Algebra Lineare 16/11/16

Sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$

$x_1, \dots, x_n$ incognite

m equazioni in n incognite

Posto $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

matrice (incompleta) del sistema

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ vettore dei termini noti)

il sistema si scrive come

$A \cdot x = b$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$ vettore incognito.

$\left(A \in \mathcal{M}_{m \times n} \, , \, b \in \mathbb{R}^m \right)$

"Risolvere $A \cdot x = b$" significa "trovare tutte le soluz."

ovvero esibire $\{ x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b \}$.

Chiamo $(A, b) \in \mathcal{M}_{m \times (n+1)}$ matrice completa del sistema.

Oss: $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ "è" $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

dunque $A \cdot x = b$ ha soluzione $\Longleftrightarrow$ $b \in \mathrm{Im}(A)$.

Q: come stabilire se $b \in \mathrm{Im}(A)$?

Def: un sistema $A \cdot x = b$ è detto quadrato se $m = n$ (A quadrata); sottodeterminato se $m < n$ (meno equazioni che incognite) sovradeterminato se $m > n$ (più equaz. che incognite).

Oss: Se $A \in M_{n \times n}$ ed è invertibile, ogni sistema $A \cdot x = b$ ha soluz. unica $x = A^{-1} \cdot b$.

Q : Come stabilire se $A \in M_{n \times n}$ è invertibile e come trovare in tal caso A^{-1}?

Risposta : da "determinante".

Def : se $f : V \to W$ è lineare chiamo rango di f, indicato $\mathrm{rank}(f)$, la dim. di $\mathrm{Im}(f)$.

In particolare è definito $\mathrm{rank}(A)$ se $A \in M_{m \times n}$ poichè $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Osservato: colonne di A generano $\mathrm{Im}(A)$
$\Rightarrow$ $\mathrm{rank}(A)$ è il massimo numero di elementi di un insieme lin. indip. di colonne di A.

"rank(A) = max num. di colonne lin. indip."

Teo (Rouché - Capelli):

$A \cdot x = b$ ha soluz. $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A, b) = \operatorname{rank}(A)$.

Dim: $A \cdot x = b$ ha soluz

$\Longleftrightarrow$ $b \in \operatorname{Im}(A)$

$\Longleftrightarrow$ $b \in$ Spazio generato dalle colonne di A

$\iff$ dim Span(colonne di A, b) = dim Span (col. di A)

$\iff$ rank (A, b) = rank(A). $\blacksquare$

Def: chiamo omogeneo un sistema del tipo $A \cdot x = 0$

Oss: le soluz. di $A \cdot x = 0$ sono $\mathrm{Ker}(A)$.

In particolare c'è sempre la soluz. 0

e l'insieme delle soluz. è sttsp. vett. di $\mathbb{R}^n$.

Oss: un sistema non omogeneo può non avere soluz.:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 1 \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_ \end{cases}$$

Prop: se x_0 è una soluzione di $A \cdot x = b$ allora $\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b\} = \{x_0 + u : u \in \ker A\}$.

"Se x_0 è una soluz. particolare di un sistema non omogeneo, la soluz. generale è data da x_0 + una soluz. generale del sistema omogeneo associato (quello con la stessa matrice)".

Es:
$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 6 \\ x + 4y - 7z = -2 \end{cases}$$

Sistema 2×3 (sottodeterminato) con matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

(non omogeneo).

Osservo che c'è la soluz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0 \\ x + 4y - 7z = 0 \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} x = -4y + 7z \\ -14y + \cancel{26z = 0} \end{cases} \qquad 13z = 7y$$

Soluzione generica $\quad t\begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$

Dunque l'insieme delle soluz. del sistema originale è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} \; : \; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

<u>Dim</u>: So che x_0 è soluz. cioè $A \cdot x_0 = b$.

x soluz. $\iff A \cdot x = b$

$\iff A \cdot x = A \cdot x_0$

$\iff A \cdot (x - x_0) = 0$

$\iff x = x_0 + u$ dove $A \cdot u = 0$. $\blacksquare$

<u>Oss</u>: un sistema omogeneo sottodeterminato ha sempre infinite soluzioni

(sottospazio $\mathrm{Ker}(A)$ ha $\dim \geq n-m$

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad m < n$$

$$n = \dim(\mathrm{Ker}\, A) + \underset{\leq m}{\dim(\mathrm{Im}\, A)}$$).

Con: un sistema sottodeterminato o non ha nessuna soluzione (impossibile) oppure ha infinite soluzioni.

