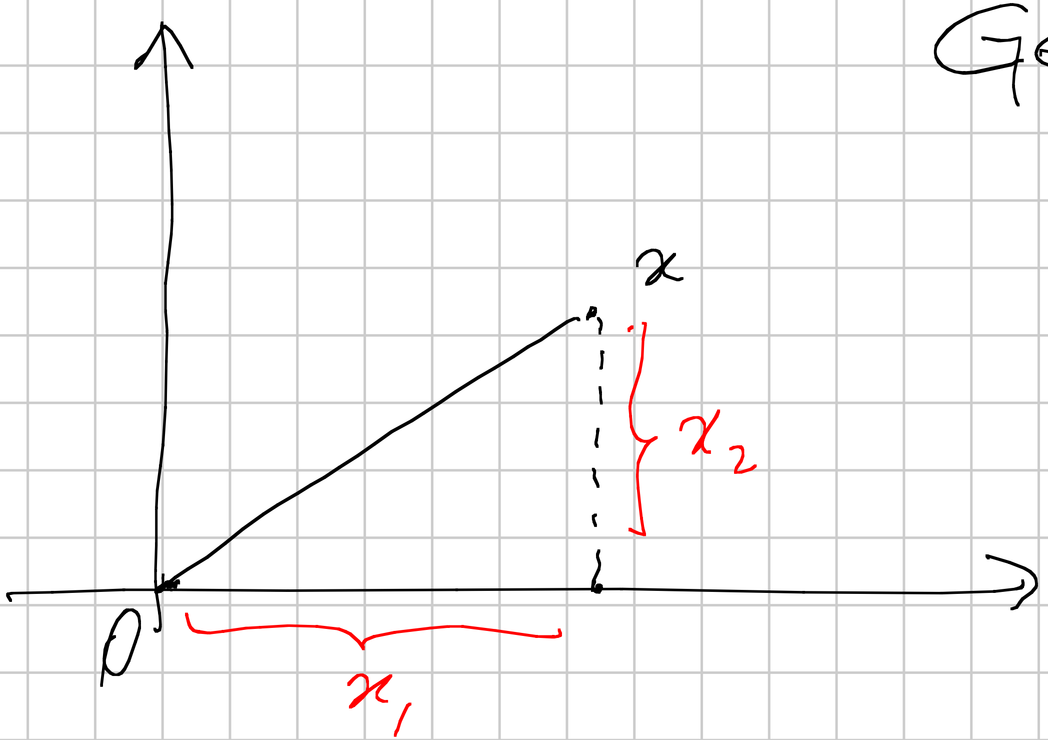
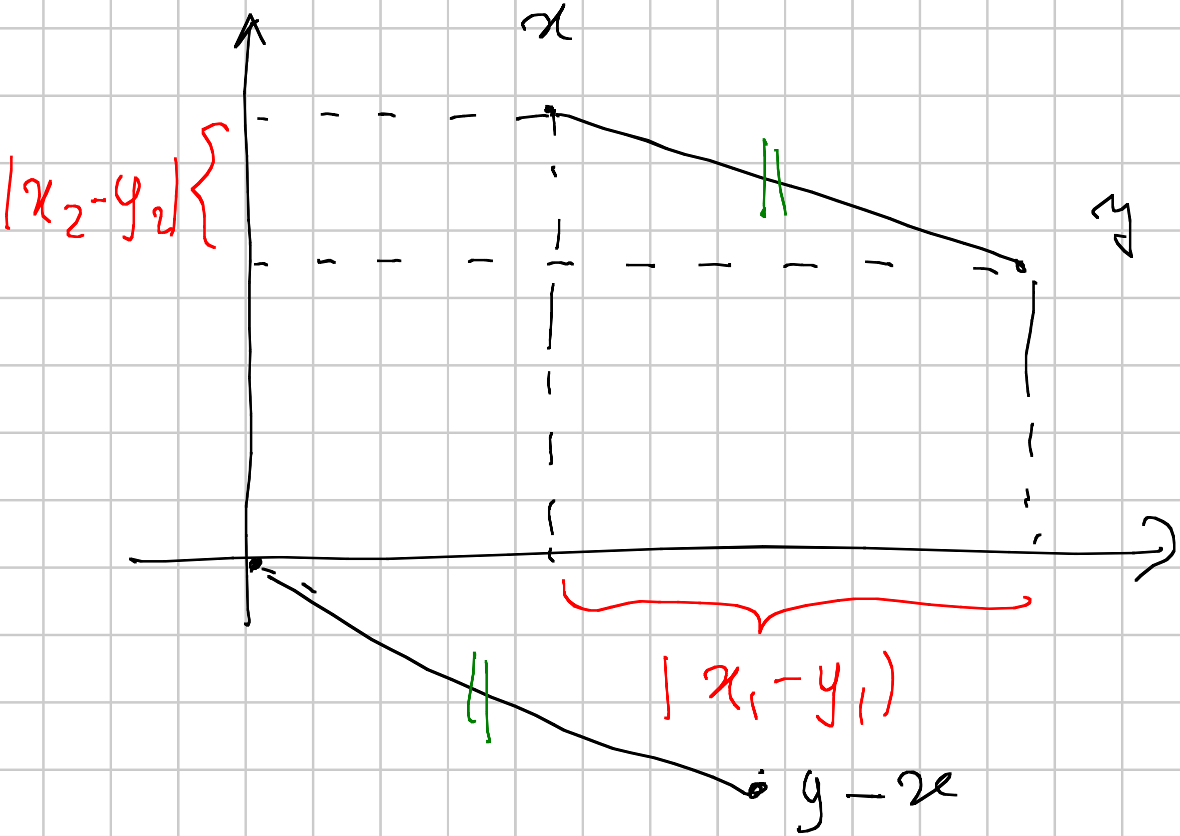
Geometria 1/3/17

