Esercitazione 14/12/16

8.5.1.

Sia $V = \{ z \in \mathbb{C}^4 : i z_1 + (1-i) z_2 - 2 z_3 + (i-1) z_4 = 0 \}$ $*$

Sia $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$. Verificare che $v_1 \in V$, e completarlo a una base di V.

- $v_1 \in V$. $\rightsquigarrow$ sostituire le coordinate di v_1 al posto di z_1, z_2, z_3, z_4 in $*$

$2i + (1-i)i - 2(1+i) - (i-1) = 2i + 1 + i - 2 - 2i - i + 1 =$

$\underbrace{(1-2+1)}_{\text{parte reale}} + i\underbrace{(2+1-2-1)}_{\text{parte immaginaria}} = 0$

- Notiamo che $\dim V = 3$
- Prendiamo $v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Notiamo che $v_2 \in V$

e $\{v_1, v_2\}$ sono linearmente indip. $\rightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \cdot v_2 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1 \neq \lambda \cdot v_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ sono lin. indip.

- Aggiungiamo $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i-1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $v_3 \in V$.

Verifichiamo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti

Equivalentemente verifichiamo che

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ i & -i & 0 \\ 1+i & 0 & i-1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$\rightarrow$ questo minore 3×3 ha rango 3

$$\det\begin{pmatrix} i & i & 0 \\ 1+i & 0 & i-1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = i \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & i-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + i \cdot \left[2(1+i) + i - 1 \right] =$$

$$\underset{0}{\shortparallel}$$

$$i\,(2+2i+i-1) \neq 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ ha dim. 3 e quindi coincide con V

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ sono una base di V.

8.5.2.

Provare che $V = \{ z \in \mathbb{C}^4 : 2i z_1 + (i-1) z_2 + (i-1) z_3 + 3 z_4 = 0 \}$ e' generato dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 3i \\ 2i \\ 3-i \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6i-3 \\ 4i-2 \\ 3-i \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ i \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$

$v_4 = \begin{pmatrix} 3+i \\ 3+5i \\ 6+2i \\ 2-4i \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} -i \\ 1+2i \\ 2-i \\ -2/3 \end{pmatrix}$, ed estrarre una base di V.

- Notiamo che i vettori v_i appartengono a V.

$\mathrm{Span}\{v_i, i=1..5\} \subset V$

- $\dim V = 3$. Per concludere basta trovare 3 vettori linearmente indipendenti tra i v_i.

$\{v_1, v_2\}$ sono linearmente indipendenti. (non sono multipli l'uno dell'altro)

$\hookrightarrow$ hanno l'ultima coordinata uguale, ma le altre coordinate sono diverse.

- Per concludere, notiamo che $v_3 \notin \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$.

Sia $W = \{ z \in \mathbb{C}^4 : 2z_2 = 3z_3 \}$

Notiamo che $v_1, v_2 \in W \Rightarrow \text{Span}\{v_1, v_2\} \subset W$.

- Inoltre $v_3 \notin W$, per cui $v_3 \notin \text{Span}\{v_1, v_2\}$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti, e quindi sono una base di V.

8.5.3 Calcolare l'inversa della matrice assegnata

(a) $\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -i \\ 1+i & 2-i \end{pmatrix}}_{A}$ $\det(A) = 4(2-i) + i(1+i) = 8-4i+i-1 = 7-3i \neq 0$

Per matrici 2x2 invertibili (coeff. in $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$) vale che

Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

In questo caso $A^{-1} = \frac{1}{7-3i} \begin{bmatrix} 2-i & i \\ -1-i & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ 2i & 1+3i & -1 \\ 2+i & 1+i & 3i \end{pmatrix}$

$\parallel$

A

Data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ invertibile

La colonna i-esima di A^{-1} è il vettore x soluzione di

$$Ax = e_i$$

↳ i-esimo vettore della base canonica

In questo caso, la prima colonna di A^{-1} è il vettore $\overset{z}{\vee}$ soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} z_1 + i z_2 + (1-i) z_3 = 1 \\ 2i z_1 + (1+3i) z_2 - z_3 = 0 \\ (2+i) z_1 + (1+i) z_2 + 3i z_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow A^{-1} \begin{bmatrix} z_1 & * & * \\ z_2 & * & * \\ z_3 & * & * \end{bmatrix}$$

Per $(A^{-1})_{11}$, usando Rouché-Capelli otteniamo

$$(A^{-1})_{11} = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & i & 1-i \\ 0 & 1+3i & -1 \\ 0 & 1+i & 3i \end{bmatrix}$$