Geometria 2/3/17

$f : V \times V \to \mathbb{R}$

f bil. se f è lin a sin e a dx

f simm se $f(w,v) = f(v,w)$

f def pos $f(v,v) > 0 \quad \forall v \neq 0$

f prod. scal se bil, simm, def pos.

$V = \mathbb{R}^n \qquad A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$\langle x | y \rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot y$$

Visto: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ sempre bilineare.

<u>Prop</u>: tutte le appl. bil. su $\mathbb{R}^n$ sono del tipo $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ per $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Dim: : data $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bil. cerco A t.c. $f = \langle \cdot | \cdot \rangle_A$. Pongo:

$$a_{ij} = f(e_i, e_j) \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}.$$

Ora: $f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$

$$\underset{\text{lin sin}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right).$$

$$\underset{dx}{\overset{=}{\text{lin}}} \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} y_j \, f(e_i, e_j)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_i \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot y_j}_{(A \cdot y)_i}}_{{}^t x \cdot A \cdot y} = \langle x | y \rangle_A .$$

$\boxtimes$

Abbiamo: le appl. bil. su $\mathbb{R}^n$ sono quelle del tipo $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$.

Prop: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è simm. $\Longleftrightarrow$ A è simm.

Dim: $\Longrightarrow$

$$\begin{array}{c} \langle e_i | e_j \rangle_A = a_{ij} \\ \| \\ \langle e_j | e_i \rangle_A = a_{ji} \end{array}$$

✓

$\Leftarrow$

$$\langle x | y \rangle_A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$$

$$\langle y | x \rangle_A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_j a_{ji} x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ji} y_j$$

$\Rightarrow$ poiché A è simm sono uguali. $\boxtimes$

<u>Es</u>: $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 7x_1y_1 - 4x_1y_2 + 5x_2y_1 + 9x_2y_2$$

$$f = \langle \cdot | \cdot \rangle_A \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

NON SIMM

$$(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 7x_1y_1 - 4x_1y_2 + 5x_2y_1 + 9x_2y_2$$

$\underline{Es}$: $f(x,y) = \pi x_1 y_1 - 11 x_1 y_2 - 11 x_2 y_1 + \sqrt{3}\, x_2 y_2$

$$f = \langle \cdot | \cdot \rangle_A \qquad A = \begin{pmatrix} \pi & -11 \\ -11 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

SIMM

Q: per quali A simm si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def pos?

<u>Oss</u> (1) Se $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos. allora

$a_{ii} > 0 \quad \forall i$ infatti

$$a_{ii} = \langle e_i | e_i \rangle_A .$$

(2) Se A è diagonale allora

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos $\Leftrightarrow$ $a_{ii} > 0$, $i = 1 \dots n$

$$\langle x | x \rangle_A = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 .$$

Si può vedere come ieri:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$ è def. pos:

$$\langle x | x \rangle_A = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 3x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$ non è def pos

$\langle x|x\rangle_A = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + 7x_2^2$ neg per $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Oss (3): se $A = {}^tM \cdot M$ con M invertibile

allora $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.:

$\langle x|x\rangle_A = {}^tx \cdot A \cdot x = ({}^tx \cdot {}^tM) \cdot (M \cdot x)$

$= {}^t(M \cdot x) \cdot (M \cdot x) = \|M \cdot x\|^2_{\mathbb{R}^n} > 0$

se $M \cdot x \neq 0$, cioè se $x \neq 0$.

Caso generale per $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è def. pos.: più avanti.

Fisso V sp. vett. reale e $\langle\cdot|\cdot\rangle$ un prodotto scalare su V.

Def: chiamo norma associata al $\langle\cdot|\cdot\rangle$

$$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R} \qquad \|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$$

(la radice ≥ 0).

__Oss__: $\|v\| > 0$ per $v \neq 0$; $\|0\| = 0$

$\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

infatti $\|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda v | \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle v | v \rangle}$

$= |\lambda| \cdot \|v\|$.

__Prop__ (disug. di Cauchy-Schwartz):

$$|\langle v | w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

e l'= vale solo se v, w sono lin. dip.

