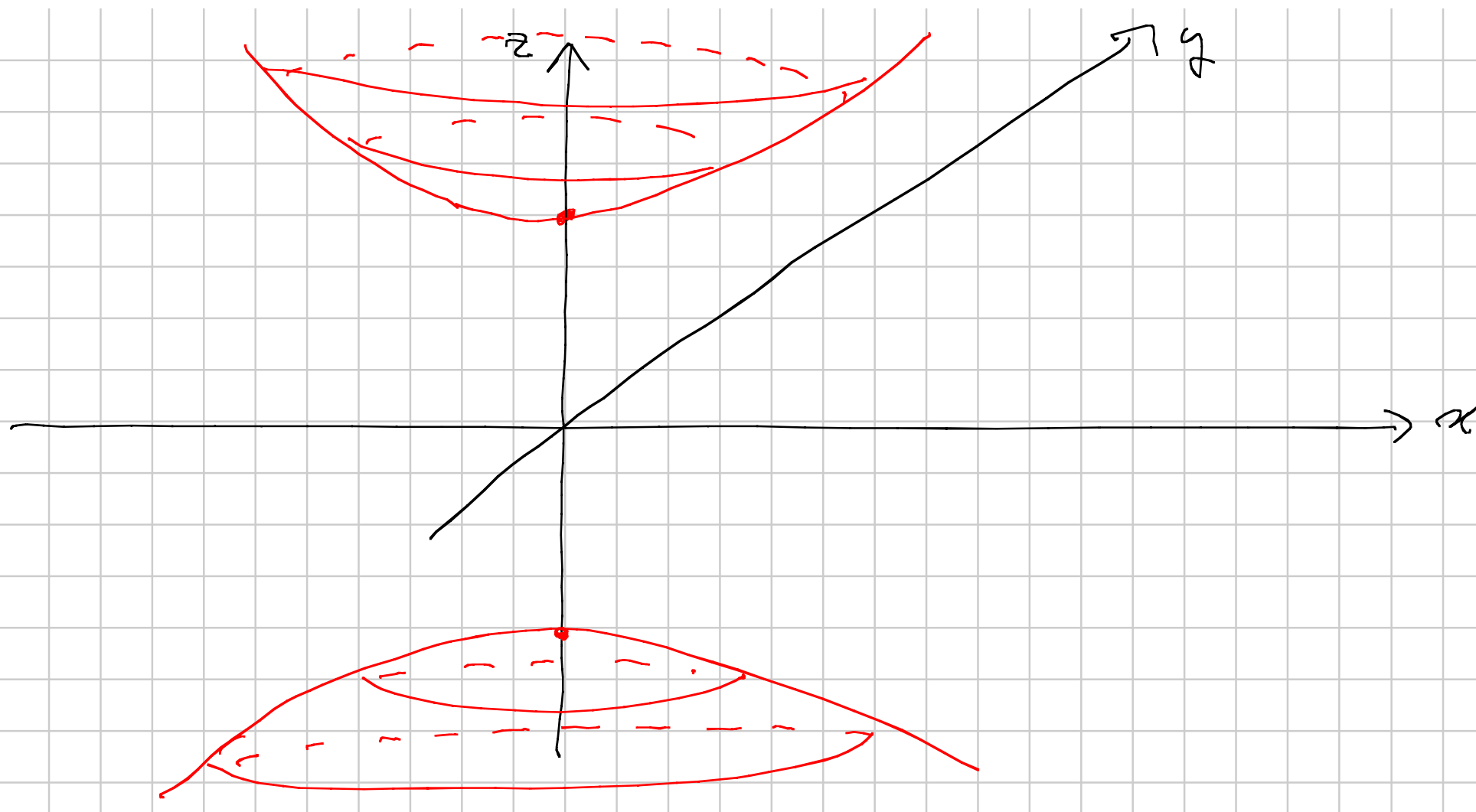
↙

ottenendo $W=1$ da cui
l'ellissoide

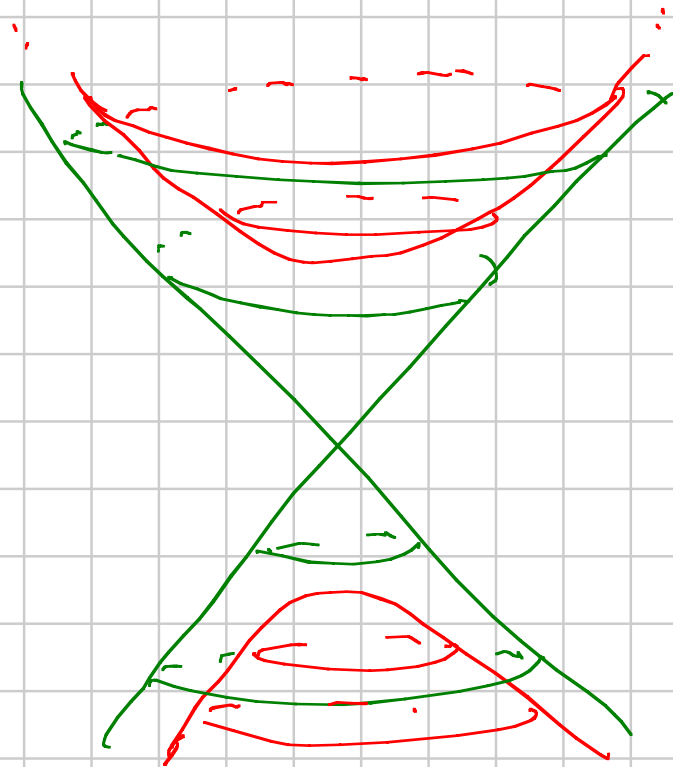
4) iperboloide ellittico (a due folde)

$$Z^2 = 1 + x^2 + y^2$$

è una superficie di
