Geometria 3/3/17

V sp. vett. con prod scol. $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

$\| v \| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$; $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$.

<u>Def</u>: distanza associata a $\langle \cdot | \cdot \rangle$

$$d(v, w) = \| v - w \| .$$

<u>Proprietà</u>: 1) $d(v, w) \geq 0$; nulla solo se $w = v$

2) $d(v,w) = d(w,v)$

3) $d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$

Infatti:

1) $\|v-w\| \geq 0$ nulla solo se $v-w=0$

2) $\|w-v\| = \|v-w\|$

3) $\|v-w\| = \|(v-u)+(u-w)\|$

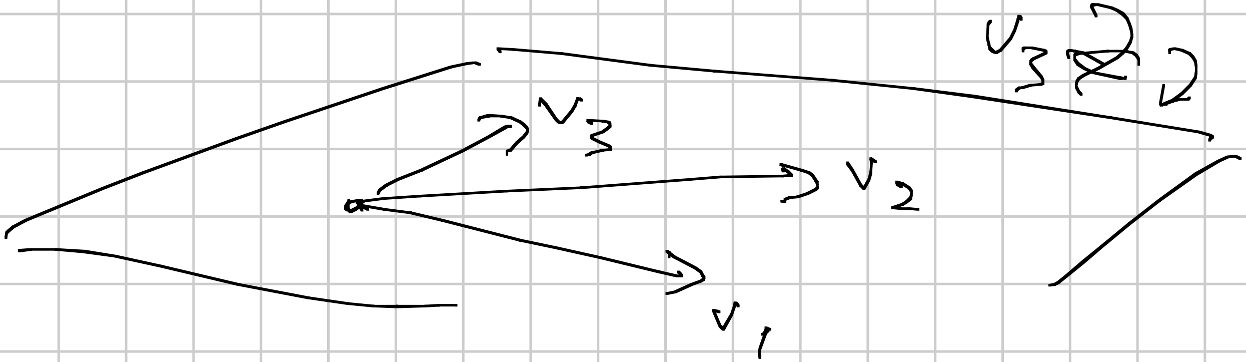
$\leq \|v-u\| + \|u-w\|$.

Def: dico v, w ortogonali tra loro, $v \perp w$, se
$$\langle v | w \rangle = 0 .$$
Chiamo $v_1, \dots, v_k$ sistema ortogonale se
$$\langle v_i | v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j ;$$
lo chiamo ortonormale se inoltre
$$\| v_i \| = 1 \quad \forall i .$$

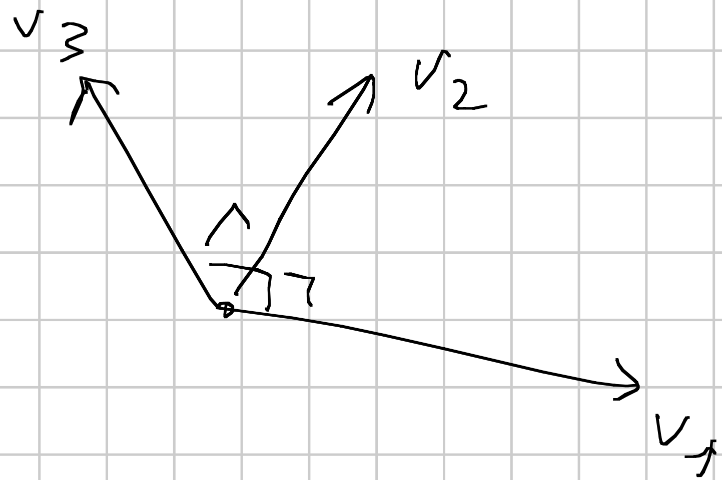
Prop: un sistema di vett. ortog. non nulli è lin. indip.

Oss: senza sapere l'ortogonalità, verificare l'indip. lineare richiede soluz. sistema.

Su $\mathbb{R}^3$:



Es ortog:



Dim: siano $v_1, \dots, v_k$ ortog. non nulli e prendiamo $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$. Allora:

$$0 = \langle 0 \mid v_i \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid v_i \rangle$$

$$= \lambda_1 \underbrace{\langle v_1 \mid v_i \rangle} + \dots + \lambda_k \underbrace{\langle v_k \mid v_i \rangle}$$

tutti nulli
tranne $\langle v_i \mid v_i \rangle$

uso $\perp$

$$= \lambda_i \cdot \|v_i\|^2 \quad \text{ma} \quad \|v_i\|^2 \neq 0$$

uso $v_i \neq 0$

$$\Longrightarrow \lambda_i = 0.$$

$\blacksquare$

Prop: se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è base ortogonale di V
allora $\forall v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\| v_i \|^2} \cdot v_i$$

cioè $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle v | v_1 \rangle / \| v_1 \|^2 \\ \vdots \\ \langle v | v_n \rangle / \| v_n \|^2 \end{pmatrix}$.

Oss: (1) Calcolare $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B}$ ortog richiede solo un calcolo, non la soluz. di un sistema.