Geometria euclidea



$$d(0,x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

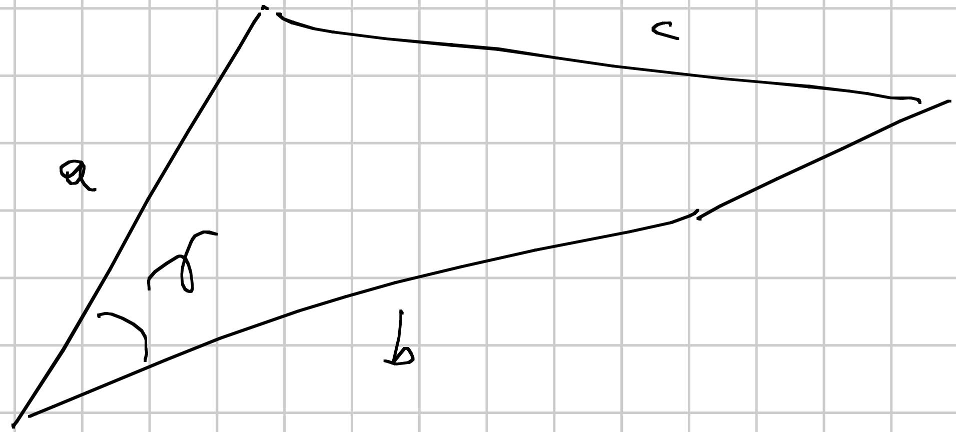


$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

$$= d(0,y-x)$$

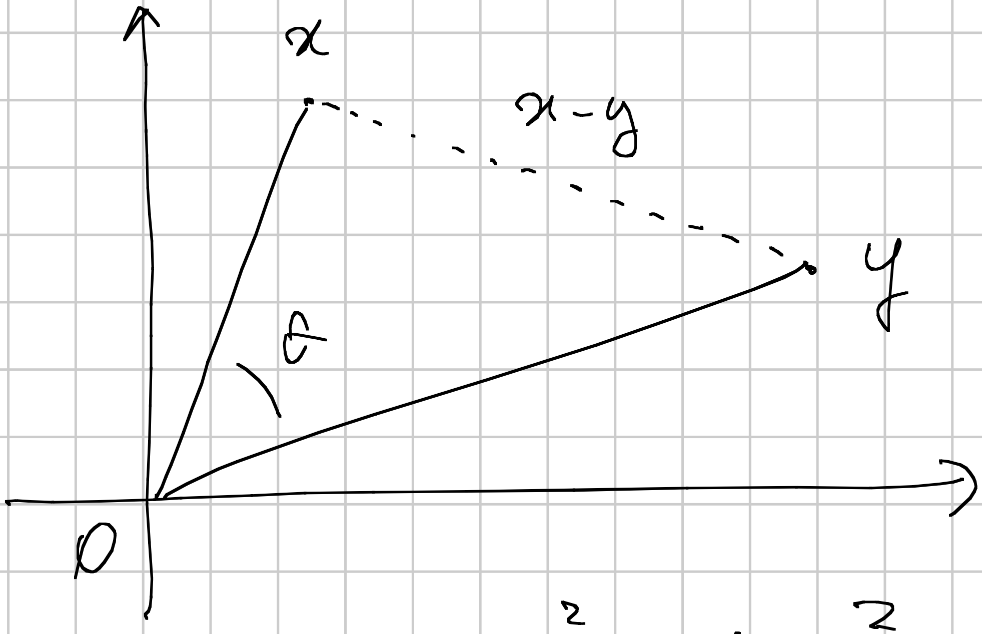
$$= d(0,x-y)$$

Angoli:



Carnot:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$



$$\cos(\theta) = \frac{d(0,x)^2 + d(0,y)^2 - d(x,y)^2}{2 \cdot d(0,x) \cdot d(0,y)}$$

$$= \frac{(x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) - ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

$$= \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

Oss: $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 \Big|_{y=x}$

<u>Def</u>: Chiamo prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \langle x \mid y \rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

dove $\langle x \mid y \rangle_{\mathbb{R}^2} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$.

(Funzione di <u>due</u> argomenti vettori e valori scalari.)

"standard" perché ce ne sono altri.

Def: norma associata al prodotto scalare standard

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

dove $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^2}}$

(cioè $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$).

Visto: nel piano $\mathbb{R}^2$ euclideo:

$d(0,x) = \|x\|_{\mathbb{R}^2}$, $d(x,y) = \|x-y\|_{\mathbb{R}^2}$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|x\|_{\mathbb{R}^2} \cdot \|y\|_{\mathbb{R}^2}}$$

θ = angolo in 0 tra x e y

(per $x, y \neq 0$ ho $\|x\|, \|y\| \neq 0$).

<u>Oss</u>: $x \perp y \iff \langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0$.

Def: chiamo prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$

$$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x \,|\, y \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

dove

$$\langle x \,|\, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$= \underset{1 \times n}{(x_1, x_2 \;\dots\; x_n)} \cdot \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

$$= {}^t x \cdot y$$

Cas spécial : $d(0, x) = \|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n}}$

