

Algebra Lineare 4/10/16

$V \cong \mathbb{P}. \text{vett. sp}$

$$V \times V \rightarrow V \quad (+)$$

$$\mathbb{R} \times V \rightarrow V \quad (\cdot)$$

t.c.

1-4 $V, 0, +$ gruppo commut

5. "assoc. d."

6/7 "distrib."

8. $1 \cdot v = v$.

Esempio: $M_{m \times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_n : \cdot \in \mathbb{R} \right\}$

Convenzione:

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ pongo

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

indice di riga $\swarrow$ $\nwarrow$ *indice di colonna*

$$\| \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right)_{ij} \|$$

= vai a leggere nella matrice che c'è al posto di $\cdot$ il coeff nella cella su riga i e col. j .

es: $A = \begin{pmatrix} \pi & \sqrt{7} & -2 \\ 4 & 19 & 17e \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$$(A)_{12} = \sqrt{7}$$

$$(A)_{23} = 1 + e$$

Def $L: + e \cdot :$

$$+ : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$$



nuovo +
che definisco



vettori +
tre numeri

$$\cdot : \mathbb{R} \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$(A \cdot A)_{ij} = A \cdot (A)_{ij}$$

↑
nuovo

↑
vecchio

$$0 \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$(0)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Verifica delle proprietà:

$$1. \quad 0 + A = A \quad \forall A$$

Sono entrambe in $M_{m \times n}$; dove vedete che

$$(0 + A)_{ij} = (A)_{ij}$$

// def di +

$$(0)_{ij} + (A)_{ij}$$

// def di 0

$$0 + (A)_{ij}$$

Vera padre 0 è el. matrici
 $a_{ij} + m \in \mathbb{R}$

7. Devo vedere che

$$\lambda \cdot (A+B) = \cancel{(\lambda \cdot A)} + \cancel{(\lambda \cdot B)}$$

sono matrici $m \times n$.

Barke allora vedo che

$$(\lambda \cdot (A+B))_{ij} = (\lambda \cdot A + \lambda \cdot B)_{ij} \quad \forall i,j$$

" def di. " def di +

$$1 \cdot (A+B)_{ij}$$

" def $d' +$

$$(1 \cdot A)_{ij} + (1 \cdot B)_{ij}$$

" $2 \times \text{def.}$

$$1 \cdot ((A)_{ij} + (B)_{ij})$$

$$1 \cdot (A)_{ij} + 1 \cdot (B)_{ij}$$

uguali per la distributiva in $\mathbb{R}$

Esempio: S insieme;
 $\mathcal{F}(S, \mathbb{R}) =$ l'insieme delle funzioni
 da S a $\mathbb{R}$

$$S = \text{"uoi"}$$

$$f: S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(a) = \text{altezza di } a \text{ in cm}$$

$$f(\text{C.P.}) = 188$$

$$f(\text{NC}) = 172$$

$$g: S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(a) = \text{numero di scarpe di } a$$

$$g(\text{C.P.}) = 41$$

$$J(N.C.) = 40$$

Vogliamo dare a $\mathcal{A}(S, \mathbb{R})$ una struttura di spazio vettoriale:

- definire $+$: $\mathcal{A}(S, \mathbb{R}) \times \mathcal{A}(S, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}(S, \mathbb{R})$
- definire $\cdot$: $\mathbb{R} \times \mathcal{A}(S, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}(S, \mathbb{R})$
- definire $0 \in \mathcal{A}(S, \mathbb{R})$
- verificare 1-8

Definisco: date $f, g \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ definisco

$$f+g \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$$

Per conoscere funzione serve:

- dominio
- codominio
- regole

Per $f+g$: dominio S , codom. $\mathbb{R}$:

