Algebra lineare 26/10/16

<u>Oss</u>: ogni sp. vett. ha infinite basi. Anzi, se $\dim(V) = n$ presi n vettori a caso, loro quasi certamente sono base.

<u>Un metodo</u>: se $W = \{ x \in \mathbb{R}^5 : \text{alcune equazioni} \}$

e riesco a riscrivere

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{l} x_2 = 7x_1 - \frac{1}{4}x_3 + 2x_4 \\ x_5 = 9x_1 + \frac{5}{4}x_3 - 19x_4 \end{array} \right\}$$

allora questo significa che i vettori di W sono esattamente quelli che si scrivono come

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 7x_1 - 1/4\, x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 9x_1 + 5/4\, x_3 - 19x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1 \\ 0 \\ 5/4 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -19 \end{pmatrix}$$

inoltre tale scrittura è unica

$\Rightarrow$ ho provato che $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1 \\ 0 \\ 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -19 \end{pmatrix}$ è base

posso sostituire questo con $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$f : V \to W$ lineare se rispetta le operaz. ovvero

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

Esempi:

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 - 5x_2 + \pi x_3 \\ \sqrt{19}\, x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Provo che è lineare:

$$f(\alpha x+\beta y) \overset{?}{=} \alpha f(x)+\beta f(y)$$

$$f\begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta y_1 \\ \alpha x_2+\beta y_2 \\ \alpha x_3+\beta y_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 7x_1-5x_2+\pi x_3 \\ \sqrt{18}\,x_1+2x_2+x_3 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 7y_1-5y_2+\pi y_3 \\ \sqrt{18}\,y_1+2y_2+y_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 7(\alpha x_1+\beta y_1)-5(\alpha x_2+\beta y_2)+\pi(\alpha x_3+\beta y_3) \\ \sqrt{18}(\alpha x_1+\beta y_1)+2(\alpha x_2+\beta y_2)+(\alpha x_3+\beta y_3) \end{pmatrix}$$

Sì

In generale se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ha ciascuna componente che è un polinomio omogeneo di I grado nelle componenti dell'argomento, allora è lineare.

Va bene $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 - x_2 \\ \sqrt{2}\, x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - \pi x_2 \\ 5x_1 + e x_2 \\ 21 \cdot x_1 \end{pmatrix}$

(2) $f: \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}$

$f(p(t)) = p(-2)$

Provo che è lineare:

$p(t) = \sum a_n t^n \qquad q(t) = \sum b_n t^n$

$f(p(t) + q(t)) \overset{?}{=} f(p(t)) + f(q(t))$

$\| \qquad\qquad\qquad \|$

$f\left(\sum (a_n + b_n) t^n\right) \qquad \sum a_n (-2)^n + \sum b_n (-2)^n$

$\|$

$\sum (a_n + b_n) \cdot (-2)^n$

Sì (vero $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ invece che -2)

Oss 1: $f: V \to \mathbb{R}^n$, $g: V \to \mathbb{R}^m$ lineari

$$h = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : V \to \mathbb{R}^{n+m} \qquad h(v) = \begin{pmatrix} f(v) \\ g(v) \end{pmatrix}$$

è lineare:

$$h(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \overset{?}{=} \lambda_1 h(v_1) + \lambda_2 h(v_2)$$

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \\ g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 \begin{pmatrix} f(v_1) \\ g(v_1) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} f(v_2) \\ g(v_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \\ \lambda_1 g(v_1) + \lambda_2 g(v_2) \end{pmatrix}$$

Sì

Oss 2: $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$ lineari

$\Longrightarrow g \circ f$ è lineare.

Infatti:

$$(g \circ f)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = g\big(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)\big)$$

$$= g(\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)) = \lambda_1 g(f(v_1)) + \lambda_2 g(f(v_2))$$

$$= \lambda_1 \cdot (g \circ f)(v_1) + \lambda_2 \cdot (g \circ f)(v_2) \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

Conseguenza:

$$f : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f(p(t)) = \begin{pmatrix} 7p(-1) + 4p(2) \\ 9p(17) \end{pmatrix}$$

è lineare. (Esercizio: esprimerlo usando le due oss prec.)

