

Algebra Lineare 22/11/16

Cerchiamo: $\det_n: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ che

"dice" se una $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è invertibile

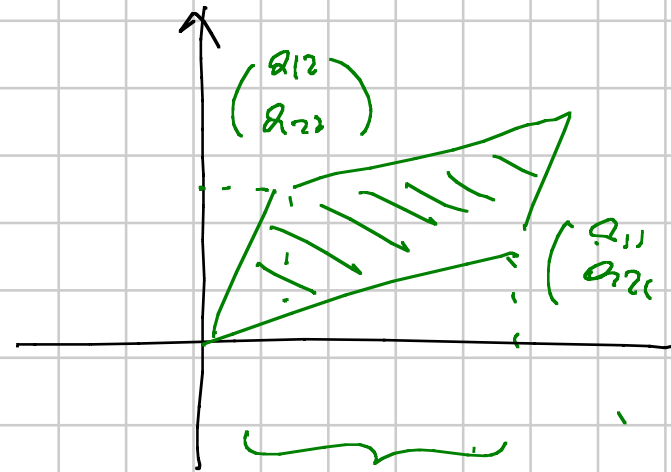
(cioè $\exists A^{-1} \iff \det_n(A) \neq 0$)

Visto:

$$d_1(a_{11}) = a_{11}$$

$$d_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$





area com regra

$$d_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{22} a_{33}$$



Segno: regola mano destra:

segno + se si possono disporre pollice/indice/medio

delle uscite dx la primo/secondo/terzo colonne delle
matrici.

n qualsiasi?

Due approcci:

I. Assiomatico

II. Calcolo tramite funzioni.

I. Teorema: per ogni n esiste una e una sola funzione $\det_n: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- 1) E' lineare in ciascuna colonna fissate le altre
- 2) Cambia segno scambiando due colonne
- 3) Vale 1 su I_n .

Cioe' :

1) $\det_n: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ NON è lineare
↑
è spazio vettoriale

Quindi: fissato $j \in \{1, \dots, n\}$ e fissati
 $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n$ la funzione

$\mathbb{R}^n \ni v_j \mapsto \det(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$
è lineare, cioè

$$\det_n(v_1, \dots, v_{j-1}, \alpha x + \beta y, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

$$= \alpha \cdot \det_n(v_1, \dots, v_{j-1}, x, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

$$+ \beta \cdot \det_n(v_1, \dots, v_{j-1}, y, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

$$2) \quad i < j \quad v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$$

$$\det_n(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

$$= - \det_n(v_1, \dots, v_n)$$

$$3) \det_n \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Verifichiamo che le proprietà sono vere per $n=1,2,3$
 con le formule trovate: $(n=3)$

$$1) \det_3 \begin{pmatrix} a & \lambda b + \mu c & d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a, b, c, d \in \mathbb{R}^3 \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot \det_3(a, b, d) + \mu \cdot \det_3(a, c, d)$$

(lineando II col).

$$\det_3 \begin{pmatrix} a_1 & \lambda b_1 + \mu c_1 & d_1 \\ a_2 & \lambda b_2 + \mu c_2 & d_2 \\ a_3 & \lambda b_3 + \mu c_3 & d_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot (\lambda b_2 + \mu c_2) \cdot d_3 +$$

$$+ (\lambda b_1 + \mu c_1) \cdot d_2 \cdot a_3 +$$

$$+ d_1 \cdot a_2 \cdot (\lambda b_3 + \mu c_3) - \dots - \dots - \dots$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \det_3 \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot (a_1 b_2 d_3 + b_1 d_2 a_3 + d_1 a_2 b_3 - \dots - \dots - \dots) \\ + \mu \cdot (a_1 c_2 d_3 + c_1 d_2 a_3 + d_1 a_2 c_3 - \dots - \dots - \dots)$$

$\sum$

$$2) \det(a, c, b) \neq -\det(a, b, c)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{pmatrix} = \underbrace{a_1 c_2 b_3 + c_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 c_3}_{\text{green}} - \underbrace{b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 c_3}_{\text{red}}$$

$$- \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = - \left(a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 \right. \\ \left. - \underline{c_1 b_2 a_3} - \underline{b_1 a_2 c_3} - \underline{a_1 c_2 b_3} \right) \quad \checkmark$$

$$3) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \quad \checkmark$$

Prop : $\det_n(A) = 0 \Leftrightarrow$ le colonne di A sono
lin. dip.