Oss: un sistema quadrato o sovradeterminato può avere una, nessuna o infinite soluzioni.

Oss: da un sistema se ne ricava uno equivalente con operazioni di questo tipo:

- riordino delle equazioni
- sostituzione di una equazione con un multiplo non nullo di sé stessa più un multiplo di un'altra.

Perché la seconda? $\qquad t \neq 0$

$$\begin{cases} \omega \cdot x = \alpha \\ \lambda \cdot x = \beta \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{cases} \iff \begin{cases} t\omega x + s \cdot \lambda \cdot x = t\alpha + s\beta \\ \lambda \cdot x = \beta \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ ovvio

$$\Longleftarrow : \frac{1}{t}\left(t\omega x + s\lambda x\right) - \frac{s}{t}\lambda x = \frac{1}{t}(t\alpha + s\beta) - \frac{s}{t}\beta$$

dunque $\omega x \cancel{+ \frac{s}{t}\lambda x} \cancel{- \frac{s}{t}\lambda x} = \alpha \cancel{+ \frac{s}{t}\beta} \cancel{- \frac{s}{t}\beta}$

Q : come trovare A^{-1} se esiste? (A quadrata)

Q : come trovare rank (A) (A qualsiasi)

Cerchiamo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$.

Cioè cerchiamo $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ t.c.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè $\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

cioè

$$(*) \quad \begin{cases} ax+bz = 1 \\ ay+bw = 0 \\ cx+dz = 0 \\ cy+dw = 1 \end{cases}$$

Supponiamo che una soluz. ci sia e troviamola:

$$(*) \Longrightarrow \begin{cases} ay = -bw \\ dz = -cx \\ adx + bdz = d \\ acy + adw = a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ay = -bw \\ dz = -cx \\ adx - bcx = d \\ -bcw + adw = a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ay = -bw \\ dz = -cx \\ (ad - bc)x = d \\ (ab - bc)w = a \end{cases}$$

Se $ad - bc = 0$ ho anche $a = d = 0$,
dunque anche uno tra b e c deve essere 0.

Ciò è impossibile, dunque devo avere $ad-bc \neq 0$ e in tal caso ho

$$\begin{cases} ay = -bw \\ dz = -cx \\ x = \dfrac{d}{ad-bc} \\ w = \dfrac{a}{ad-bc} \end{cases}$$

Cerco y: se $a \neq 0$ ho $y = \dfrac{-bw}{a} = \dfrac{-b}{ad-bc}$;

se $a=0$ poiché $ad-bc\neq 0$ devo avere $c\neq 0$,

e uso $cy+dw=1$ da cui

$$y=\frac{1}{c}(1-dw)=\frac{1}{c}\left(1-d\cdot\frac{a}{ad-bc}\right)$$

$$=\frac{1}{c}\ \frac{ad-bc-ad}{ad-bc}=\frac{-b}{ad-bc}$$

Analogamente $z=\dfrac{-c}{ad-bc}$.

Abbiamo visto che: se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile

allora $ad - bc \neq 0$ e $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Viceversa se $ad - bc \neq 0$ allora

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-dc & -cb+ad \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ è l'inversa di $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

<u>Teo</u>: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile $\iff ad-bc \neq 0$;

in tal caso $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

<u>Def</u>: chiamo $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

(determinante).

(Volendo enfatizzare che è il det di una 2×2 scrivo $\det_2$).

Caso 1×1: $\quad M_{1\times 1}(\mathbb{R}) \ni a \qquad a \in \mathbb{R}$

$\exists a^{-1} \iff a \neq 0$ dunque poniamo $\det_1(a) = a$.

