Algebra Lineare

Libro (Esculapio) : • Teoria + esercizi
• Temi d'esame

Esercizi : PROVATECI DA SOLI PRIMA

L. Slavich (domani: ultima ora)

www: orario esatto

(Cap. 2) **NUMERI**

Naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(quelli con cui si conta).

Operazione: $+$ (somma), binaria

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(n, m) \longmapsto n + m$$

$(3 + 8 = 11)$

Proprietà:

1. $0 + n = n \quad \forall n$ (0 el. neutro di +)

3. $(n+m)+k = n+(m+k)$ (associativa)

4. $n + m = m + n$ (commutative)

Fatto: se fisso $n \in \mathbb{N}$ l'equazione

$$n + x = 0$$

ha soluzione in $\mathbb{N}$ solo per $n = 0$
(e in tal caso la soluzione è $x = 0$).

Numeri relativi: si inventa la soluzione
$-n$ dell'equaz. $n + x = 0$ per $n \neq 0$.

$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Su $\mathbb{Z}$ sono definite due operaz. binarie

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(n, m) \longmapsto n + m$$

somma

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(n, m) \longmapsto n \cdot m$$

prodotto

Proprietà: 1. $n + 0 = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

2. $\forall n \in \mathbb{Z} \ \exists (-n) \in \mathbb{Z}$ t.c. $n + (-n) = 0$

3. $(n + m) + k = n + (m + k) \quad \forall n, m, k$

4. $n + m = m + n \quad \forall m, n$

5. $n \cdot 1 = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ (1 è el. neutro di $\cdot$)

7. $(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$

8. $n \cdot m = m \cdot n$

9. $n \cdot (m + k) = n \cdot m + m \cdot k$ <u>distributive</u>

$((n \cdot m) + (n \cdot k))$

Dato $n \in \mathbb{Z}$ l'equazione $n \cdot x = 1$

(ricerca dell'inverso moltiplicativo di n)
ha soluzione solo per $n = \pm 1$ e la
soluzione è n. Per ottenere gli inversi
si passa da $\mathbb{Z}$ ai numeri razionali

$$\mathbb{Q} \overset{\text{“}=\text{”}}{=} \left\{ \frac{n}{k} : n, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \right\}$$

$\frac{-15}{10}$ $\frac{6}{-4}$ (però sono entrambe $-3/2$)

↓

però convenniamo che $\frac{n}{k} = \frac{m}{h}$ quando $n \cdot h = m \cdot k$

Anche su $\mathbb{Q}$ esistono $+, \cdot$ operaz. binarie con:

1. $x + 0 = x$
2. $\forall x \; \exists (-x)$ t.c. $x + (-x) = 0$
3. $x + (y + z) = (x + y) + z$
5. $x \cdot 1 = x$
6. $\forall x \neq 0 \; \exists x^{-1}$ t.c. $x \cdot x^{-1} = 1$
7. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

4. $x+y=y+x$ 8. $x \cdot y = y \cdot x$

9. $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

Oss: 1-4 pr + e 5-8 pr · sono analoghe

Def: un insieme con una oper. che gode di
- esistenza neutro
- esistenza inverso
- associativa

si chiama gruppo; se vale anche la

commutativa, $\mathbb{Q}$ gruppo commutativo.

Quindi le proprietà di $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$:

1-4 $(\mathbb{Q}, +, 0)$ è gruppo comm.

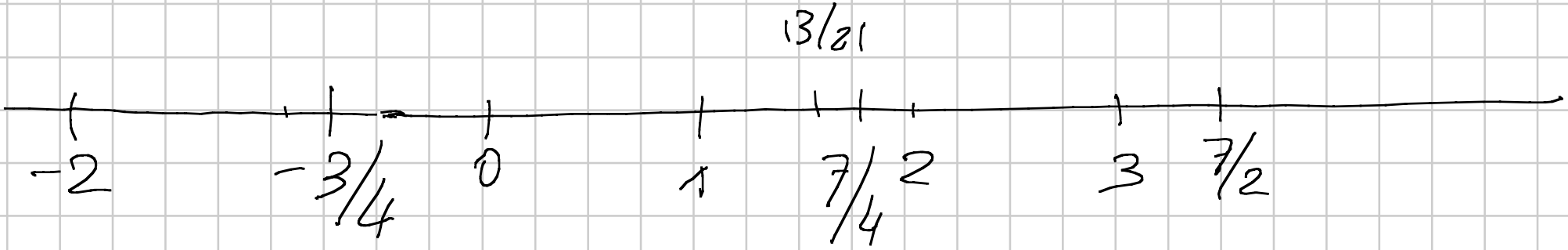
5-8 $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot, 1)$ è gruppo comm

9 distributiva

Def: un insieme con 2 operazioni che soddisfano 1-9 si dirama campo.