<u>Dim</u>: se sono lin. dip. ad es $w = \lambda \cdot v$

$$|\langle v|w\rangle| = |\langle \lambda v|v\rangle| = |\lambda| \cdot \|v\|^2$$

$$\|v\| \cdot \|w\| = \|v\| \cdot \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|^2$$

Supponiamo che v, w siano lin. indip; ne segue che $t \cdot v + w \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$; dunque $\|t \cdot v + w\|^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Ma:

$$\|t\cdot v+w\|^2 = \langle tv+w \mid tv+w\rangle$$

$$\underset{\text{lin sin}}{=} t\,\langle v \mid tv+w\rangle + \langle w \mid tv+w\rangle$$

$$\underset{\text{lin dx}}{=} t^2\langle v\mid v\rangle + t\,\langle v\mid w\rangle + t\,\langle w\mid v\rangle + \langle w\mid w\rangle$$

$$= \|v\|^2\cdot t^2 + 2\langle v\mid w\rangle t + \|w\|^2$$

Sappiamo: è > 0 $\forall t\in\mathbb{R}$, dunque $\Delta/4 < 0$

cioè $\Delta/4 = \langle v|w\rangle^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 < 0$

$$\langle v|w\rangle^2 < \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$|\langle v|w\rangle| < \|v\| \cdot \|w\| .$$

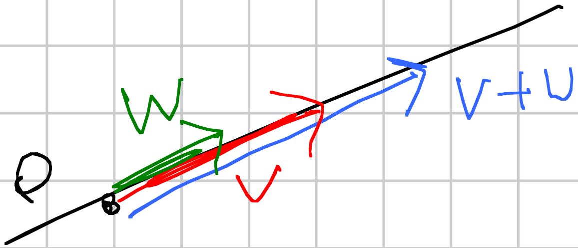
$\boxed{///}$

<u>Teo</u> (disuguglianza triangolare):

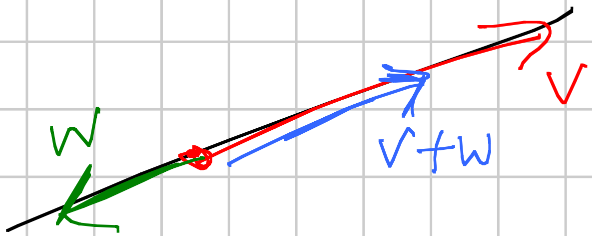
$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

e = vale se e solo se uno dei due
e λ volte l'altro con $\lambda \geq 0$.

Dim: caso lin. dip.:



$\|v+w\| = \|v\| + \|w\|$



$\|v+w\| < \|v\| + \|w\|$.

Caso lin. indip:

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w | v+w \rangle$$

$$= \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2$$

$$\leq \|v\|^2 + 2\,|\langle v|w\rangle| + \|w\|^2$$

$$\underset{C-S}{<} \|v\|^2 + 2\,\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.$$

$\blacksquare$

9.1.1 (a)

$V = \mathbb{R}_{\leq 1}[t]$

$$f(p(t), q(t)) = 5(p(1) - 2p(-2)) \cdot (q(1) - 2q(-2)) + 3(p(2) + 7p(-1)) \cdot (q(2) - 7q(-1))$$

<u>bil</u>: sì perché la valutaz. di un pol. in un pto è lin!

simm: sì

def. pos: $f(p(t), p(t)) =$

$$= 5\left(p(1) - 2p(-2)\right)^2 + 3\left(p(2) + 7p(-1)\right)^2$$

è sempre ≥ 0; se fa 0 ho

$$\begin{cases} p(1) - 2p(-2) = 0 \\ p(2) + 7p(-1) = 0 \end{cases}$$

Se $p(t) = a_0 + t a_1$ ho

$$\begin{cases} a_0 + a_1 - 2(a_0 - 2a_1) = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 7(a_0 - a_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_0 + 5a_1 = 0 \\ 8a_0 - 5a_1 = 0 \end{cases}$$

unica soluz $a_0 = a_1 = 0$

dunque viene 0 solo per $p(t) = 0$.

✓

(b) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

$f : V \times V \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = -x_2 y_1 - 2x_3 y_1 - 3x_1 y_1 - 3x_1 y_3 + 5x_1 y_2 + 5x_3 y_2$$

<u>bil</u> : sì

<u>simm</u> ? Se considero $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) = -x_2y_1 - 2x_3y_1 - 3x_1y_1 - 3x_1y_3 + 5x_1y_2 + 5x_3y_2$$

$$g = \langle \cdot | \cdot \rangle_A \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

poiché A non è simm, g non è simm.