$f(x) = x^2$
non basta
a determinare
una funzione;
potrebbe essere
 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$

regola $(f+g)(A) = f(A) + g(A).$

↑
nuovo +
tre funz.
che introduco

↑
vecchio

Es : $S = \text{"noi"}$ $f = \text{altezza}$ $g = \text{piede}$

$$(f+g)(C.P.) = f(C.P.) + g(C.P.)$$

$$= 188 + 41 = 229$$

$$\begin{aligned}
 (f+g)(N.C.) &= f(N.C.) + g(N.C.) \\
 &= 172 + 40 = 212
 \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{Y}(S, \mathbb{R})$ definisco $\lambda \cdot f \in \mathcal{Y}(S, \mathbb{R})$
 come

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

$\uparrow$ nuovo $\uparrow$ vecchio

$$\underline{f}_S: f = \text{dkHz}$$

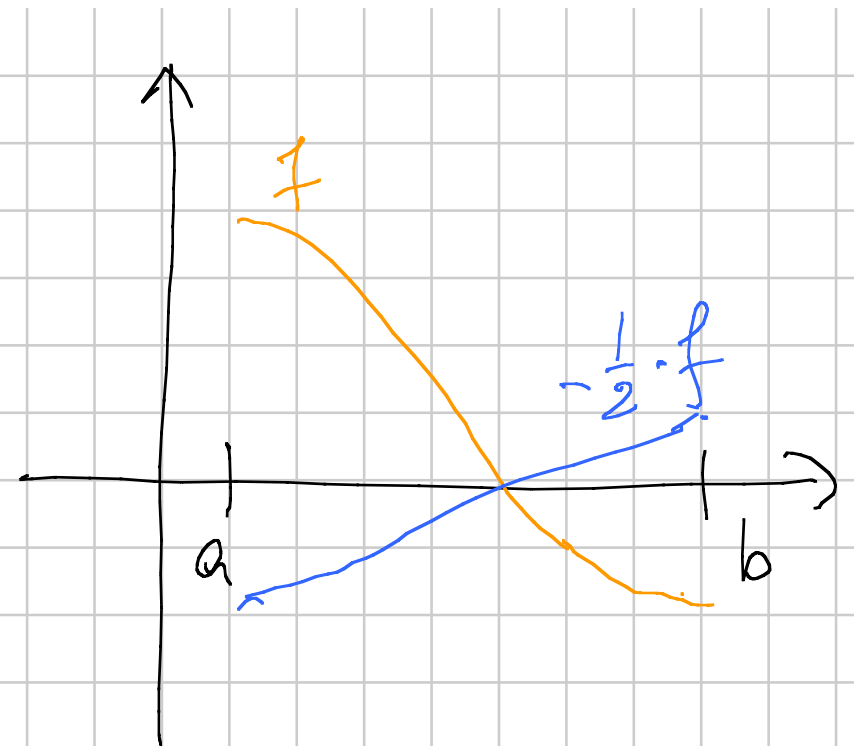
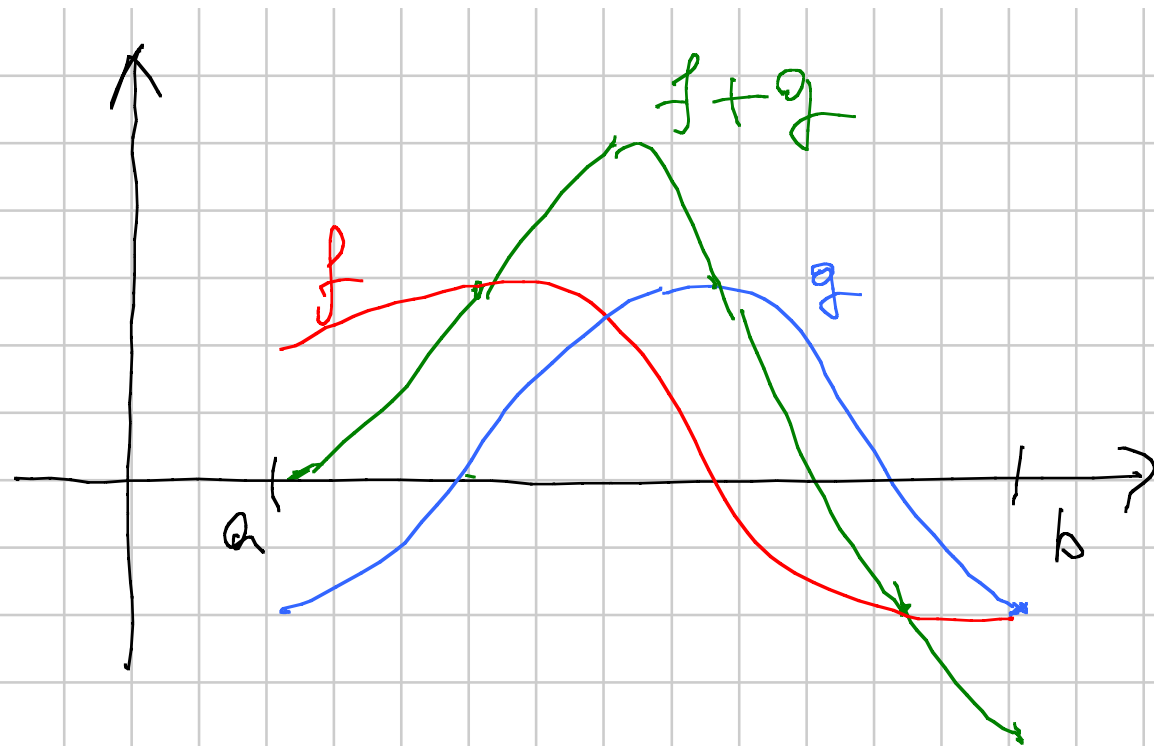
$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}f\right)(\text{C.P.}) &= -\frac{1}{2}f(\text{C.P.}) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 188 = -94 \end{aligned}$$