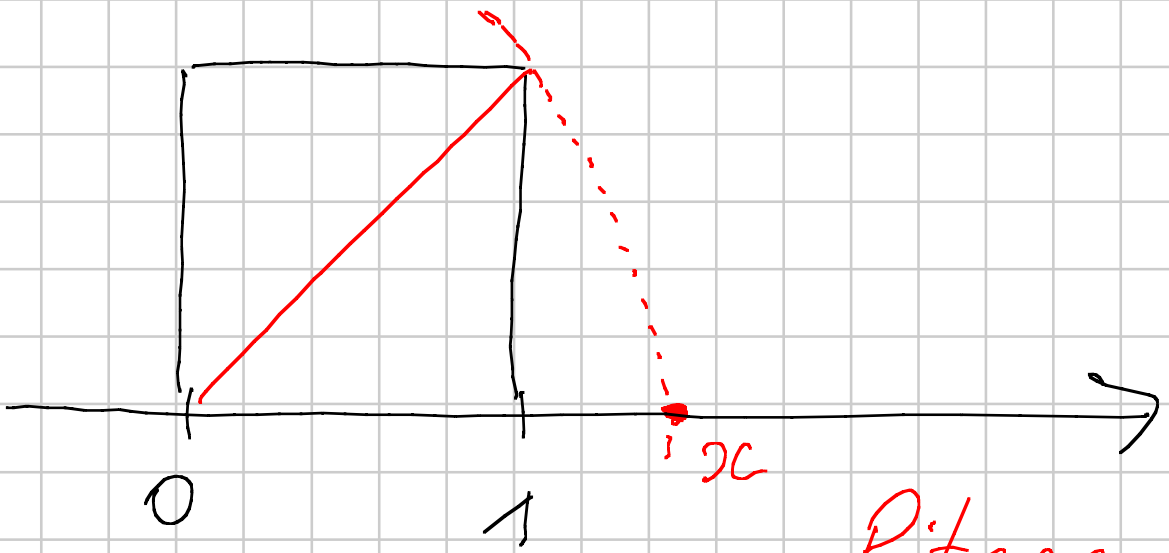
Numeri reali: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ha motivazione analitica.

Fatto: se fisso su una retta due punti distinti che chiamo 0 e 1, posso identificare $\mathbb{Q}$ a un sottoinsieme della retta:



Fatto: ci sono punti della retta che non corrispondono ad alcun numero in $\mathbb{Q}$

Es:



Pitagora: $x^2 = 2$.

Prop (dimo dopo): l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Rimedio: si chiama $\mathbb{R}$ l'insieme di tutti i punti della retta (numeri reali).

Fatto: chiamo $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ l'insieme di tutte le soluzioni reali di equazioni polinomiali a coefficienti razionali.

Prendendo a caso un punto in $\mathbb{R}$ c'è probabilità nulla che stia in $\mathbb{Q}$.

Esempi di el. di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (trascendenti):

π, e ... $0.101001000100000100000\ldots$

Fatto: le oper. $+, \cdot$ si estendono da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ e continuano a valere le proprietà 1-9 (cioè: $\mathbb{R}$ è un campo).

Polinomi (a coeff. reali nella indeterminata t — un simbolo che non è in $\mathbb{R}$)

$$\sqrt{3} - 7t + \frac{4}{9}t^2 - \frac{17}{\pi}t^3$$

$$\mathbb{R}[t] = \{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n : n \in \mathbb{N},\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

però!

$7 - 5t^2 + \frac{11}{3}t^3 + \sqrt{7}\,t^9$ non è una scrittura come sopra

$7 - 5t + 0 \cdot t^2 \neq 7 - 5t$ sono scritture uguali ma diverse

Dunque: convenciamo che si possano mettere e togliere a piacimento monomi con coeff. nullo.

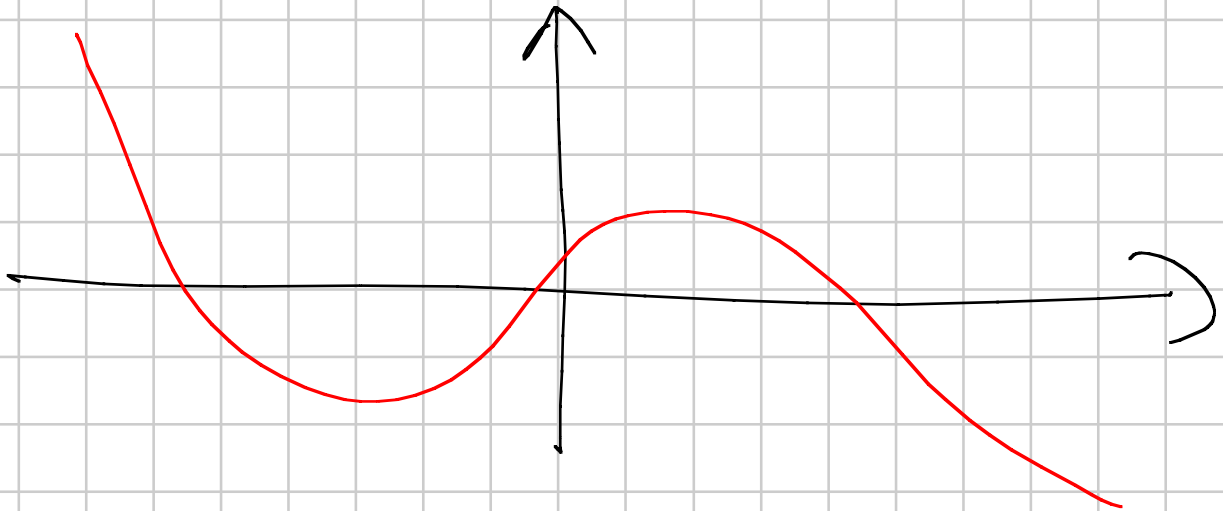
Att: un polinomio è oggetto algebrico con t indeterminata. Però:

se $p(t) = \sqrt{3} - 5t + 8t^2 - \frac{6}{13}t^3$

posso sostituire a t un numero reale, ad es.