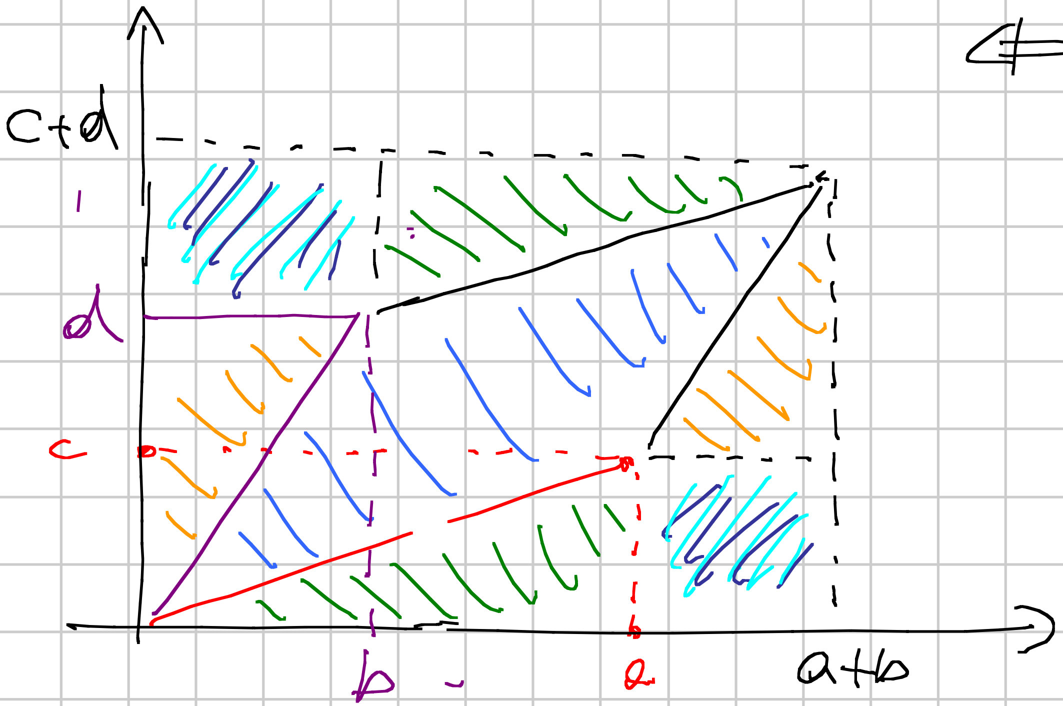
Costruzione geometrica del $\det_2$:

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Sappiamo: M invertibile $\iff$ iniettiva $\iff$ suriettiva

$\iff$ colonne base di $\mathbb{R}^2$

$\iff$ colonne lin. indip.

$\iff$ area $\neq 0$



Calcoliamola:

$(a+b)\cdot(c+d)$

$-\frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}ac$

$-\frac{1}{2}bd - \frac{1}{2}bd$

$-bc - bc$

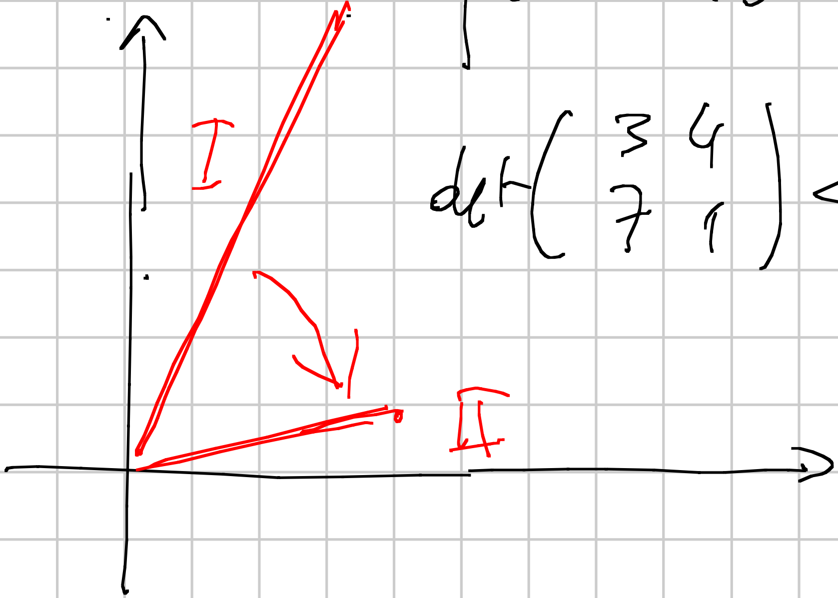
$$= \cancel{ac} + ad + \cancel{bc} + \cancel{bd} - \cancel{ac} - \cancel{bd} - \cancel{2}bc$$