$$g = \text{picci}$$

$$\begin{aligned} (3 \cdot g)(\text{N.C.}) &= 3 \cdot g(\text{N.C.}) \\ &= 3 \cdot 40 = 120 \end{aligned}$$

Caso particolare: $S = [a, b]$

$f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ è rappresentato dal grafico



Definisco $0 \in \mathcal{Y}(S, \mathbb{R})$; $0(f) = 0 \quad \forall f \in S$

$\uparrow$ $\uparrow$
 la función numero

0 due stes defiendo

$$6. (\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$$

Sono entrambe funzioni da S a $\mathbb{R}$.

Domínio e codomínio sono uguali, D'ero vedere:

$$((\lambda + \mu) \cdot f)(x) = (\lambda \cdot f + \mu \cdot f)(x)$$

// def di .

$$(\lambda + \mu) \cdot f(x)$$

// def di +

$$(\lambda \cdot f)(x) + (\mu \cdot f)(x)$$

uguali per le
distrib. tre numeri.

" 2 x def.

$$\lambda \cdot f(\theta) + \mu \cdot f(\theta)$$

Conseguenze delle def. di sp. vett.

- Possiamo scrivere in modo non ambiguo

$$* \quad v_1 + \dots + v_n \quad v_1, \dots, v_n \in V$$

(associativo del +)

$$* \quad \lambda_1 \dots \lambda_n \cdot v \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad v \in V$$

per la 5

$$* \quad \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

convienendo che i " si espandono
✓ prima dei +

Altre conseguenze:

$$1. \quad v + w = u + w \quad \Rightarrow \quad v = u.$$

Giusti:

$$v + w = u + w \Rightarrow (v + w) + (-w) = (u + w) + (-w)$$

$$\Rightarrow v + (w + (-w)) = u + (w + (-w))$$

$$\Rightarrow v + 0 = u + 0 \Rightarrow v = u$$

2.

$$0 \cdot v = 0$$

Giusti:

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

||

numero

$v \in \mathbb{R}$

$$0 + 0 \cdot v$$

$\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$

$$0 = 0 \cdot v$$

3. $1 \cdot 0 = 0$

↑
vettore

↑
vettore

(Verifica analogia)

