Esercitazione 7/12

6.1.1. Risolvere il sistema lineare dato (trovarne tutte le soluzioni).

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 26 \\ -3x + 2y + 7z = 17 \\ 4x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

Per Rouché capelli, soluzione esiste

$\Leftrightarrow$ rango(A) = rango$(A|b)$

A: matrice associata ai coeff. del sistema

b: vettore dei termini noti

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad . \quad \text{rango}(A) = 3$$

$$\text{rango}(A|b) = \text{rango} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 26 \\ -3 & 2 & 7 & 17 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] = 3$$

$\Rightarrow$ una soluzione particolare esiste.

Ad esempio $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = v$

Dato sistema $Ax = b$ le soluzioni sono date (se ve ne sono) dai vettori della forma $v + W$

soluzione particolare

sp. vettoriale definito da $Ax=0$

In questo caso rango$(A) = 3$

$\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $Ax=0$ ha solo la soluzione $x=0$

$\Rightarrow$ $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e' l'unica soluzione del sistema.

6.1.2.

$$\begin{cases} 4x - 3y + 7z = 2 \\ -3x + 5y + z = -1 \\ 10x - 13y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$\operatorname{rank}\left(\overset{A}{\overset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ -3 & 5 & 1 \\ 10 & -13 & 5 \end{bmatrix}}} \right) = 2$$

$$\operatorname{rk}\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 7 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & -1 \\ 10 & -13 & 5 & 5 \end{array}\right] \right) = \text{rango}\left(\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 10 & -13 & 5 \end{array}\right] \right) \overset{\det \neq 0}{=} 3$$

$\Rightarrow$ Per Rouché-Capelli il sistema non ha soluzioni

6.1.4. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, stabilire quante sono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (1-t)x + 2y - 2z = 1 \\ (1+t)x + 3y + z = t \\ 7x + 12y + 2tz = -1 \end{cases}$$

$$A_t = \begin{bmatrix} 1-t & \boxed{\begin{matrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{matrix}} \\ 1+t & \\ 7 & 12 \quad 2t \end{bmatrix}$$

minore 2x2 t.c. $\det \neq 0$

$\operatorname{rank}(A_t) \geq 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\det(A_t) = -10t^2 - 10t + 20$

$\operatorname{rank}(A_t) = 2 \iff \det(A_t) = 0 \iff t^2 + t - 2 = 0 \iff t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

- Per $t \neq \{1, -2\}$ $\operatorname{rank}(A_t) = 3 \Rightarrow$ Il sistema $A_t x = b_t$ ha esattamente una soluzione (dipende da t)

- Caso $t = 1$. Il sistema diventa $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 12 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}\left(\left[\, A \,\middle|\, b \,\right]\right) = \operatorname{rank}\left(\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 12 & 2 & -1 \end{array}\right]\right) = 3$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & -1 \end{matrix}}_{\det \neq 0}$$

Per Rouché-Capelli il sistema non ha soluzioni per $t=1$

- Caso $t = -2$

In questo caso $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 7 & 12 & -4 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\text{rank}\left(\left[A \mid b\right]\right) = 2 = \text{rank}(A) \Rightarrow$ Il sistema ha infinite soluzioni della forma

$v + W$

soluzione particolare

soluzioni del sistema $Ax = 0$

W ha dimensione $3 - \underbrace{\text{rank}(A)}_{=2} = 1$ Una soluzione particolare

e' data da

$$v = \begin{pmatrix} 7/11 \\ -5/11 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

Le soluzioni sono i vettori della forma

$$\left\{ \overset{v}{\begin{pmatrix} 7/11 \\ -5/11 \\ 0 \end{pmatrix}} + \overbrace{\lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}}^{W} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Calcolare il determinante della matrice data:

6.2.9. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ In generale per matrici 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = ad - bc$$

$$\rightarrow \det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = 3 \cdot 7 - (-5 \cdot 4) = 21 + 20 = 41$$

6.2.10. $\begin{pmatrix} 1+t & -1+2t \\ 6+5t & 2-t \end{pmatrix} = A_t$ $\quad \det(A_t) = (1+t)(2-t) - (6+5t)(-1+2t) =$

$= 8 - 6t - 11t^2$

Per matrici 3×3 regola di Sarrus

Per matrici di ordine più grande, notiamo che:

1) Le seguenti operazioni non cambiano il determinante di una matrice:

- Sostituire la riga (colonna) i-esima con se stessa + un multiplo di un'altra riga (colonna).