Dimostro $\Leftarrow$:

Osservo che il $\det_n$ di una matrice con due colonne uguali è uguale a 0 - se' n'uno $\Rightarrow$ è 0.

Se le colonne di A sono lin. dip. $A = (v_1, \dots, v_m)$

esiste j t.c. $v_j = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_m v_m$

$\Rightarrow \det(v_1, \dots, v_m) =$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha_1 \underbrace{\det(v_1 \dots v_{j-1}, v_j, v_{j+1} \dots v_n)}_0 \\
 &\vdots \\
 &\alpha_n \underbrace{\det(v_1, \dots, v_{i-1}, v_n, v_{i+1}, \dots, v_n)}_0
 \end{aligned}$$

✓

Teo (Bimet): $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Diuo (assumendo Teo + Prop) :

se $\det(A) = 0 \xrightarrow{\text{Prop}} A$ non surgettiva
 $\Rightarrow A \cdot B$ non surp $\xrightarrow{\text{Prop}} \det(A \cdot B) = 0 \Rightarrow \checkmark$

se $\det(A) \neq 0$ pongo $f: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
$$f(B) = \frac{\det(A \cdot B)}{\det(A)}$$

Poiché $B \mapsto A \cdot B$ è lineare si ha che
 f è lineare nelle colonne di B , come si

sempre scambiando due colonne e

$$f(I_n) = \frac{\det(A \cdot I_n)}{\det(A)} = 1$$

$\Rightarrow f$ soddisfa le proprietà 1-3 del Teo

$$\Rightarrow f(B) = \det(B) \quad \forall B$$

$$\Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \forall B$$



II. Calcolo

Ricordo:

Quanti addendi?
Numero di permutazioni

$$\det_1(a_{11}) = a_{11}$$

1 1

$$\det_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2 2

$$\det_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

6 3

$$n = 4$$

$$n = 5$$

$$24$$

$$120$$

$$4$$

$$5$$

Dove sono?

$$n = 2$$

$$\begin{pmatrix} \circ & \cdot \\ \cdot & \circ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \circ \\ \circ & \cdot \end{pmatrix}$$

$$n = 3$$

$$\begin{pmatrix} \circ & \cdot & \cdot \\ \cdot & \circ & \cdot \\ \cdot & \cdot & \circ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \circ & \cdot \\ \cdot & \cdot & \circ \\ \circ & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \circ \\ \circ & \cdot & \cdot \\ \cdot & \circ & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc} \text{No;} \\ \begin{pmatrix} \circ & \cdot \\ \circ & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \circ & \circ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \circ \\ \circ & \cdot \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \circ \\ \circ & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \circ \\ \cdot & \circ & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \circ & \cdot \\ \circ & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{No} \\ \circ & \circ & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \circ \end{pmatrix}$$

(Tutti per $n=2$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2, a_{12}^2, a_{21}^2, a_{22}^2, \\ a_{11}a_{12}, a_{11}a_{21}, a_{11}a_{22}, \\ a_{12}a_{21}, a_{12}a_{22}, a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$$

Oss: in ciascuno degli $n!$ addendi compaiono n coeff. della matrice scelti su righe e su colonne diverse.

Difatti ci sono $n!$ modi per operare tale scelte:

$n=5$

.	0	.	.	.	5
.	X	.	0	.	4
.	X	.	X	0	3
0	X	.	X	X	2
.	.	0	.	.	1

Scoperte: $\det_n(A)$ è somma di $n!$ addendi;
ogni addendo $\pm$ il prodotto di n coeff. della
matrice presi su righe e colonne
diverse in tutti i modi possibili.