4. $(-1) \cdot v = -v$

numero
-1

↑
↑
prodotto
scalare x vettore

↑
vettore

↑
opposto additivo di v

Gufatti:

$$(-1) \cdot v \stackrel{(1)}{=} (-1) \cdot v + 0 \stackrel{(2)}{=} (-1) \cdot v + (v + (-v))$$

$$\stackrel{(3)}{=} ((-1) \cdot v + v) + (-v) \stackrel{(4)}{=} ((-1) \cdot v + 1 \cdot v) + (-v)$$

$$\stackrel{(5)}{=} ((-1 + 1) \cdot v) + (-v) = (0 \cdot v) + (-v)$$

$$\stackrel{(6)}{=} 0 + (-v) \stackrel{(7)}{=} -v$$

————— ° —————

Def: se V è uno sp. vett. un ~~sottinsieme~~ $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale se:

1. $0 \in W$
2. Se $w_1, w_2 \in W$ allora $w_1 + w_2 \in W$
3. Se $w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda \cdot w \in W$.

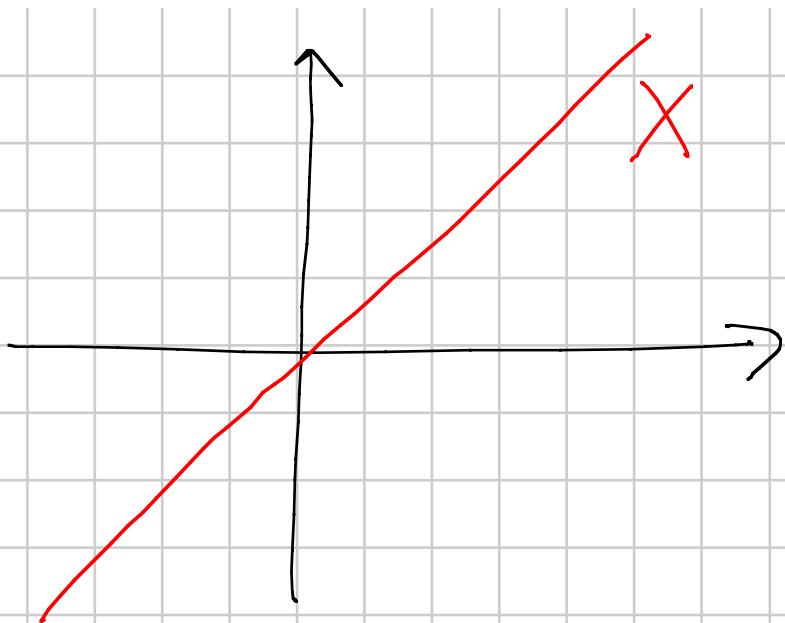
Cioè: "applicando a W le operazioni di spazio vettoriale di V si resta dentro W "

Conseguenza: un sottospazio vettoriale $W \subset V$ con le operazioni ereditate da V è uno spazio vettoriale.

Notazione: " $A \subset B$ " significa "contenuto o uguale"

"contenuto strettamente" = " $A \subsetneq B$ ".

Esempio: (1) $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$



Sottosp?

