Alg Lin 28/9/16 I+II

Divisione (euclidea) fra interi:
dati $n, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ esistono unici
$q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < m$ t.c.

$$n = m \cdot q + r$$

dividendo   divisore   quoziente   resto

Diremo: la divisione euclidea $n : m$
ha quoziente q e resto r

Es: $28 : 9$ ha quoz. 3 e resto 1

Prop: n divisibile per 2 e per 3 $\Rightarrow$ divisibile per 6.
Dim: per assurdo: supponiamo n non divisibile per 6, cioè che $n : 6$ ha resto $\neq 0$.

Dunque $n = 6 \cdot q + r$ $\quad 1 \leq r \leq 5$. Ora:

$r = 1 \quad n = 6q + 1 = 2(3q) + 1 = 3(2q) + 1 \Rightarrow n$ non div. né per 2 né per 3

$r = 2 \quad n = 6q + 2 = 3(2q) + 2 \Rightarrow n$ non div per 3

$r = 3 \quad n = 6q + 3 = 2(3q + 1) + 1 \Rightarrow n$ non div per 2

$r = 4 \quad n = 6q + 4 = 3(2q + 1) + 1 \Rightarrow n$ non div. per 3

$r = 5 \quad n = 6q + 5 = 2(3q + 2) + 1 = 3(2q + 1) + 2$

$\Rightarrow$ non div. né per 2 né per 3.

Ho provato che:

NON (n div. per 6) $\Longrightarrow$ NON (n div. per 2) o NON (n div. per 3)

NON (n div. per 2 e per 3).

(Ho provato la contronominale della prop.) $\boxtimes$

Induzione

Per dimostrare un predicato $P(n)$ che riguarda un $n \in \mathbb{N}$ (cioè provare che è vero $\forall n$) basta:

<u>PASSO BASE</u> : dimostrare $P(0)$

<u>PASSO INDUTTIVO</u> : supponendo che $P(n)$ sia vero per un generico $n \geq 0$, provare che è vero anche $P(n+1)$.

<u>ATT</u>: Nel PI <u>non</u> devo dimostrare $P(n)$;

devo prenderlo come ipotesi e usarlo per provare $P(n+1)$.

Perché basta? (informalmente)

$P(0)$: vero, PB

$P(1)$: uso PI per $n=0$: "Se $P(0)$ allora $P(1)$"

dunque $P(1)$ vero

$P(2)$: uso PI per $n=1$: "Se $P(1)$ allora $P(2)$"

dunque $P(2)$ vero

etc ... $P(n)$ vero $\forall n$

Prop: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dim: $P(n) =$ "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$".

Lo provo per induzione su n.

PB: $\mathcal{P}(0) =$ " $\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0(0+1)}{2}$ "

vera (entrambi i membri sono 0)

PI: Suppongo: $\mathcal{P}(n) =$ " $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ".

Devo verificare

$\mathcal{P}(n+1) =$ " $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ "

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

OK! $\square$

Prop: a, b, c terna pitagorica

$\Longrightarrow$ a o b sono pari.

Dimo: per assurdo suppongo a, b dispari, cioè

$a=2h+1$, $b=2k+1$. Ipotesi: $a^2+b^2=c^2$;

sostituisco

$$c^2=(2h+1)^2+(2k+1)^2=4(h^2+h+k^2+k)+2$$

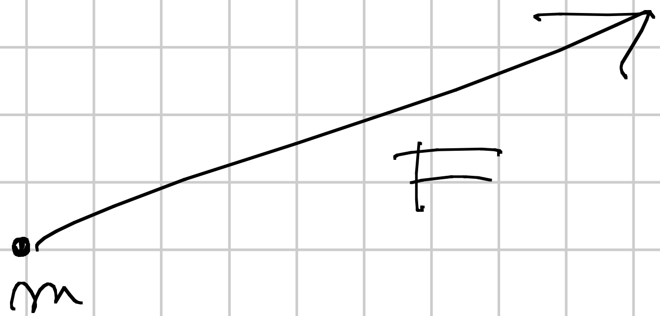
$\Longrightarrow$ $c^2:4$ ha resto 2. Ora però

c
- pari $\Rightarrow c=2l \Rightarrow c^2=4l^2 \Rightarrow$ $c^2:4$ ha resto 0
- dispari $\Rightarrow c=2l+1 \Rightarrow c^2=4(l^2+l)+1 \Rightarrow$ $c^2:4$ ha resto 1

