Algebra Lineare 8/11/16

$$\mathcal{L}(V,W) = \{h : V \to W \text{ lineare}\}$$

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V

$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ base di W

dati $\quad \mathcal{L}(V,W) \ni h \longmapsto A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$

lineare bijettive

così ottenuto:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\phi_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\phi_{\mathcal{C}} \circ h \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

so che $\phi_{\mathcal{C}} \circ h \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1} = f_A$. Cioè se chiamo $g = \phi_{\mathcal{C}} \circ h \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}$ per costruzione A è la matrice t.c. $g(e_j^{(n)}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i^{(m)}$

Ora per def. di coordinate $\phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_j^{(n)}) = v_j$

e $e_i^{(m)} = w_i$ dunque la mappa

$$\mathcal{L}(V,W) \ni h \longmapsto A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

è data da: A è la matrice t.c.

$$h(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad \begin{array}{l} \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \\ \mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m) \end{array}$$

La chiamo matrice associata ad h

rispetto a $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo,
e la indico con $[h]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

Ricordo: le coord di v rispetto a $\mathcal{B}$ sono $[v]_{\mathcal{B}}$;
quindi passare da h a $[h]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ è come
"esprimere h in coordinate".

Leggiamo la " $h(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ " :

nella j-esima colonna della matrice associata ci sono le coordinate rispetto alla base in arrivo dell'immagine del j-esimo elem. della base in partenza.

Es: $h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + 4z \\ 2x + 5y - 7z \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right);$$

Calcoliamo $[h]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ ($n = 3$, $m = 2 \Rightarrow$ sarà una matrice 2×3);

<u>I col</u>: $h\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1-4 \\ 4+5+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix} = -47 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + 110 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -47 & \cdot & \cdot \\ 110 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

II col: $h\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9-4+8\\-6+20-14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}-47 & -5 & \cdot\\110 & 10 & \cdot\end{pmatrix}$$

Prop: $h: V \to W$, $\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{C}$ base di W,
$v \in V \Longrightarrow [h(v)]_{\mathcal{C}} = [h]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$.

Cioè: l'azione di h sui vettori corrisponde all'azione della matrice associata a h sulle coordinate (<u>Se</u> uso le stesse basi).

<u>Dim</u> (seguirebbe anche da sopra):

$[h]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A$ se $h(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$.

$[v]_{\mathcal{B}} = x$ se $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$

$$\Rightarrow h(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, h(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)}_{(A \cdot x)_i} w_i$$

$$\longrightarrow \quad [h(v)]_{\mathcal{C}} = A \cdot x .$$

$\boxtimes$

Prop: $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$\Longrightarrow \quad [f_A]^{\mathcal{E}^{(m)}}_{\mathcal{E}^{(n)}} = A.$$

Aoe:

$$\begin{tikzcd} M_{m \times n}(\mathbb{R}) \arrow[r, bend left, "A \longmapsto f_A"] & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$$[h]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \longleftrightarrow h$$

se $\mathcal{B}$ è base di $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}$ base di $\mathbb{R}^m$

in generale $A \longmapsto f_A \longmapsto [f_A]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = A'$

A' sarà diversa da A; però se uso

$\mathcal{B} = \mathcal{E}^{(n)}$ $\quad \mathcal{C} = \mathcal{E}^{(m)}$ invece ho $A' = A$.

Dim: sappiamo che $f_A\left(e_j^{(n)}\right) = j$-esima col. di A.

$\Rightarrow$ le sue coord. risp. a $\mathcal{E}^{(m)}$ sono uno stesso. $\square$

Es: la h dell'esempio era $h = f_A$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$[f_A]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -47 & -5 & \vdots \\ 110 & 10 & \vdots \end{pmatrix}$$

Il fatto che $[f_A]_{\mathcal{E}^{(n)}}^{\mathcal{E}^{(m)}} = A$ suggerisce di scrivere semplicemente A invece di f_A, dunque di pensare una matrice $m \times n$ oltre che come matrice anche come applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

— o —

Visto: $\dim V = n$, $\dim W = m$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{L}(V,W)) = n \cdot m$.

Altro modo di vederlo:

Prop: se $v_1, \dots, v_n$ è base di V e

$u_1, \dots, u_n \in W$ sono vettori qualsiasi

esiste una e una sola $f: V \to W$ lineare t.c. $f(v_j) = u_j \quad j = 1 \dots n$.

Cioè: una applicaz. lineare può essere arbitrariamente definita su una base e resta univocamente determinata

Dim: chiamo $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$;

dato $v \in V$ devo definire $f(v)$;

se $[v]_{\mathcal{B}} = x$ cioè $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$;

pongo allora $f(v) = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$.

Tale f è ben def. ed è l'unica che può andare bene : devo provare che è lineare.

Siano $v, z \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda v + \mu z) \overset{?}{=} \lambda f(v) + \mu f(z)$$

Se $[v]_{\mathcal{B}} = x$, $[z]_{\mathcal{B}} = y$ ho $f(v) = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

$$f(z) = y_1 u_1 + \dots + y_m u_m$$

$$\Longrightarrow \lambda f(v) + \mu f(z) = (\lambda x_1 + \mu y_1) u_1 + \cdots$$

So già $[\lambda v + \mu z]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot x + \mu \cdot y$

$$\Longrightarrow f(\lambda v + \mu z) = (\lambda x + \mu y)_1 \cdot u_1 + \cdots \quad \blacksquare$$

Ne segue nuovamente che $\dim(\mathcal{L}(V,W)) = n \cdot m$

perché fissata $(v_1, \dots, v_n)$ base di V

$$\underbrace{W \times \cdots \times W}_{n \text{ volte}} \ni (u_1, \dots, u_n) \longmapsto f \in \mathcal{L}(V,W)$$

come nella Prop

$\dim = n \cdot m$

è lineare bijettiva

Q: come cambiano $[v]_{\mathcal{B}}$ se cambio $\mathcal{B}$?

Q: come cambia $[h]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ se cambio $\mathcal{B}, \mathcal{C}$?

Richiamo: $f: X \to Y$ funzione tra insiemi è <u>invertibile</u> se esiste $g: Y \to X$ t.c.

$g \circ f : X \longrightarrow X$ è id_X

$f \circ g : Y \longrightarrow Y$ è id_Y

(cioè $(g \circ f)(x) = x \quad \forall x$

$(f \circ g)(y) = y \quad \forall y$)

Tale g è detta inversa di f e indicata f^{-1}.

<u>Esercizi</u>: (1) f invertibile $\Longleftrightarrow$ bigettiva

(2) l'inversa è unica

(3) $g \circ f = id_X \Longrightarrow g$ surgettiva, f iniettiva

ma non è detto che siano invertibili; se lo sono allora $g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$.