$$1. 0 \notin X \quad \sim$$

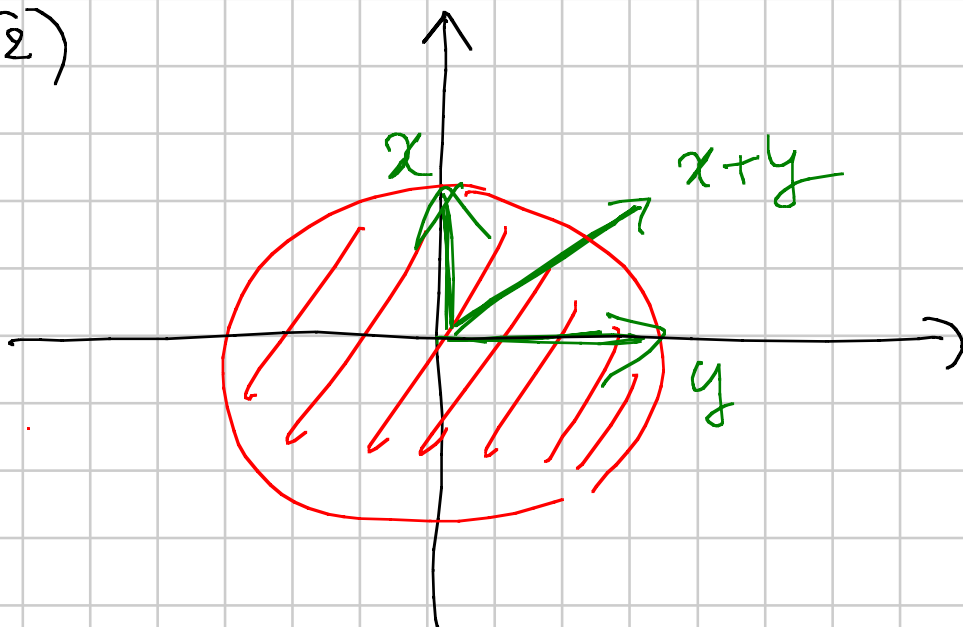
$$2. x, y \in X \Rightarrow x+y \in X$$

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 &\Rightarrow (x+y)_1 = x_1 + y_1 \\ y_1 = y_2 &\Rightarrow (x+y)_2 = x_2 + y_2 \end{aligned} \Rightarrow \text{valid} \quad \sim$$

$$3. \lambda \in \mathbb{R}, x \in X \Rightarrow \lambda \cdot x \in X \quad \sim$$

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 &\Rightarrow (\lambda x)_1 = \lambda x_1 \\ &(\lambda x)_2 = \lambda x_2 \end{aligned} \Rightarrow \text{valid} \quad \sim$$

(2)



