Esercitazione 9/11/16

Es. 4.5.2. Dati W, Z s.s.v. di V. Determinare le dimensioni di $W \cap Z$ e $W + Z$, W, Z.

$$V = \mathbb{R}^4. \quad W = \mathrm{Span}\left(\underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{w_3}{\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right),$$

$$Z = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{matrix} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{matrix} \right\}.$$

- $\dim W \stackrel{?}{=} 3$. (Verificare che $\{w_1, w_2, w_3\}$ sono lin. indip.)

- $\dim Z = 2$

- Per Grassmann i casi possibili sono 2:

1) $\dim(W+Z) = 4$ e $\dim(W\cap Z) = 1$

2) $\dim(W+Z) = 3$ e $\dim(W\cap Z) = 2 \iff Z \subset W$

Mostriamo che siamo nel caso (1), trovando un vettore $v_4 \in Z$ t.c. $v_4 \notin W$.

$$v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 \in Z.$$

Si verifica che $\{w_1, w_2, w_3, v_4\}$ sono lin. indip.

$\Rightarrow v_4 \notin \text{Span}(\{w_1, w_2, w_3\}) = W \Rightarrow Z \not\subset W. \Rightarrow$ Caso (1)

$\dim(W+Z) = 4. \quad \dim(W \cap Z) = 1.$

4.5.3. $V = \mathbb{R}^4$.

$$W = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \\ -5x_1 - 8x_2 + 21x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$Z = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

• $\dim Z = 2$ • $\dim W = 2$ $\to$ Attenzione

$$\underbrace{\mathrm{Span}\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 21 \\ 11 \end{pmatrix}} \right\}}_{\text{vettori coefficienti delle equazioni che definiscono } W} \text{ ha dim. } 2$$

$\to 2v_1 - 3v_2 = v_3$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$W\cap Z=\left\{x\in\mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=0\\ 3x_1+2x_2-5x_3-x_4=0 \end{array}\right\}\to x\in W \\ \left.\begin{array}{l} x_1+3x_2-2x_3+5x_4=0\\ 3x_1+2x_2-2x_3+4x_4=0 \end{array}\right\}\to x\in Z \end{array}\right\}$$

Il sistema che definisce $W\cap Z$ ha soluzioni

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}16t\\ 53t\\ 35t\\ -21t\end{pmatrix}\middle|\ t\in\mathbb{R}\right\},=\operatorname{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix}16\\ 53\\ 35\\ -21\end{pmatrix}\right\}\right).$$

Quindi $\dim(W \cap Z) = 1$, $\dim(W+Z) = 3$ per Grassmann.

4.5.4. $V = \mathbb{R}^5$, $W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \shortparallel \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} v_2 \\ \shortparallel \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow \dim W = 2$

$$Z = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{l} x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \dim Z = 3$$

- Notiamo che $v_1 \notin Z$, $\Rightarrow W \not\subseteq Z$

$\Rightarrow$ i casi possibili sono 2.

(1) $W \cap Z = \{0\} \iff \dim(W+Z) = 5 \quad (W+Z = \mathbb{R}^5 = V)$

(2) $\dim(W \cap Z) = 1 \iff \dim(W+Z) = 4$

Vale la (1). Costruiamo una base per Z.

$$z_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{z_1, z_2, z_3\}$ sono base per Z

$\{v_1, v_2, z_1, z_2, z_3\}$ sono un sistema di generatori per $W+Z$

Inoltre sono linearmente indipendenti.

$\dim(W+Z) = 5$ e $W \cap Z = \{0\}$.

Es. 5.1.2. Verificare che l'applicazione assegnata è lineare ed esibire nucleo e immagine.

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

In generale

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ rappresentata da

$$f(x) = A \cdot x \quad \text{dove} \quad A \in M_{n \times m}(\mathbb{R}), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Ripasso: $f: V \to W$ lineare. $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\left(\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}\right)$$

Sia e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\left\{ f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} = \overbrace{\left\{ \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \right\}}^{\mathrm{span}} = \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow f$ è surgettiva

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Formula dimensione:

$f: V \to W$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim(\operatorname{Im} f)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 3}}{\dim V} - \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\dim(\operatorname{Ker} f)}$$

(b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_2 + 11x_3 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

$f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ non sono lin. indip.

$* \; 6 \cdot f(e_1) - 11 \cdot f(e_2) + f(e_3) = 0 \Rightarrow f(e_3) \in \operatorname{Span}\{f(e_1), f(e_2)\}$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 2 \Rightarrow$ (formula dimensione) $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v} \right\}$$

$v = 6 \cdot e_1 - 11 e_2 + e_3 \quad f(v) = 6 \cdot f(e_1) - 11 \cdot f(e_2) + f(e_3) = 0$ per $*$