- Sviluppo di Laplace, $\forall i = \{1, \dots, n\}$ $\quad A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} \det(A^{ji})$$

sottomatrice ottenuta rimuovendo i-esima riga e la j-esima colonna

- Per matrici triangolari superiori (inferiori), il determinante e' il prodotto degli elementi sulla diagonale.

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

6.2.15. (a)

det

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = B$$

1a colonna ha solo un coefficiente non nullo (a_{21})

$\rightarrow$ sviluppo di Laplace lungo 1ª colonna

$$\det(A) = \det(B) = (-1)\cdot\det\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_{B^{21}}\right) =$$

$$= -\left(5\cdot 8 - 2\cdot 19\right) = -2$$

Sottospazi affini: Trovare una rappresentazione cartesiana del sottospazio affine E, assegnato in forma parametrica. $\quad v + \mathrm{Span}(\{w\})$

7.1.9. $E \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad E : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$ $\quad E = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{= v} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}}_{= w} \right\}$

1) Trovare equazione cartesiana per $\mathrm{Span}\left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}}^{= w} \right\}$

$$\begin{bmatrix} 2 & x \\ \boxed{5} & y \\ \boxed{-3} & z \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 2R_2 - 5R_1} \begin{bmatrix} 2 & x \\ 0 & 2y - 5x \\ 3 & z \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 2R_3 + 3R_1} \begin{bmatrix} 2 & x \\ 0 & 2y - 5x \\ 0 & 2z + 3x \end{bmatrix}$$

Notiamo che $w \in V_1 = \{ \cancel{x} \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 - 2y = 0 \}$

$$w \in V_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 5z + 3y = 0\}$$

$$2y - 5x = 0$$
$$2z + 3x = 0$$

$$\text{Span}\{w\} = V_1 \cap V_2 \qquad \text{Span}\{w\} = \begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 5z + 3y = 0 \end{cases}$$

Per ottenere le equazioni che definiscono lo spazio affine E, sostituiamo alle incognite del sistema omogeneo le coordinate del vettore $v \in E$ noto.

Otteniamo $E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 5x - 2y = 11 \\ 5z + 3y = 1 \end{array}\right\}$

7.1.10.

$E \subseteq \mathbb{R}^3 \quad E: \begin{cases} x = 1 + t - 2s \\ y = 3 + 2t - 5s \\ z = 4 + 2t + 3s \end{cases}$

$$E = \left\{ \underset{v}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}} + t \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}} + s \underset{w_2}{\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}} \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Cerchiamo equazione per $W = \operatorname{Span}\{w_1, w_2\}$

- $\left[w_1 \middle| w_2 \middle| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & -5 & y \\ -2 & 3 & z \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_2 + R_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & -5 & y \\ 0 & -2 & y+z \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 2R_1]{}$

Facciamo operazioni di riga per annullare questi coefficienti

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & -2 & y+z \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & 0 & \boxed{4x-y+z} \end{bmatrix}$$

0 0 espressione lineari in x, y, z

$$\operatorname{Span}(\{w_1, w_2\}) = \{v \in \mathbb{R}^3 : 4x - y + z = 0\}$$

$$E = \{v \in \mathbb{R}^3 : 4x - y + z = 5\}$$

Sostituiamo v soluzione particolare nel sistema omogeneo per ottenere il termini noti.