$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

1. $\mathbb{R}^2$

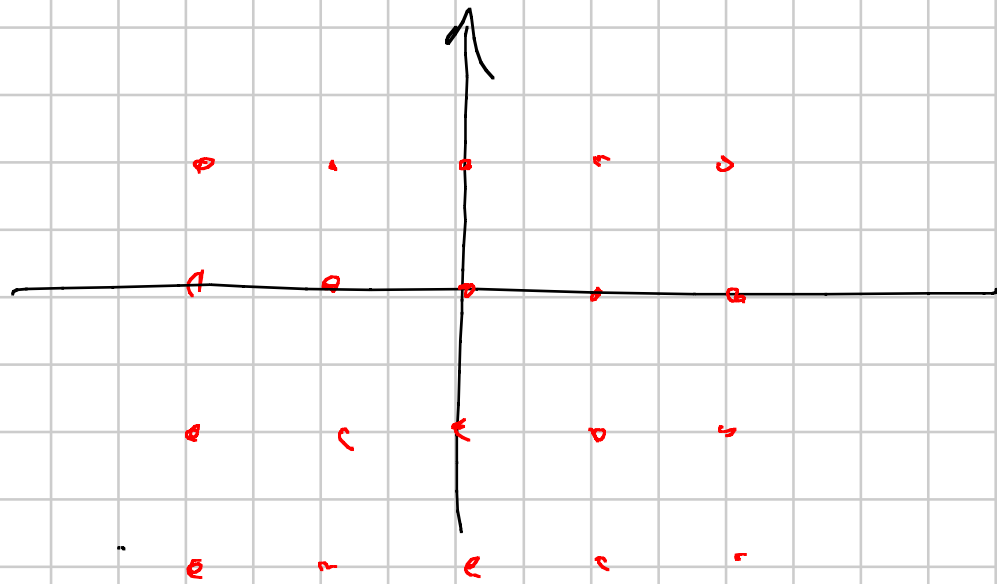
2. No

3. No

$\mathbb{R}^2$

No

(5) $X = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$

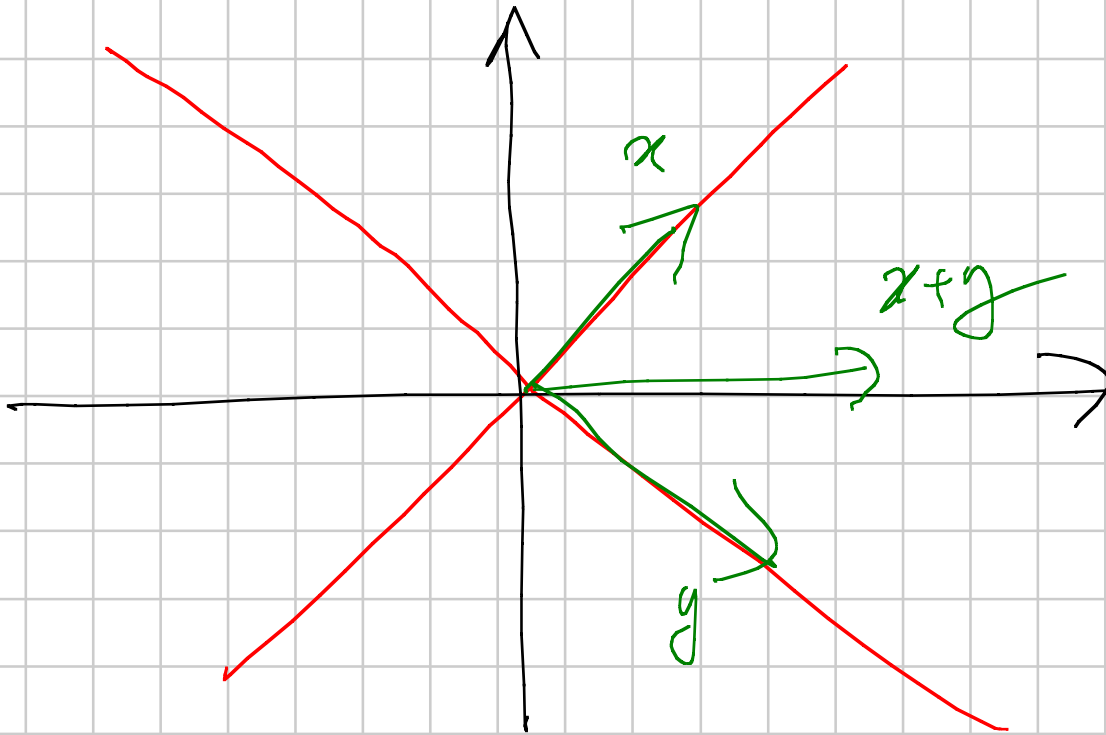


1. Σ

2. Σ

3. No

$$(4) \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 = x_2^2\}$$



1. S_1^-

2. $\mathbb{R}^0$

3. S_2^-

$$(5) X = \{x \in \mathbb{R}^3: 7x_1 - \sqrt{3}x_2 + 159x_3 = 0\}$$

$$1. \quad \Sigma^-$$

$$2. \quad x, y \in X, \quad 7x_1 - \sqrt{3}x_2 + 159x_3 = 0$$

$$7y_1 - \sqrt{3}y_2 + 159y_3 = 0$$

$$7(x_1 + y_1) - \sqrt{3}(x_2 + y_2) + 159(x_3 + y_3) = 0$$

$$7(x+y)_1 - \sqrt{3}(x+y)_2 + 159(x+y)_3 = 0$$

$$\Rightarrow x+y \in X \quad \Sigma$$

$$3. \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in X$$

$$7x_1 - \sqrt{3}x_2 + 159x_3 = 0$$

$$\Rightarrow 7 \cdot \lambda \cdot x_1 - \sqrt{3} \cdot \lambda \cdot x_2 + 159 \cdot \lambda \cdot x_3 = 0$$

$$7 \cdot (\lambda x)_1 - \sqrt{3} (\lambda x)_2 + 159 (\lambda x)_3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot x \in X \quad \Sigma$$

gli iperpiani stanno bene in $\mathbb{R}^n$ gli insiemi
definiti da una o più equazioni
omogenee di primo grado nelle coordinate:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^8 : \begin{array}{l} 7x_1 - e \cdot x_2 + 15 \cdot x_7 - \sqrt{2} \cdot x_8 = 0, \\ -4x_2 + 19x_4 - \sqrt{6}x_7 + \pi \cdot x_8 = 0 \end{array} \right\}$$