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|y\|_{\mathbb{R}^n}}.$$

Es: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\|x\|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30} = d(0,x)$$

$$d(x,y) = \|x-y\|_{\mathbb{R}^3} = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{1+81+16} = \sqrt{98}$$

$$= 7\sqrt{2}.$$

Def: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Chiamo un'applicazione

$$f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

- bilineare se è lineare in ciascun argomento fissato l'altro, cioè $\forall v_1, v_2, w \in V$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 f(v_1, w) + \lambda_2 f(v_2, w)$$ lin a sin

$$f(w, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(w, v_1) + \lambda_2 f(w, v_2)$$ lin a dx

- simmetrica se $f(v,w) = f(w,v) \quad \forall v,w \in V$
- definita positiva se $f(v,v) > 0 \quad \forall v \neq 0$
- prodotto scalare se è bilineare, simmetrica e definita positiva.

Prop: $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ dato da $\langle x|y \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t x \cdot y$ è un prod. scal, cioè è bil, simm, def. pos.

Dim: bil: sx: $\langle \lambda x + \mu y | z \rangle_{\mathbb{R}^n} \overset{?}{=} \lambda \langle x | z \rangle_{\mathbb{R}^n} + \mu \langle y | z \rangle_{\mathbb{R}^n}$

$$\begin{aligned} &\langle \lambda x + \mu y | z \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t(\lambda x + \mu y) \cdot z = (\lambda \cdot {}^t x + \mu \cdot {}^t y) \cdot z \\ &\lambda \langle x | z \rangle_{\mathbb{R}^n} + \mu \langle y | z \rangle_{\mathbb{R}^n} = \lambda \cdot {}^t x \cdot z + \mu \cdot {}^t y \cdot z \end{aligned}$$

quindi: prodotto righe x col. è lin a sx

dx: $\langle x | \lambda y + \mu z \rangle_{\mathbb{R}^n} \overset{?}{=} \lambda \langle x | y \rangle + \mu \langle x | z \rangle$

$$ {}^t x \cdot (\lambda y + \mu z) = \lambda \cdot {}^t x \cdot y + \mu \cdot {}^t x \cdot z $$

quindi perchè il prodotto righe x col è lin a dx

simm :

$$ \langle y | x \rangle_{\mathbb{R}^n} \overset{?}{=} \langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x, y $$