Disopue spiegarlo

Def: chiamiamo permutazione su n elementi una funzione $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bijectiva. Scriviamo $\mathcal{S}_n =$ l'insieme di tutte le permutaz. su n elementi.

Scriviamo: $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ come $(f(1), f(2), \dots, f(n))$.

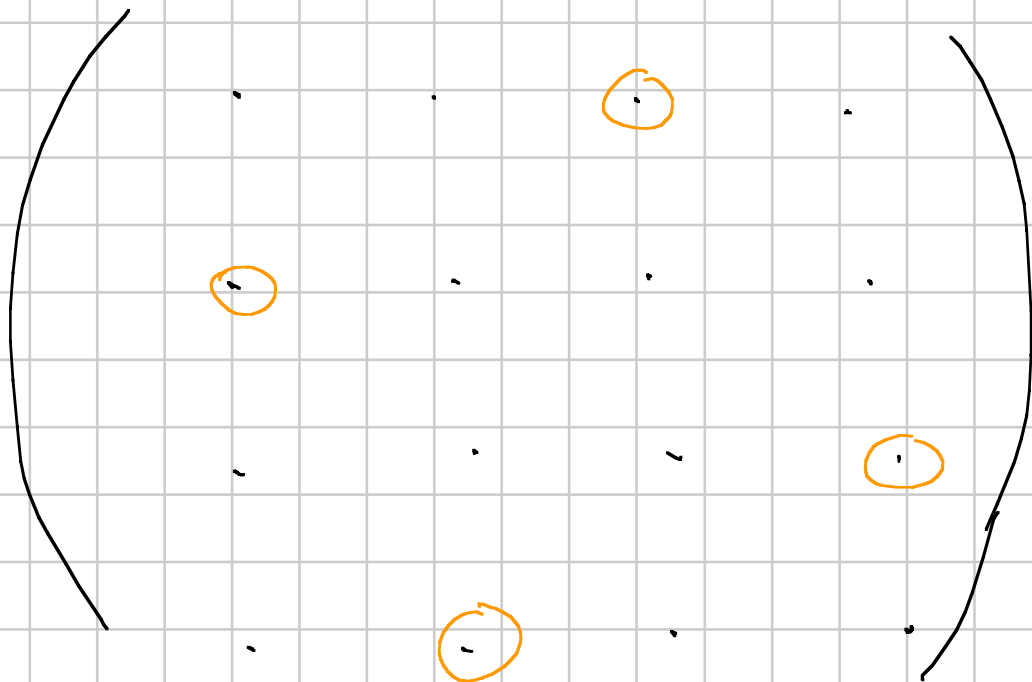
Es: $\sigma = (7, 4, 3, 1, 8, 5, 2, 6) \in \mathcal{S}_8$

$$\sigma(5) = 8$$

Notazione: $\sum$ = somma

$\prod$ = prodotto

Es: $\prod_{j=1}^4 (2j+3) = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$



Q_{13}

Q_{21}

Q_{34}

Q_{42}

$Q_{13} \cdot Q_{21} \cdot Q_{34} \cdot Q_{42}$



Se posso $\sigma(1)=3$ $\sigma(2)=1$ $\sigma(3)=4$ $\sigma(4)=2$
ho $\sigma \in \mathcal{S}_4$ perché ha valori distinti
e posso scrivere

$$a_{13} a_{21} a_{34} a_{42} = \prod_{i=1}^4 a_{i, \sigma(i)}$$

Oss: $\mathcal{S}_m$ ha $m!$ elementi.