At: vanno bene anche equazioni simili
marchese:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^5 : e^{6x_1 - 2x_3 + \pi x_5} = 1 \right\}$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : 6x_1 - 2x_3 + \pi x_5 = 0 \right\} \quad \Sigma$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \cos \begin{pmatrix} 3x_1 & -5x_2 \\ . & . \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 5x_2 = 2k\pi \right\}$$

1. Yes 2. No 3. No ;

$$\begin{pmatrix} 2\pi \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in X \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\pi \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin X$$

No

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \cos \left(\frac{3x_1 - 5x_2}{1 + (3x_1 - 5x_2)^4} \right) = 1 \right\}$$

$$-1 < \frac{t}{1+t^4} < 1$$

(esercizio d'analisi)

$$\text{ dunque } \cos\left(\frac{t}{1+t^4}\right) = 1 \Rightarrow \frac{t}{1+t^4} = 0$$

$$\Rightarrow t = 0$$

$\Rightarrow$ l'equazione è $3x_1 - 5x_2 = 0$ mascherata.

$$\underline{\mathcal{E}_S}: \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 = 0\}$$

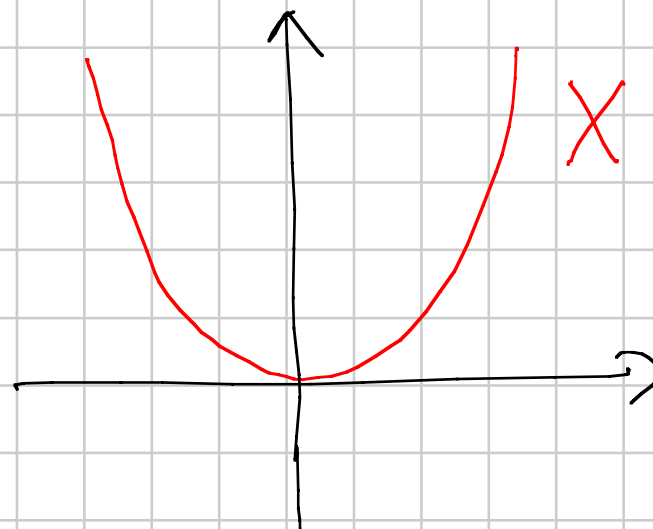
$$= \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_2 = 0\}$$

Si

$$\underline{\mathcal{E}_S}: \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2\}$$

1. Si

2. No



$$\begin{array}{l}
 3. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in X \quad 2. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin X \\
 \left(-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin X \right) \\
 \text{No}
 \end{array}$$

Esempi in $\mathbb{R}[t]$

• Fisso $d \geq 0$; $X = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(p(t)) = d \} \cup \{0\}$

1. Sì

2. No se $d \geq 0 : 1 - x^d, x^d \in X$

3. Σ

$$(1 - x^d) + x^d = 1 \notin X$$

No

• Fisso $d \geq 0$

$$\mathbb{R}_{\leq d}[t] = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(p(t)) \leq d\}$$

$$\begin{aligned}
 X &= \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \in \mathbb{R}[t] : \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 \cdot a_n = 0 \right\} \\
 &= \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_d t^d : a_0 + 4a_1 + 9a_2 + \dots \right. \\
 &\quad \left. + (d+1)^2 a_d = 0 \right\}
 \end{aligned}$$

1. $\vec{a}$

2. $p(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \in X$

$$q(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n \in X$$

Goal

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 b_n = 0$$

$$\Rightarrow p(t) + q(t) \notin X$$

Ho

$$\sum (n+1)^2 a_n + \sum (n+1)^2 b_n = 0 + 0 = 0$$

$$\sum (n+1)^2 (a_n + b_n)$$

$a_n + b_n$ è il coeff di t^n in $p(t) + q(t)$

$\Rightarrow$ anche i coeff di $p(t) + q(t)$
soddisfanno l'equazione - S_1

3. S_1

S_1