Esercitazione 16/11

5.1.2. Verificare che l'applicazione assegnata è lineare ed esibire nucleo e immagine.

(h) $f: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \to M_{n \times n}(\mathbb{R})$ $f(A) = A + A^t$.

- f è lineare $f(A+B) = (A+B) + (A+B)^t = \underbrace{(A + A^t)}_{f(A)} + \underbrace{(B+B^t)}_{f(B)}$

$$f(\lambda A) = (\lambda A) + (\lambda A)^t = \lambda(A + A^t) = \lambda \cdot f(A)$$

- $\mathrm{Ker}(f)$ $\quad f(A)=0 \Leftrightarrow A+A^t=0 \Leftrightarrow A=-{}^tA \Leftrightarrow A\in A_n$

$A_n=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A=-A^t\}$

- $\mathrm{Im}(f)=S_n=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A=A^t\}.$

$\mathrm{Im}(f)\subseteq S_n.$ $\quad \forall A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\quad f(A)=A+{}^tA\in S_n$

$(A+A^t)_{ij}=(A)_{ij}+(A^t)_{ij}=(A)_{ij}+(A)_{ji}=(A+{}^tA)_{ji}$

- $S_n \subseteq \mathrm{Im}(f)$. Sia $A \in S_n$ $(A = {}^tA)$

$$A = f\left(\frac{1}{2}A\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{A + {}^tA}_{2\cdot A}\right)$$

(i) $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $f(A) = A - A^t$.

- $\mathrm{Ker}(f) = S_n$ e $\mathrm{Im}(f) = A_n$ (esercizio)

(l) $f : \mathbb{R}_{\leq d}[t] \to \mathbb{R}_{\leq d}[t]$ $\quad f(p(t)) = p'(t)$

Se $p(t) = \sum_{n=0}^{d} a_n t^n$, $f(p(t)) = p'(t) = \sum_{n=1}^{d} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$

- Verificare che f è lineare.

- $\mathrm{Ker}(f)$: $f(p(t)) = 0 \iff n \cdot a_n = 0 \quad \forall n = 1, \dots, d \iff a_n = 0 \quad \forall n = 1, \dots, d$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{c \in \mathbb{R}\} = \{p(t) : \deg(p(t)) = 0\} \cup \{0\}$

- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{\leq d-1}[t]$

$\subseteq$

$$\underset{d+1}{\underset{\|}{\dim(\mathbb{R}_{\leq d}[t])}} - \underset{1}{\underset{\|}{\dim(\mathrm{Ker}(f))}} = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{d}$$

Base per $\mathbb{R}_{\leq d}[t]$: $\{1, t, t^2, \dots, t^d\}$

Es. 5.1.3. Che dimensione può avere l'immagine di un'applicazione $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^9$ tale che $f(e_1 + 2e_4 - 7e_5) = f(3e_2 + e_3 + e_4) = 8e_1 - e_9$

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 5 - \dim(\mathrm{Ker}(f))$

Notiamo $1 \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)) \leq 4 \Rightarrow 1 \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 4$

formula dimensione

5.1.4. Se $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$ lineare verifica $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$, e $Z \subseteq \mathbb{R}^8$ è sottospazio tale che $Z \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, che dimensione può avere Z?

Per formula dimensione, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 5 - \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{=2} = 3$

Per Grassmann $\underbrace{\dim(Z + \mathrm{Im}(f))}_{\leq 8} = \dim(Z) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=3} - \underbrace{\dim(Z \cap \mathrm{Im}(f))}_{=0}$

$$0 \le \dim(Z) \le 5$$

$$3 \le \dim(Z + Im(f)) \le 8$$

Es. 5.1.5. Se $f: \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^7$ verifica $\dim(Im(f)) = 5$, e $X \subseteq \mathbb{R}^{11}$ tale che $X + Ker(f) = \mathbb{R}^{11}$, che dimensione può avere X.

Per formula dimensione $\underbrace{\dim(Im(f))}_{5} = 11 - \dim(Ker(f)) \Rightarrow \dim(Ker f) = 6$

Per Grassmann

$$\dim(\underset{\substack{\shortparallel \\ 11}}{X+\mathrm{Ker} f}) = \dim(X) + \dim(\underset{\substack{\shortparallel \\ 6}}{\mathrm{Ker}(f)}) - \dim(X \cap \mathrm{Ker}(f))$$

$$\dim(X) \geq 5$$
$$\shortmid\!\wedge$$
$$11$$

$$\rightarrow \dim(X) = \underbrace{11 - 6 + \dim(X \cap \mathrm{Ker}(f))}_{5+\dim(X\cap \mathrm{Ker}(f))}$$

Ripasso su somma diretta: V spazio vettoriale, $W, Z \subset V$ sottospazi

V è somma diretta di W e Z $(V = W \oplus Z)$ se

1) $V = W + Z$

2) $W \cap Z = \{0\}$

$\rightarrow$ ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in Z$

In particolare $\dim(V) = \dim(W) + \dim(Z)$ (per Grassmann).

Es. 5.2.1. Data $f: \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^6$ lineare e sottospazi $X \subset \mathbb{R}^7$, $Y \subset \mathbb{R}^6$, sapendo che $\dim(Y) = 2$, $\mathbb{R}^7 = X \oplus \mathrm{Ker}(f)$, $\mathbb{R}^6 = Y \oplus \mathrm{Im}(f)$, calcolare $\dim(X)$

Poiché $\mathbb{R}^6 = Y \oplus Im(f)$, $6 = \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{dim(Y)} + dim(Im(f)) \Rightarrow dim(Im f) = 4$

Formula dimensione $7 - dim(Ker f) = \underset{\overset{\shortparallel}{4}}{dim(Im(f))} \Rightarrow dim(Ker f) = 3$

$\mathbb{R}^7 = X \oplus Ker(f)$, segue $7 = dim(X) + \underset{\overset{\shortparallel}{3}}{dim(Ker(f))} \Rightarrow dim(X) = 4$