I fatti quelli sono in contraddizione. $\boxed{////}$

— o —

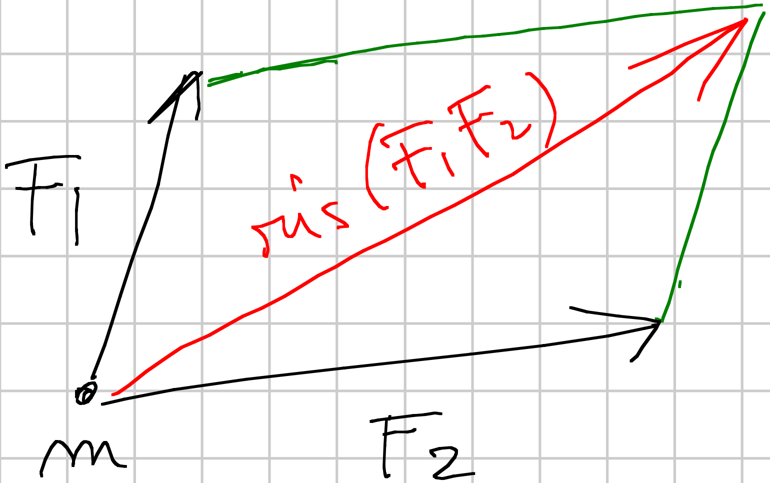
Forza applicata a massa m (pto materiale)



(accelerazione nella direz. di F con intensità $|F|/m$)

Azione di due forze F_1 e F_2

= azione delle forze risultante. **Proprietà:**



1. ris$(F, 0) = F$

forza di intensità 0

2. ris$(F, -F) = 0$

3. $ris(F_1, ris(F_2, F_3)) = ris(ris(F_1, F_2), F_3)$

fisicamente chiaro: ho "sento" F_1, F_2, F_3 contemporaneamente

4. $ris(F_1, F_2) = ris(F_2, F_1)$

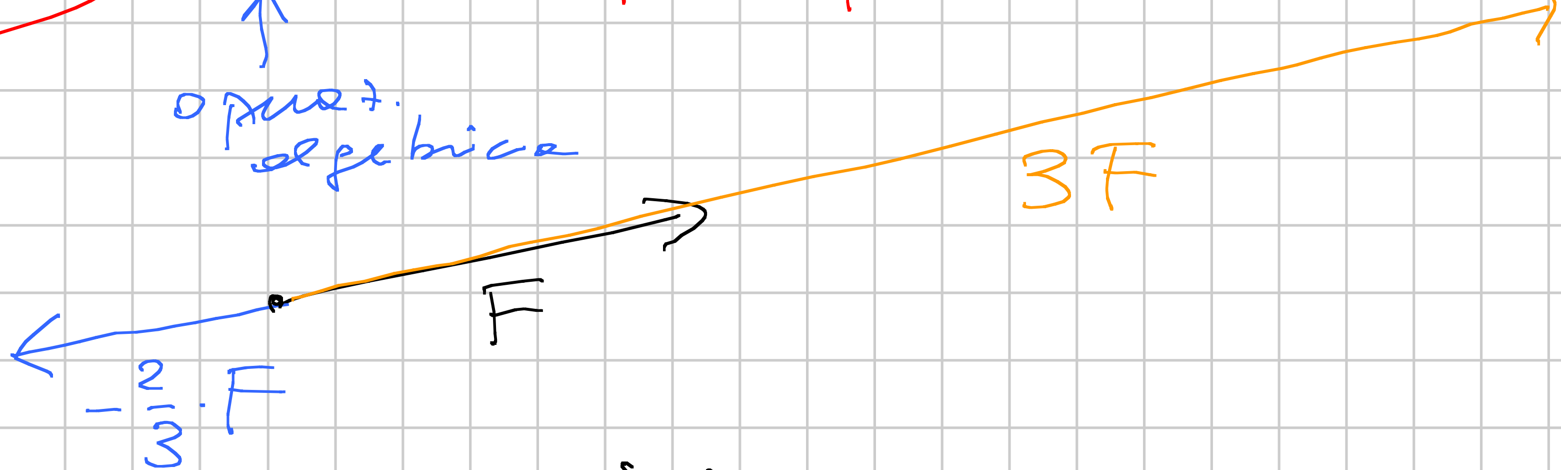
Proprietà analoghe a quelle del + su $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$.
Allora decido di scrivere $F_1 + F_2$ invece che $ris(F_1, F_2)$.