rotazione intorno all'asse Z :



superficie di rotaz. dell'ipobolo
intorno all'asse principale

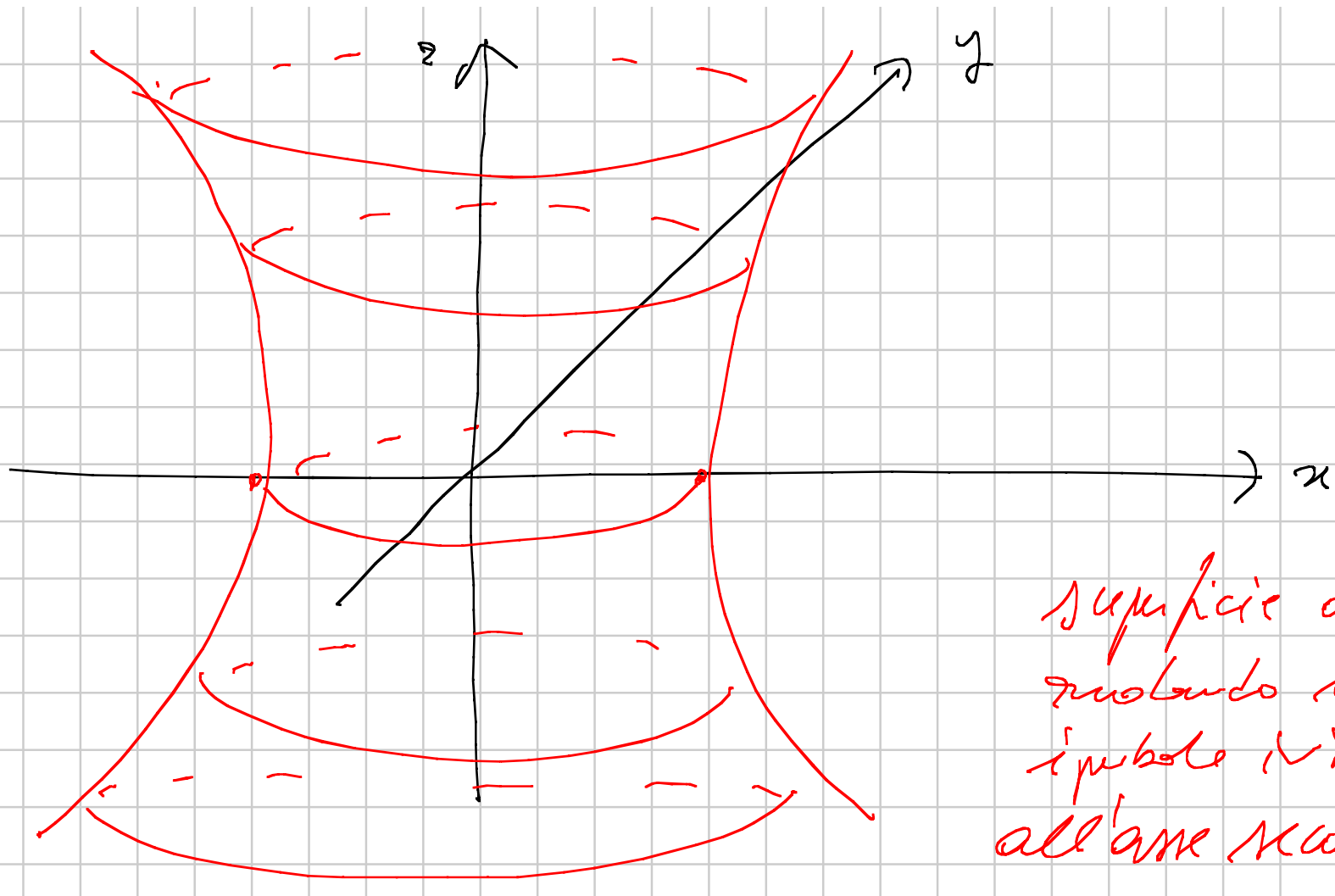


L_{∞} : $z^2 = w^2 + x^2 + y^2$ ellissoide positivo
(da cui "ellittico")

