Algebra Lineare 23/11/16

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

($n!$ addendi)

Def: indico con A^{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A cancellando riga i e colonna j.

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \\ -8 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

$A^{32} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Teo: per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

(sviluppo di det(A) lungo la riga i-esima)

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} \det(A^{ji})$$

(sviluppo di det(A) lungo colonna i-esima)

(Sviluppi di Laplace)

Es: $\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & \pi & -1 \\ e & \sqrt{2} & 7 & 5 \\ -11 & 2 & \sqrt{3} & 6 \\ -4 & -3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \leftarrow \qquad =$

Sviluppo lungo III riga:

$$= (-1)^{3+1} \cdot (-11) \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & \pi & -1 \\ \sqrt{2} & 7 & 5 \\ -3 & 1 & 10 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & \pi & -1 \\ e & 7 & 5 \\ -4 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$+(-1)^{3+3}\cdot\sqrt{3}\cdot\det\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\\ e & \sqrt{2} & 5\\ -4 & -3 & 10\end{pmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot 6\cdot\det\begin{pmatrix}4 & 3 & \pi\\ e & \sqrt{2} & 7\\ -4 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

Perché?

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\prod_{k=1}^{n}a_{k,\sigma(k)}$$

$[\dots]$

Oss: da un det $n\times n$ con uno sviluppo mi riconduco a n det $(n-1)\times(n-1)$, con un altro a $n\cdot(n-1)$ det $(n-2)\times(n-2)$

... ritrovo $n!$ addendi. Non pratico.

Prop: le seguenti operazioni non modificano il determinante:

- sostituire una colonna con sé stessa + un multiplo di un'altra
- sostituire una riga con sé stessa + un multiplo di un'altra.

Dim (via approccio assiomatico):

$$A = (v_1, \dots, v_n)$$

$$A' = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \lambda v_k, v_{i+1}, \dots, v_k, \dots, v_n)$$

$$\det(A') = \det\underbrace{(v_1, \dots v_{i-1}\ v_i\ v_{i+1} \dots v_k \dots v_n)}_{A}$$

$$+\ \lambda \underbrace{\det(v_1, \dots, v_{i-1}\ v_k\ v_{i+1}\ \dots\ v_k \dots v_n)}_{0}$$

Per righe: poiché $\det({}^tA) = \det(A)$ segue dalle proprietà per le colonne — $\blacksquare$

Strategia pratica per calcolare $\det(A)$:

- usare le operaz. di somme per ottenere molti 0 su una riga o col
- sviluppare lungo lei.

(Se sviluppo lungo una riga o col. con molti 0 trovo pochi addendi.)

Es: $\det \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$= \det \begin{pmatrix} -11 & 0 & -8 & 7 \\ -10 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$\mathrm{I}r \rightsquigarrow \mathrm{I}r - 3 \times \mathrm{III}r$

$\mathrm{II}r \rightsquigarrow \mathrm{II}r - 2 \times \mathrm{III}r$

$$= (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -10 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 \\ 10 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 8 & 9 & 0 \\ 10 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(da qui non è il metodo più furbo)

$$= -\det \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 10 & -33/4 & 1 \\ 3 & -7/2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{II}c \rightsquigarrow \mathrm{II}c - \frac{9}{8} \cdot \mathrm{I}c$$

$$3 - \frac{9}{8} \cdot 10 = 3 - \frac{9}{4} \cdot 5 = \frac{12 - 45}{4} = -\frac{33}{4}$$

$$-1 - \frac{9}{8} \cdot 3 = -35/8$$

$$= -8 \cdot \det \begin{pmatrix} -33/4 & 1 \\ -35/8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 66 & 1 \\ 35 & 7 \end{pmatrix} = \dots$$

Ricordo: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertibile

$\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Prop: se $\det(A) \neq 0$ allora

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det\left(A_{ji}\right)}{\det(A)}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 13 & 7 & 4 \\ -8 & 3 & -3 \end{pmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 13 & 7 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -(39+56) = -95$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-95} \begin{pmatrix} +(-33) & -(3) & +(7) \\ -(-7) & +(\ ) & -(\ ) \\ +(\ ) & -(\ ) & +(\ ) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Per $n=2$ ritrovo le regola già ricavate a mano:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} +d & -b \\ -c & +a \end{pmatrix}.$$

<u>Dim</u>: chiamo $B = (b_{ij})$

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)}.$$

Verifico che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{k+j} \frac{\det(A^{jk})}{\det(A)}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} \det(A^{jk})}_{}$$

se qui ci fosse a_{jk}
sarebbe lo sviluppo di det(A)
lungo la riga j

$\Rightarrow$ è lo sviluppo lungo la riga j
della matrice ottenuta da A
sostituendo la riga j con la riga i.

se $i = j$ viene $\det(A)$

se $i \neq j$ viene $\det\begin{pmatrix}\text{matrice con} \\ \text{due righe} =\end{pmatrix} = 0$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \delta_{ij} \cdot \det(A) = \delta_{ij} = (I_n)_{ij}$$

OK

$B \cdot A = I_n$ analogamente usando sviluppi per col...