(2) Se in una $\mathcal{B}$ ortogonale cambio alcuni vettori (mantenendola ortogonale) le coord rispetto a quelli non cambiati sono le stesse: la i-esima coord. di v è $\langle v | v_i \rangle / \|v_i\|^2$. Falso se

non ho $\mathcal{B}$ ortog.

<u>Es</u>: $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ \pi \\ e \end{pmatrix} \right)$

$\left[\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$ devo risolvere 3×3

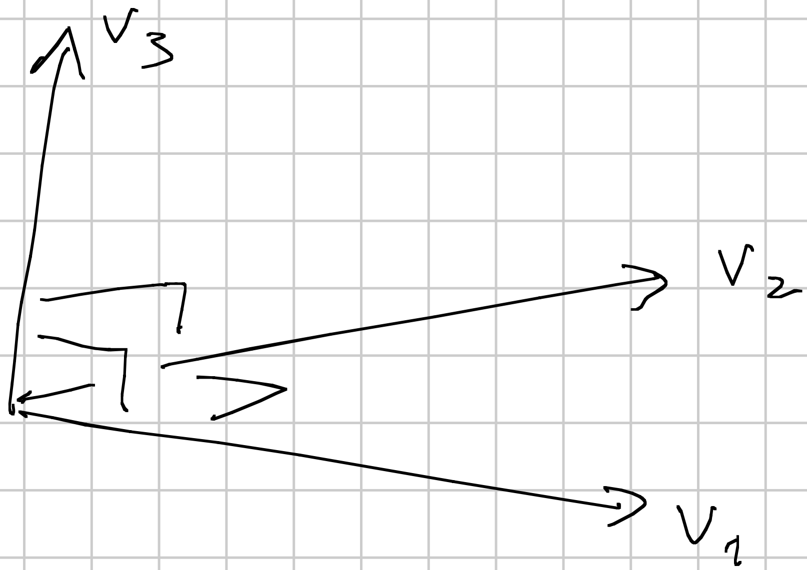
$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \\ \sqrt{19} \end{pmatrix} \right)$

$\left[\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} *' \\ * \\ * \end{pmatrix}$ tutti diversi da prima.

Lem: se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è base ortogonale di V

e $w \in V$, $w \perp v_i$ $i = 1 \dots n$ allora $w = 0$.

Es:



Dim: poiché $\mathcal{B}$ è base ho $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

So che $\langle w | v_i \rangle = 0$

$$\langle w | v_i \rangle = 0$$
$$\|$$
$$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n | v_i \rangle$$
$$\|$$
$$\alpha_i \cdot \|v_i\|^2 \quad \text{ma } v_i \neq 0$$
$$\Longrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$$
$$\Longrightarrow w = 0. \quad \blacksquare$$

<u>Dimo:</u> $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base ortog.

Devo vedere che

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i \,,$$

cioè che $v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i = 0$.

Per il lemma basta verificare che esso è $\perp$ a ogni v_j.

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i \,\middle|\, v_j \right\rangle$$

$$= \langle v | v_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot \underbrace{\langle v_i | v_j \rangle}_{}$$

risulta sempre 0 tranne che per $i = j$

$$= \langle v | v_j \rangle - \frac{\langle v | v_j \rangle}{\cancel{\|v_j\|^2}} \cdot \cancel{\langle v_j | v_j \rangle} = 0 .$$

Es: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Sono 3 vett. ortog $\neq 0$ in $\mathbb{R}^3$

$\Longrightarrow$ sono lin. indip. $\Longrightarrow$ sono base $\mathcal{B}$

$$\left[\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (7-6-15)/(1+9+25) \\ (-7-4+3)/(1+4+1) \\ (91-8+15)/(169+16+25) \end{pmatrix}.$$

Q: come ottenere basi ortogonali? ortonormali?

A: processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:

<u>Teo</u>: se $v_1, \dots, v_n$ è base di V con $\langle . | . \rangle$ il seguente procedimento fornisce una base $w_1, \dots, w_n$ ortonormale di V:

- $$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$ $\left(u \rightsquigarrow u/\|u\| \ \underline{\text{normalizzazione}} \right)$

- $$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2 | w_1 \rangle w_1$$

  $$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}$$

- $$\tilde{w}_3 = v_3 - \langle v_3 | w_1 \rangle \cdot w_1 - \langle v_3 | w_2 \rangle \cdot w_2$$

  $$w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|}$$

În general, construiți $w_1, \dots, w_k$

$$\cdot \quad \tilde{w}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1} | w_i \rangle \cdot w_i$$

$$w_{k+1} = \frac{\tilde{w}_{k+1}}{\| \tilde{w}_{k+1} \|} .$$

ES :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ +2 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{1+4+9}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2+10+3}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 28 - 15 \\ 70 - 30 \\ -14 + 45 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 \\ 40 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{\cancel{\frac{1}{14}} \begin{pmatrix} 13 \\ 40 \\ 31 \end{pmatrix}}{\left\| \cancel{\frac{1}{14}} \begin{pmatrix} 13 \\ 40 \\ 31 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{169 + 1600 + 961}} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 40 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{1}{169 + 1600 + 961} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 13 \\ 40 \\ 31 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 40 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|}.$$

<u>Vedremo</u> come ottenere w_3 con calcoli molto più facili.