$$= \underbrace{ad - bc}$$

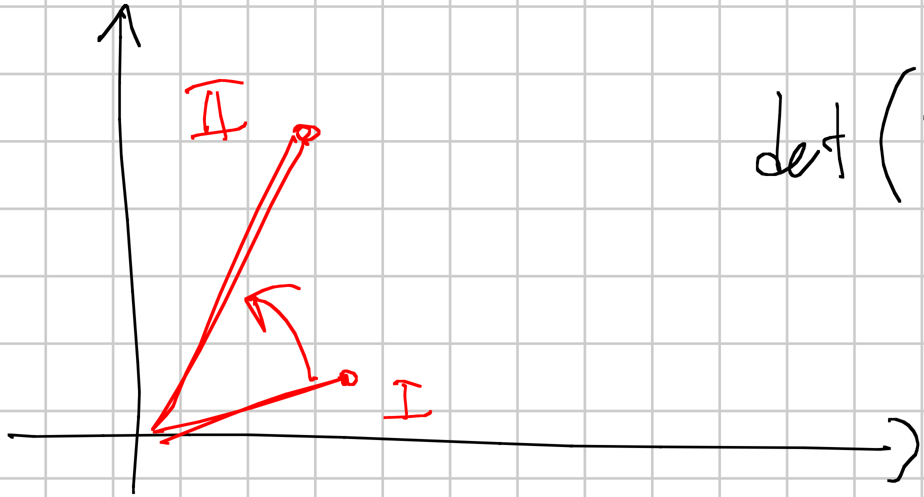
area del parallelogramma
che ha colonne di $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
come lati

$$\det_2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = -25$$

$\Longrightarrow$ dunque viene l'area con segno:



$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} < 0$



$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} > 0$

rotazione di angolo convesso da I a II

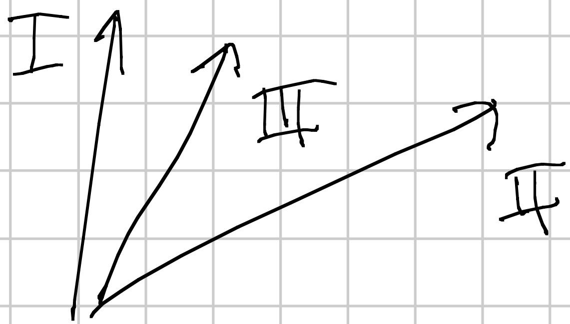
orario $\leadsto$ $-$

antiorario $\leadsto$ $+$

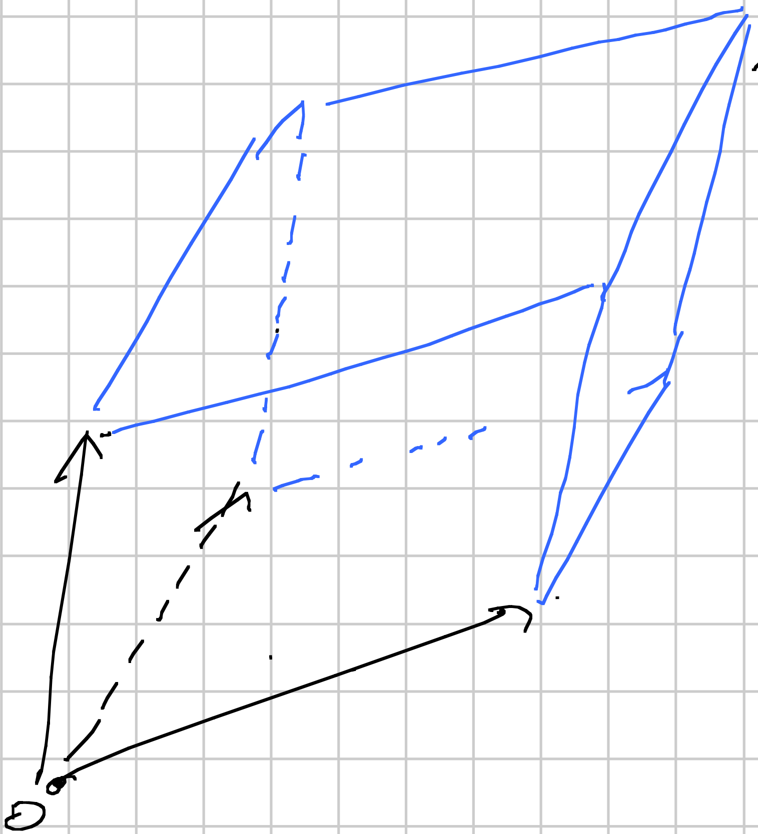
Come trovare $\det_n(A)$ $\quad A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ -

Costruzione geometrica si può estendere:

$n = 3$:



col. lin. dip. $\Longleftrightarrow$ stanno su uno stesso piano



$\Longleftrightarrow$ area del parallelepipedo che loro come lati è 0.

calcolo analogo al caso 2x2 dà

Regola di Sarrus:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Att: $\det_4 \left(\quad \right)$

NO