Data F forza, $\lambda \in \mathbb{R}$ posso considerare la forza $\lambda \cdot F$

forza fisica

numero

operaz. algebrica



direz: come F; intensità: $|\lambda|$ quella di F

verso: come F se $\lambda \geq 0$, opposto se $\lambda \leq 0$.

Proprietà:

5. $(\lambda \cdot \mu) \cdot F = \lambda \cdot (\mu \cdot F)$

· vecchio
tra numeri

· nuovo
tra numero e forza

6. $(\lambda + \mu) \cdot F = \lambda \cdot F + \mu \cdot F$

nuove

7. $\lambda \cdot (F + G) = \lambda \cdot F + \lambda \cdot G$

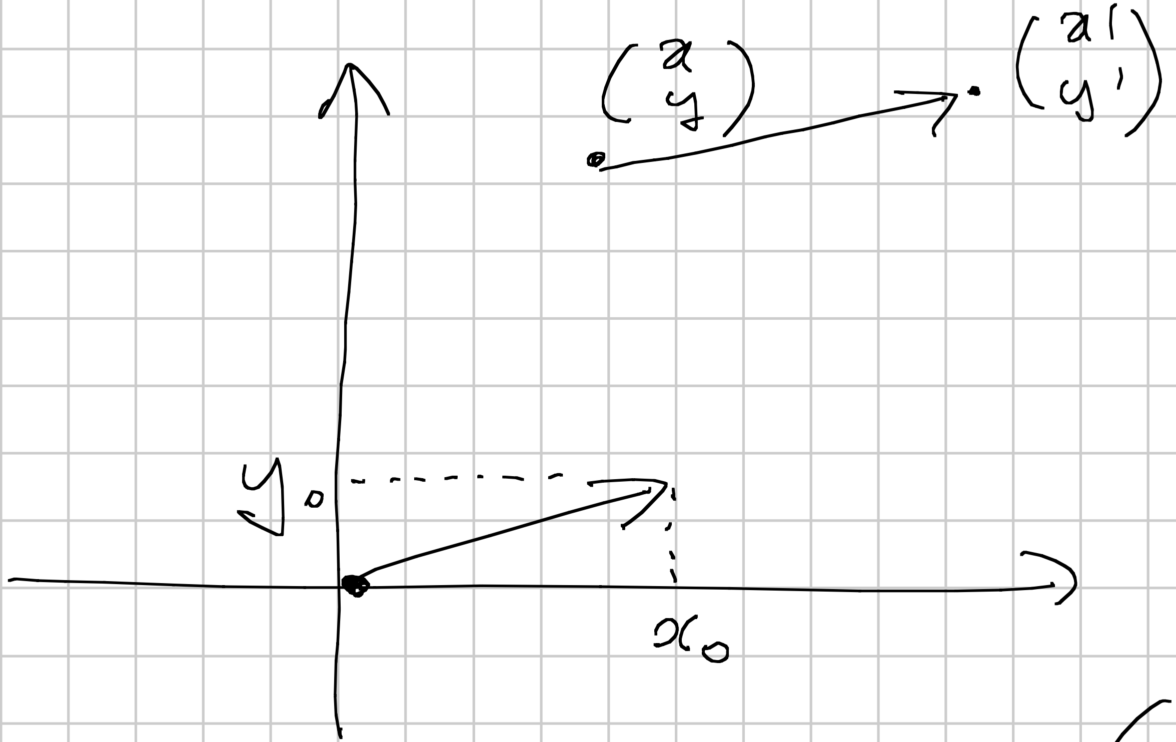
nuove

8. $1 \cdot F = F$

Questo sarà paradigma della definizione.