5) iperboloide iperbolico (a una foglia)

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1$$

superficie di rotazione
intorno all'asse z

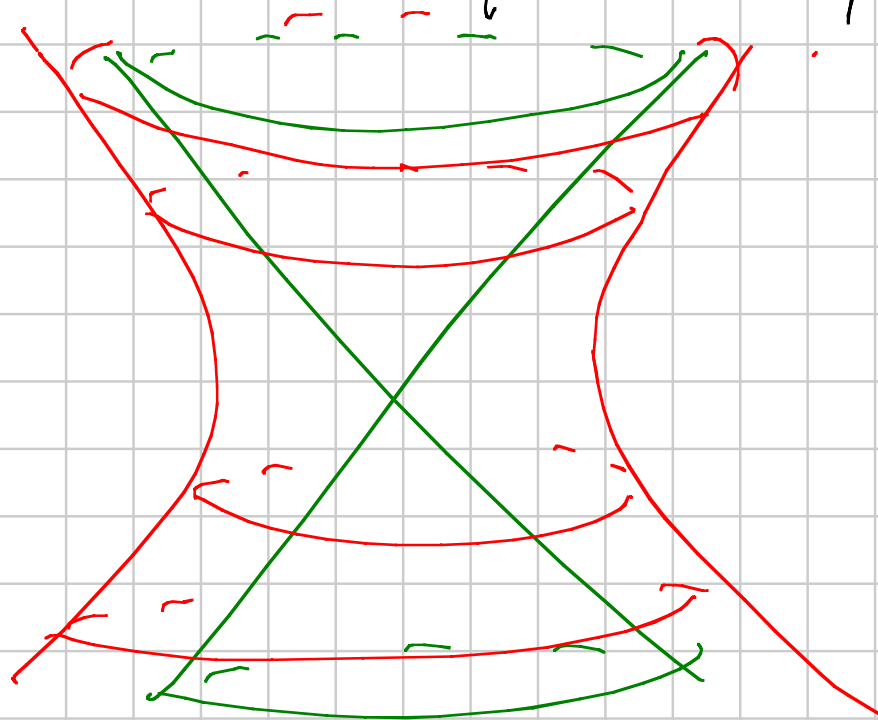


superficie ottenuta
ruotando una
iperbole intorno
all'asse z condanno

"iperbolico"