$y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_m x_m$ $\qquad$ $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m$

égaux : $x_j \cdot y_j = y_j \cdot x_j$

o Autre :

$${}^t y \cdot x \overset{?}{=} {}^t x \cdot y$$

$$\|$$

$${}^t({}^t y \cdot x) = {}^t x \cdot {}^t({}^t y) = {}^t x \cdot y$$

<u>OK</u>

Dimostrazione: In generale $\; {}^t\underbrace{\big(\underbrace{A}_{m\times n}\cdot\underbrace{B}_{n\times p}\big)}_{\substack{m\times p\\ \\ p\times m}} = \underbrace{\underbrace{{}^tB}_{p\times n}\cdot\underbrace{{}^tA}_{n\times m}}_{p\times m}$

Infatti:

$$\left({}^t(A\cdot B)\right)_{ij} = (A\cdot B)_{ji}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (A)_{jn}\cdot(B)_{ni}$$

e

$$\left((^tB)\cdot(^tA)\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (^tB)_{im}\cdot(^tA)_{mj}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (B)_{mi}\cdot(A)_{jm}$$

<u>OK</u>

<u>def pos</u> : $\langle x|x\rangle_{\mathbb{R}^n} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

è > 0 per $x \neq 0$ poiché ogni

termine è ≥ 0 e dunque non è > 0. $\blacksquare$

Es: su $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x_1^2 y_2 + x_2 y_1^3$

non è lin. a dx né a sin

Es: su $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 7x_1y_1 + 2x_1y_2 - 5x_2y_1 + 4x_2y_2$

bilineare OK

simm.?

$$\cancel{7y_1x_1} + 2y_1x_2 - 5y_2x_1 + \cancel{4y_2x_2}$$

$$\overset{?}{=} \quad \cancel{7x_1y_1} + 2x_1y_2 - 5x_2y_1 + \cancel{4x_2y_2}$$

$\rightarrow$ probabilmente no

$$x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = 2 \qquad f(y,x) = -5$$

<u>No</u>

Es: su $\mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y) = 4x_1y_1 - 7x_1y_2 - 7x_2y_1 + 3x_2y_2$

bil ✓

simm ✓

def pos? $\quad f(x,x) > 0 \quad \forall x \neq 0$?

$$4x_1^2 - 14x_1x_2 + 3x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0?$$

No: se $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ viene $-7 < 0$.

Es: su $\mathbb{R}^2$ $f(x,y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$

bil ✓ simm ✓

def. pos. ? $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$?

$$\begin{gathered} 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 \\ \parallel \\ 2x_1^2 + (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 \end{gathered}$$

è somma di 3 quadrati $\Rightarrow \geq 0$

Inoltre è $\neq 0$ per $x \neq 0$.

Es: Cerchiamo la funzione bilineare simm. f

t.c. $f(x,x) = (x_1 - 2x_2)^2 + (3x_1 + 5x_2)^2$

(Supponiamo che ci sia. Chiediamoci se

è def. pos. $f(x,x)$ è certamente ≥ 0.

Se $f(x,x) = 0$ ho $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0.$

Dunque è vero che per $x \neq 0$ si ha sempre

$$f(x,x) > 0. \quad)$$

Calcoliamo f: sappiamo:

$$f(x,x) = 10x_1^2 + 26x_1x_2 + 29x_2^2$$

Calcoliamo $f(x,y) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_1 y_2 + \beta x_2 y_1 + \gamma x_2 y_2$

scegliendo $\alpha = 10$ $\beta = 13$ $\gamma = 29$.