Traslazioni e OMOTETIE nel piano cartesiano:

traslaz



$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

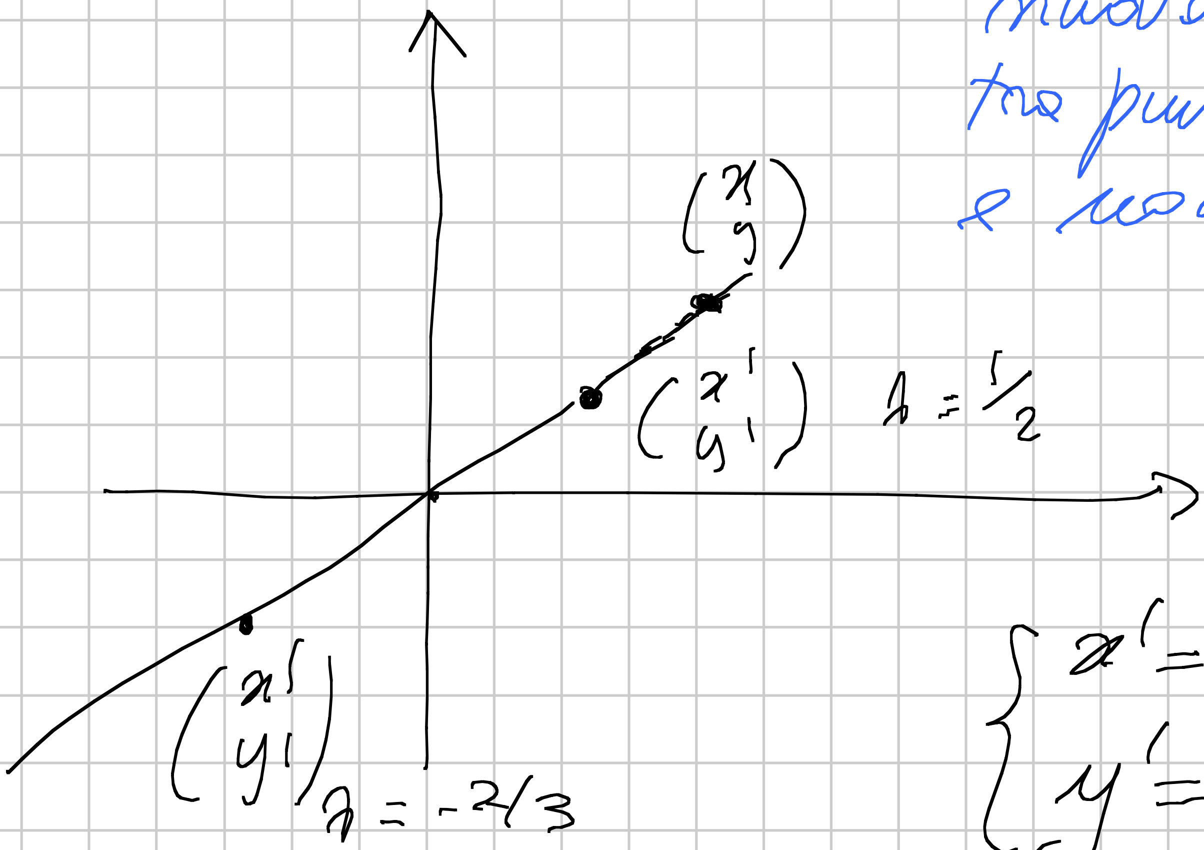
$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

Scriviamo questo come

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

nuovo significato di +
tra punti del piano
e non tra numeri

omotetia
di ragione λ



$$\begin{cases} x' = \lambda \cdot x \\ y' = \lambda \cdot y \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ è il punto sulla retta per O e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con distanza dall'origine $|\lambda|$ volte quella di $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dalla stessa parte se $\lambda \geq 0$, dall'altra se $\lambda \leq 0$.

Scritto $\begin{cases} x' = \lambda \cdot x \\ y' = \lambda \cdot y \end{cases}$ come $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

nuovo $\cdot$ tra un numero e un pto, non tra numeri.

<u>Fatto</u>: le stesse proprietà 1-8 valgono

1. $P+0=P$ $\qquad 0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

2. $P+(-P)=0$ $\qquad -P=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ se $P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

3. $(P+Q)+R=P+(Q+R)$

4. $P+Q=Q+P$

Cioè 1-4: il piano con operaz. + è un gruppo commut

5. $\lambda\cdot(\mu\cdot P)=(\lambda\cdot\mu)\cdot P$

6. $(\lambda + \mu) \cdot P = \lambda \cdot P + \mu \cdot P$

7. $\lambda \cdot (P + Q) = \lambda \cdot P + \lambda \cdot Q$

8. $1 \cdot P = P$.