Invece:

$$f(x,y) = -x_2y_1 - 2x_3y_1 - 3x_1y_1 - 3x_1y_3 + 5x_1y_2 + 5x_3y_2$$

su V che ha equazione $x_2 = x_1 + x_3$; su

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1+x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1+y_3 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = -(x_1+x_3)y_1 - 2x_3y_1 - 3x_1y_1 - 3x_1y_3 + 5x_1(y_1+y_3) + 5x_3(y_1+y_3)$$

$$= -x_1y_1 - x_3y_1 - 3x_1y_3 + 5x_3y_3$$
$$-3x_1y_1 - 2x_3y_1 + 5x_1y_3$$
$$+5x_1y_1 + 5x_3y_1$$

$$= x_1y_1 + 2x_3y_1 + 2x_1y_3 + 5x_3y_3$$

$\Longrightarrow$ $\bar{n}$, simm.

def:pos: $f(x,x) = x_1^2 + 4x_1x_3 + 5x_3^2$

$$= (x_1 + 2x_3)^2 + x_3^2 \quad \checkmark$$

(c) $V = \mathcal{F}(\{a,b\}, \mathbb{R})$

$$f(u,v) = 2u(a)\cdot v(a) - 7u(a)v(b) - 7u(b)\cdot v(a) + 25u(b)\cdot v(b).$$

Sappiamo che $\mathcal{F}(\{a,b\}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$u \longmapsto \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix}$$

è lineare bijettiva.

Tramite essa la f corrisponde alla

$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{data da}$$

$$g(x, y) = 2x_1y_1 - 7x_1y_2 - 7x_2y_1 + 25x_2y_2$$

cioè $g = \langle \cdot | \cdot \rangle_A \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 25 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ è bil. simm.

def. pos? $\quad 2x_1^2 - 14x_1x_2 + 25x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$?

(per casa: farlo in modo artigianale).

Ese 9.1.5(g): Stabilire per quali

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.

Voglio che $\quad a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$ sia > 0

per ogni $x \neq 0$. Certamente devo avere $a > 0$ e $c > 0$.
Se ho $a > 0$ certamente l'espressione è > 0
per $x_2 = 0$; basta controllare per $x_2 \neq 0$,
ma in tal caso

$$a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 > 0 \quad \forall x \quad \text{con } x_2 \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2}{x_2^2} > 0 \quad \forall x \quad \text{con } x_2 \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + c > 0 \quad \forall x \text{ con } x_2 \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad at^2 + 2bt + c > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Delta/4 < 0 \Longleftrightarrow b^2 - ac < 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad ac - b^2 > 0$$

ma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$; conclusione :

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$; $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.

$\iff a > 0$ e $\det(A) > 0$

Oss: sapendo che $\det(A) > 0$ ho

$a > 0 \iff c > 0$

Es: stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$

con $A = \begin{pmatrix} k-2 & k \\ k & 3 \end{pmatrix}$ sia def. pos.

Poichè $(A)_{22} = 3 > 0$ la $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos

$\Longleftrightarrow \det(A) > 0$

$\Longleftrightarrow \quad 3k - 6 - k^2 > 0 \Longleftrightarrow k^2 - 3k + 6 < 0$.

mai

9.1.2 $\quad C^0([0,1],\mathbb{R}) \qquad \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$

$S(t) = \sin(2\pi t) \qquad C(t) = \cos(2\pi t)$

Verifico $S \perp C$:

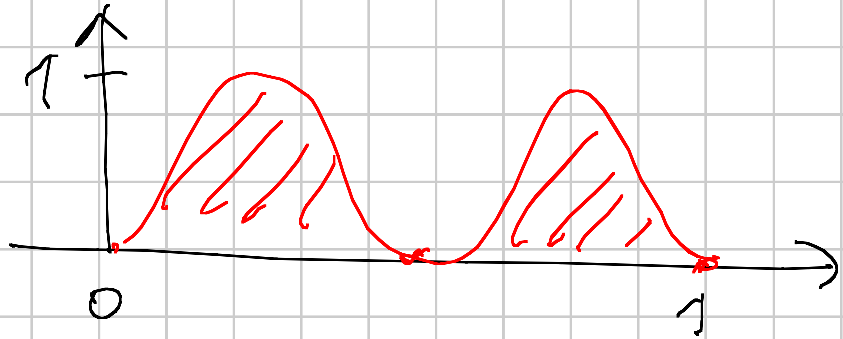
$$\langle S | C \rangle = \int_0^1 \sin(2\pi t) \cdot \cos(2\pi t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(4\pi t)\, dt$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi} \cos(4\pi t) \Big|_0^1 = 0 \checkmark$$

Verifico che $\|S\| = \|C\|$ e la trovo:

$$\|S\|^2 = \int_0^1 \sin^2(2\pi t)\,dt$$



$$\|C\|^2 = \int_0^1 \cos^2(2\pi t)\,dt$$

$$\Rightarrow \|S\| = \|C\|$$

$$\|S\|^2 + \|C\|^2 = \int_0^1 \sin^2(\ ) + \cos^2(\ ) = \int_0^1 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \|S\| = \|C\| = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$