<u>Esempio</u>: $V = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$\langle A | B \rangle = \mathrm{tr}\big(\underbrace{\overset{n\times n}{{}^tA} \cdot \overset{n\times n}{B}}_{n \times n}\big)$$

Verifico che è prod. scal:

$\underline{\text{bil}}$: $\underline{\text{sx}}$ $\quad \langle \lambda A + \mu B | C \rangle \overset{?}{=} \lambda \langle A|C \rangle + \mu \langle B|C \rangle$

$$\langle \lambda A + \mu B | C \rangle \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\left({}^t(\lambda A + \mu B) \cdot C \right)$$

$$\lambda \langle A|C \rangle + \mu \langle B|C \rangle \overset{\text{def}}{=} \lambda \cdot \operatorname{tr}({}^tA \cdot C) + \mu \cdot \operatorname{tr}({}^tB \cdot C)$$

trasp è lin $\longrightarrow$ $=$

$$\operatorname{tr}\left((\lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB) \cdot C \right)$$

prodotto $r \times c$ lin a sx $\longrightarrow$ $=$

$$\operatorname{tr}\left(\lambda\, {}^tA \cdot C + \mu\, {}^tB \cdot C \right)$$

quindi poiché tr è lin

$\underline{\text{dx}}$: uguale

simm:

$$\langle B | A \rangle \overset{?}{=} \langle A | B \rangle$$

$$\operatorname{tr}({}^tB \cdot A) = \operatorname{tr}({}^tA \cdot B)$$

$$= \operatorname{tr}\left({}^t\left({}^tB \cdot A\right)\right)$$

$$= \operatorname{tr}\left({}^tA \cdot {}^t\left({}^tB\right)\right)$$

OK

oppure: $\langle A | B \rangle = tr\left({}^tA \cdot B\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left({}^tA \cdot B\right)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left({}^tA\right)_{ij} \cdot (B)_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (A)_{ji} \cdot (B)_{ji}$$

$\Longrightarrow$ $\langle A | B \rangle$ è uguale al prodotto scalare dei vettori di $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ ottenuti scrivendo le loro colonne una sopra l'altra:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & \pi & e \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 7 & 9 & \sqrt{2} \\ -1 & 44 & 17 \end{pmatrix} \right\rangle_{M_{2\times 3}}$$

$$= 2\cdot 7 + 3\cdot 9 + (-5)\cdot\sqrt{2} + 4\cdot(-1) + \pi\cdot 44 + e\cdot 17$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \\ \pi \\ e \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ 44 \\ 17 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^6}$$

$\Rightarrow$ simm. e def. pos.

infatti: $\langle A|A\rangle = \sum_{i,j} (A)_{ij}^2$

<u>Es</u>: $V = C^0([0,1], \mathbb{R})$ (sp. vett. di dim ∞)

$$\langle x|y\rangle = \int_0^1 x(t)\cdot y(t)\, dt$$

<u>bil:</u> $\langle \lambda x + \mu y \mid z \rangle \overset{?}{=} \lambda \langle x \mid z \rangle + \mu \langle y \mid z \rangle$

$$\langle \lambda x + \mu y \mid z \rangle = \int_0^1 (\lambda x + \mu y)(t) \cdot z(t)\, dt = \int_0^1 \big(\lambda x(t) + \mu y(t)\big) z(t)\, dt = \int_0^1 \big(\lambda x(t) z(t) + \mu \cdot y(t) z(t)\big)\, dt$$

$$\lambda \langle x \mid z \rangle + \mu \langle y \mid z \rangle = \lambda \int_0^1 x(t) z(t)\, dt + \mu \int_0^1 y(t) \cdot z(t)\, dt$$

vyudí
pachí
$\int$ ē lin

<u>Def</u>: se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ pongo

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \langle x | y \rangle_A$$

dove $\langle x | y \rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot y$.

(Fatto: è sempre bilineare.)

La chiamo applicazione bilineare
su $\mathbb{R}^n$ associata ad A.

Verifico la bilinearità:

sin: $\langle \lambda x + \mu y | z \rangle_A \overset{?}{=} \lambda \langle x | z \rangle_A + \mu \langle y | z \rangle_A$

$$\langle \lambda x + \mu y | z \rangle_A = {}^t(\lambda x + \mu y) \cdot A \cdot z$$

$$\lambda \langle x | z \rangle_A + \mu \langle y | z \rangle_A = \lambda \cdot {}^t x \cdot A \cdot z + \mu \, {}^t y \cdot A \cdot z$$

$$\overset{\shortparallel}{(\lambda^t x + \mu^t y)} \cdot A \cdot z$$

equivalenti perchè il prod. RxC è lin. a sin.

dx: analoga.