(3) $D : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$

$$D\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \qquad (D(p(t)) = p'(t))$$

è lineare

$$\left(\sum a_n t^n + \sum b_n t^n\right)' = \left(\sum (a_n + b_n) t^n\right)'$$

$$= \sum n (a_n + b_n) t^{n-1} = \sum n a_n t^{n-1} + \sum n b_n t^{n-1}$$

(4) $f : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(p(t)) = \begin{pmatrix} 5 \cdot p''(-7) + \pi\, p(3) \\ 9\, p'(11) \\ 47\, p^{(8)}(-1) \end{pmatrix}$$

<u>Oss 3</u> : $f, g : V \to W$ lineari , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g$ lineare .

Ricordo: in $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ sono definite

$$0 : s \longmapsto 0 \qquad \mathbb{R}$$

$$f+g : s \longmapsto f(s)+g(s) \qquad \mathbb{R}$$

$$\lambda \cdot f : s \longmapsto \lambda \cdot f(s) \qquad \mathbb{R}$$

Posso estendere a $\mathcal{F}(S,W)$ se W è sp. vett.

$0 \quad : \quad s \longmapsto 0 \in W$

$f+g \quad : \quad s \longmapsto f(s) + g(s)$ $+$ di W

$\lambda \cdot f \quad : \quad s \longmapsto \lambda \cdot f(s)$ $\cdot$ di W

Verifico che $\alpha f + \beta g$ è lineare:

$$(\alpha f + \beta g)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \overset{?}{=} \lambda_1 (\alpha f + \beta g)(v_1) + \lambda_2 (\alpha f + \beta g)\, v_2$$

$$\lambda_1 \alpha f(v_1) + \lambda_1 \beta g(v_1) + \lambda_2 \alpha f(v_2)$$

$$\alpha f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + \beta g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$$

$$\parallel$$

$$\alpha \lambda_1 f(v_1) + \alpha \lambda_2 f(v_2) + \beta \lambda_1 g(v_1) + \beta \lambda_2 g(v_2)$$

$$+ \lambda_2 \beta g(v_2)$$

Sì

(4) $f : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(p(t)) = \int_{t_0}^{t_1} p(u)\,du$ cioè

$$f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\left(t_1^{n+1} - t_0^{n+1}\right)$$

lineare

(5) $f : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ $\quad f(p(t)) = \int p(u)\,du$

$$f\left(\sum a_n t^n\right) = \sum \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$$ lineare

---

$f : V \to W$ lineare.

Chiamo nucleo di f, $\operatorname{Ker}(f) = \{ v \in V : f(v) = 0 \}$.

Ricordo : $\mathrm{Im}(f) = \{ f(v) : v \in V \}$

$= \{ w \in W : \exists v \in V \text{ con } f(v) = w \}.$

Prop: $\mathrm{Ker} f$ è stsp di V; $\mathrm{Im}(f)$ è stsp. di W.

Dim: $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$, cioè $f(v_1) = f(v_2) = 0$,

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathrm{Ker} f$

cioè $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \overset{?}{=} 0$.

Sì: $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$
$= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0.$

$w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(f)$, cioè $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$,
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \mathrm{Im}\, f$

cioè: $\exists v$ t.c. $f(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$

Sì: $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$. $\boxed{}$

Oss: • f suriettiva $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = W$

• $f = 0$ (cioè $f(v) = 0 \ \forall v$)

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = V$ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$

Prop: f iniettiva $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Dim: $\boxed{\Longrightarrow}$: so che $f(0) = 0$.

Iniettiva: $f^{-1}(w)$ un solo pto $\forall w$

$\Longrightarrow f^{-1}(0) = \{0\}$ ma $f^{-1}(0) = \{v : f(v) = 0\} = \operatorname{Ker} f$.

$\underline{\Longleftarrow}$: Supponiamo $f(v_1) = f(v_2)$; allora

$f(v_1) - f(v_2) = 0 \Longrightarrow f(v_1 - v_2) = 0$

$\Longrightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} f = \{0\} \Longrightarrow v_1 - v_2 = 0$

$\Longrightarrow v_1 = v_2$. $\blacksquare$