Un generale numero:

$$\det_m(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^m a_{i, \sigma(i)}$$

Es. cal det 4×4 compare

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \circ \\ \circ & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \circ & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \circ & \cdot \end{pmatrix}$$

che corrisponde a $\sigma = (4, 1, 2, 3)$ -

$$\text{sgn}(\sigma) = ?$$

Fatto:
$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Es: $(4, 1, 2, 3)$:

$$\frac{1-4}{2-1} \cdot \frac{2-4}{3-1} \cdot \frac{3-4}{4-1} \cdot \frac{2-1}{3-2} \cdot \frac{3-1}{4-2} \cdot \frac{3-2}{4-3}$$

Fatti (1) è un numero intero ± 1 perché per ogni $j-i$ il denominatore c'è $\pm (j-i)$ al numeratore.

$$(2) \quad \text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau).$$

Es: $n=5$

$$\sigma = (5, 1, 4, 2, 3)$$

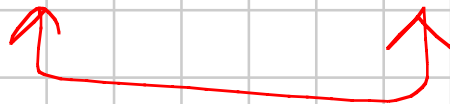
$$\tau = (4, 5, 3, 2, 1)$$

$$(\sigma \circ \tau) = (2, 3, \dots)$$

Esercizio: verificare $\text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau)$.

Chiamo Trasposizione una permutazione che è lo scambio di due interi:

$n = 8$ $(1, 2, 3, 7, 5, 6, 4, 8)$



Fatti: (1) $\text{sgn}(\text{Trasposizione}) = -1$ (ovvio)

(2) ogni permutazione si può esprimere

Come composizione di trasposizioni (evidente),
ma non in modo unico -

Riassunto:

- ogni permut. è composiz. di transp.
- $\text{sgn}(\text{Transp}) = -1$
- $\text{sgn}(\text{composiz}) = \text{prodotto delle sgn.}$

$$\Rightarrow \text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ è composiz. di numero} \\ & \text{pari di trasposizioni} \\ -1 & \text{se } \dots \text{dispari} \dots \end{cases}$$

Oss: il modo di esprimere $\sigma \in S_n$ come
composizion di traspo non è unico, ma la
parità del numero di traspo sù -

Es: Due strategie per riordinare uno scaffale
tramite trasposizioni

I. Il primo che vedo fuori posto lo scambio
con quello al suo posto

II. Non appena vedo i, j consecutivi con $i > j$
li scambio.

$(4, 3, 6, 2, 1, 5)$

I: $(4, 3, 6, 2, 1, 5)$

$\rightarrow (2, 3, 6, 4, 1, 5)$

$\rightarrow (3, 2, 6, 4, 1, 5)$

$\rightarrow (6, 2, 3, 4, 1, 5)$

$\rightarrow (5, 2, 3, 4, 1, 6)$

$\rightarrow (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

II: $(4, 3, 6, 2, 1, 5)$

$\rightarrow (3, 4, 6, 2, 1, 5)$

$\rightarrow (3, 4, 2, 6, 1, 5)$

$\rightarrow (3, 2, 4, 6, 1, 5)$

$\rightarrow (2, 3, 4, 6, 1, 5)$

$\rightarrow (2, 3, 4, 1, 6, 5)$

$\rightarrow (2, 3, 1, 4, 6, 5)$

$\rightarrow (2, 1, 3, 4, 6, 5)$

$\rightarrow (1, 2, 3, 4, 6, 5)$

$\rightarrow (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$\Delta g_k = -1$
(enfrawki dispari)

Formule di calcolo del $\det_n$:

$$\det_n(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

Conseguenze:

$$(1) \det({}^t A) = \det(A)$$

Spiegazione:

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$$

$$a_{\sigma(1), 1} \cdot a_{\sigma(2), 2} \cdots a_{\sigma(n), n}$$

$$a_{1, \tau(1)} \cdot a_{2, \tau(2)} \cdots a_{n, \tau(n)}$$

$\tau(1)$ è quell'indice j t.c.

$$\sigma(j) = 1, \text{ dunque } j = \sigma^{-1}(1)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^m a_{i, \sigma^{-1}(i)} = \dots$$

Osservo che : $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$

($\text{se } \sigma \text{ è composiz. di transp.}, \sigma^{-1} \text{ è composiz. delle stesse in ordine invertito}$)

$$\text{Inoltre } \{\sigma^{-1} : \sigma \in \mathfrak{S}_m\} = \mathfrak{S}_m$$

$$z \dots = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\tau) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \tau(i)} = \det(A).$$

(2) Sviluppo di Laplace.