Esercizio: verificare le proprietà usando la definizione.

Cioè:

1. $P + O = P \quad \forall P$ nel piano

Def di $+$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x_0 \\ y + y_0 \end{pmatrix}$

Def di O : $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Devo vedere : $\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x+0 \\ y+0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

6. $(\lambda + \mu) \cdot P = \lambda \cdot P + \mu \cdot P$

Def: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \end{pmatrix}$

$$(\lambda+\mu)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}(\lambda+\mu)\cdot x\\(\lambda+\mu)\cdot y\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}\lambda\cdot x\\\lambda\cdot y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu\cdot x\\\mu\cdot y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda\cdot x+\mu\cdot x\\\lambda\cdot y+\mu\cdot y\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}\lambda\cdot x+\mu\cdot x\\\lambda\cdot y+\mu\cdot y\end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

——— o ———

Numeri di Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

$F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ scrivo F_n invece che $F(n)$;

$F = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$

Fatto: $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Formula "miracolosa":

→ inattesa

→ utile: consente calcolo di F_n molto rapidamente.

Vedremo a breve una dimostrazione.

Invece con gli spazi vettoriali vedremo anche perché esiste una tale formula.

Def: si chiama *spazio vettoriale su $\mathbb{R}$* un insieme V dotato di due operazioni:

$$V \times V \longrightarrow V \qquad\qquad \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$(v, w) \longmapsto v+w \qquad\qquad (\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

somma tra vettori

prodotto tra scalare e vettore

che soddisfano queste proprietà:

1. $\exists\, 0 \in V$ t.c. $v + 0 = v \quad \forall v \in V$

2. $\forall v \in V \ \exists\, (-v) \in V$ t.c. $v + (-v) = 0$

3. $(v+w)+u = v+(w+u) \quad \forall v, w, u \in V$

4. $v + w = w + v \quad \forall v, w \in V$.

(1-4 : V con $+, 0$ è gruppo comm)

5. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall v \in V$

6. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$

7. $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v, w \in V$

8. $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

5 "assoc" 6/7 "distributive"

Esempi:

Dare un esempio significa:

→ dire chi è l'insieme V

→ dire chi è 0

→ dire come si esegue $v+w$

→ dire come si esegue $\lambda \cdot v$

→ verificare le proprietà $1-8$

$\boxed{\mathbb{R}^n}$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\};$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix};$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

oggetti che sto definendo

vecchi tre numeri

(Visto prima caso $n=2$.)

Notazione : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Verifica delle proprietà :

3. $(x+y)+z \overset{?}{=} x+(y+z)$

$\quad \shortparallel$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 \\ \vdots \\ (x_n + y_n) + z_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) \\ \vdots \\ x_n + (y_n + z_n) \end{pmatrix}$$

quindi per associatività
dell + tra numeri

$\boxed{\mathbb{R}[t]}$

$$\mathbb{R}[t] = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n : n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\} \Big/$$

identifico se differiscono per monomi nulli

0 = polinomio 0

$+$ = $+$ tra polinomi

$\cdot$ = $\cdot$ tra un numero e un polinomio

(la struttura di spazio vett. non usa il prodotto tra polinomi)

5. $(\lambda \cdot \mu) \cdot p(t) \overset{?}{=} \lambda \cdot (\mu \cdot p(t))$

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot t^k \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\lambda \cdot \left(\mu \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k\right)}$$

$$\shortparallel$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left((\lambda \cdot \mu) \cdot a_k\right) t^k \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\lambda \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\mu \cdot a_k) \cdot t^k\right)}$$

$(\lambda \cdot \mu) \cdot a_k = \lambda \cdot (\mu \cdot a_k) \ \forall k$ grazie alla associatività del $\cdot$ tra numeri

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda \cdot (\mu \cdot a_k)) \cdot t^k$$

$\Rightarrow$ sono uguali.

$$\boxed{M_{m \times n}(\mathbb{R})}$$

matrici $m \times n$ (m righe, n colonne)

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Es</u>:

$$\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -7 \\ \pi+1 & 11/4 \\ 9 & -e^{100} \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Verificare le proprietà

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\} = M_{n \times 1}(\mathbb{R}).$$

CARLO PETRONIO