$$p(-2) = \sqrt{3} + 10 + 32 - \frac{48}{13} \in \mathbb{R}$$

dunque $p(t)$ determina una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Def: Se $p(t) \in \mathbb{R}[t]$, $p(t) \neq 0$ $(0 + 0 \cdot t + 0t^2 \dots)$

chiamo **grado** di $p(t)$

$$\deg(p(t)) = \max\{m : a_m \neq 0\}$$

Es: $p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_m \cdot t^m$

ha grado $\leq m$.

$\deg\left(7 - 5t + \frac{14}{3} t^2 + 0 \cdot t^3\right) = 2$.

Conveniamo che $\deg(0) = -\infty$.

Anche su $\mathbb{R}[t]$ ci sono le operaz. $+, \cdot$

+ : raccogli i coeff dei monomi simili

· : prima distribuisci, usando

$$(\lambda \cdot t^a) \cdot (\mu \cdot t^b) = (\lambda \cdot \mu) \cdot t^{a+b}$$

e poi raccogli monomi simili.

Scrittura formale:

+ $p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + \dots + a_n t^n$

$q(t) = b_0 + b_1 \cdot t + \dots + b_m \cdot t^m$

$$\Rightarrow p(t)+q(t) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)t+\dots$$

se $n \neq m$ devo distinguere $n<m$ o $n>m$

Lo risolviamo inventando nuova scrittura

Ricordo: $\sum$ = "sommatoria"

Es: $\sum_{k=0}^{17} k^2 = 0^2+1^2+2^2+3^2+\dots+16^2+17^2$

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

Convenzione: scrivo $p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot t^k$ dove convengo che $a_k = 0$ per $k > n$.

Quindi: un polinomio è somma infinita di monomi che hanno coeff $\neq 0$ solo in numero finito. Ora ho:

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \cdot t^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) \cdot t^k .$$

Prodotto : (Oss: $\deg(p(t)\cdot q(t)) =$

$= \deg(p(t)) + \deg(q(t))$

$$(7 - 5t + 4t^2 + 9t^3 - 6t^4) \cdot (2 + \sqrt{3}t - 11t^2 + 13t^3)$$

$$= (\cdot)\cdot t^0 + (\cdot)t^1 + \dots + (\cdot)t^4 + \dots + (\cdot)t^7$$

$$7\cdot 0 + (-5)\cdot 13 + 4\cdot(-11) + 9\cdot\sqrt{3} + (-6)\cdot 2$$

In generale:

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot t^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \cdot t^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j \cdot b_{k-j}\right) \cdot t^k$$

Dimostrazioni (tecniche)

Metodo diretto:

Prop: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dim: $S_k = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$

$$2 \cdot S_n = \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) + n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 + 0 \end{array}$$

$$= \underbrace{n + n + n + \cdots + n + n}_{n+1}$$

$$= n(n+1).$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \text{q.e.d.}$$

Assurdo: per dimostrare una certa tesi, la suppongo falsa e sviluppo ragionamento al termine del quale contraddico o un fatto noto come vero oppure l'ipotesi.

Prop: l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni $x \in \mathbb{Q}$.

Dim: Supponiamo per assurdo che ci sia una soluzione in $\mathbb{Q}$; la chiamo $\frac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{Z}$ supponendola ai minimi termini (**p e q primi fra loro**). Sto supponendo

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \text{cioè} \quad p^2 = 2q^2$$

dunque p^2 è pari, ma allora **p è pari**, ovvero esiste $k \in \mathbb{Z}$ t.c. $p = 2k$; sostituisco

$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ perciò

q^2 è pari $\Rightarrow$ q è pari.

Assurdo: i fatti assunti sono contraddittori.

□

(Le soluzioni in $\mathbb{R}$ di $x^2 = 2$ sono $\pm\sqrt{2}$, e non sono in $\mathbb{Q}$.)

Se la proposizione da dimostrare è una implicazione tra predicati:

$P \Longrightarrow Q$ (tipicamente predicati con stesso soggetto)

(ad esempio

"Dato $n \in \mathbb{N}$

$\underbrace{n \text{ multiplo di } 2 \text{ e di } 3}_{P} \Longrightarrow \underbrace{n \text{ multiplo di } 6}_{Q}$"

$P(n)$ $Q(n)$)

dimostrare la proposizione per assurdo significa dimostrare:

$$\text{NON}(Q) \Longrightarrow \text{NON}(P).$$

Questa proposizione è detta controinversa di quella originale (equivalenti tra loro).