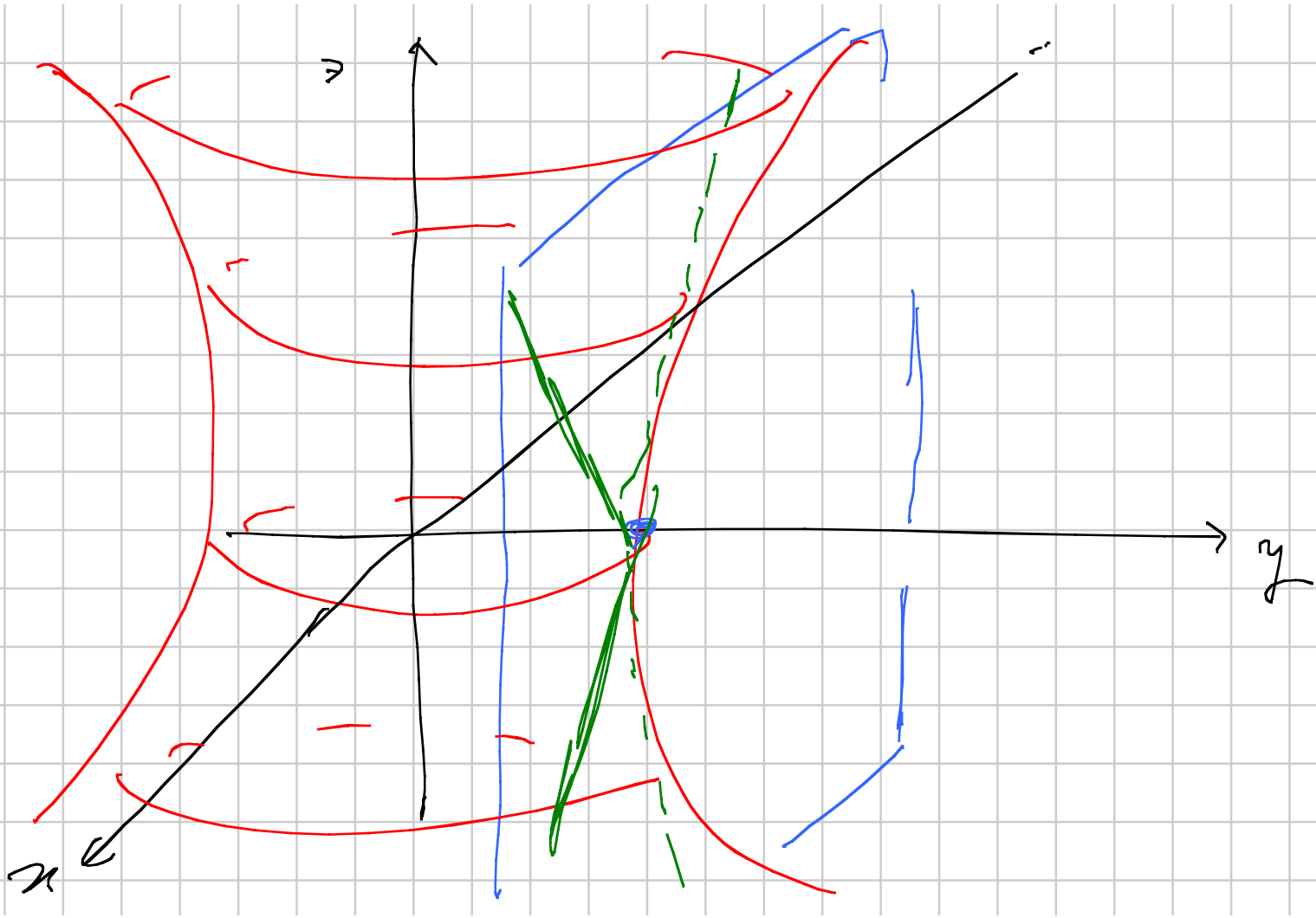
$$L_{\infty}: x^2 + y^2 = z^2 + w^2$$

iperboloide iperbolico.

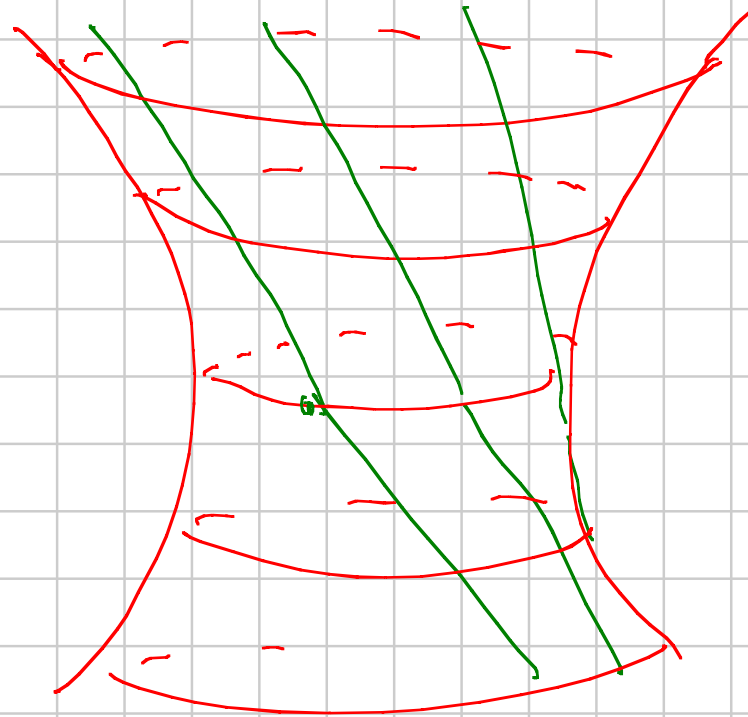


Iperb. iperb: $x^2 + y^2 = 1 + z^2$

Interseco con il piano $y=1$: $x^2 + 1 = 1 + z^2$
 $\leadsto x^2 = z^2 \leadsto x = \pm z$
due rette



ma è superficie di rotazione: contiene anche
tutte le altre motopie delle due viti:



Esercizio

Cercare su WW

⇒ l'iperb. iperbolico è generato dalle rotazione
di una retta π intorno ad una retta α
sggerendo con α :

