Algebra Lineare 1/12/16

$\mathbb{C}$ campo con $+, \cdot, 0, 1$

$\Longrightarrow$ possiamo definire uno sp. vett. su $\mathbb{C}$ esattamente come su $\mathbb{R}$:

insieme V con $+ : V \times V \to V$

$\cdot : \mathbb{C} \times V \to V$

con 1 - 4 : $V, +, 0$ gruppo comm.

5 - 6 : "distributive"

7 : "associativa"

8 : $1 \cdot v = v$

__Es__: $\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \right\}$

$$M_{m \times n}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

$\mathbb{C}[z]$

etc...

Fatto: tutta la teoria dipende solo dalle proprietà di campo di $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ si estende al caso $\mathbb{C}$.

Es: $\begin{pmatrix} 2+i \\ -3+4i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ 4+5i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

Sono lin. indip.? → Primo nullo? **No**

→ Il secondo è multiplo del primo?

Se lo fosse: $\begin{pmatrix} 1-i \\ 4+5i \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1-i}{2+i}}_{}\begin{pmatrix} 2+i \\ -3+4i \end{pmatrix}$ ← forzato dalla I componente

Torna la seconda? $4+5i \overset{?}{=} \frac{1-i}{2+i}(-3+4i)$

$$(2+i)(4+5i) \overset{?}{=} (1-i)(-3+4i)$$

$$8-5+i(4+10) \overset{?}{=} -3+4+i(3+4)$$

$$3+14i \overset{?}{=} 1+7i \qquad \underline{No}$$

$\Rightarrow$ sono lin. indip.

$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 2$ poiché ho base canonica $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Dunque $\begin{pmatrix}2+i\\-3+4i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-i\\4+5i\end{pmatrix}$ sono base di $\mathbb{C}^2$.

Oss: V sp. vett. su $\mathbb{C}$

- posso sommare i vettori tra loro
- posso moltiplicarli per numeri complessi

$\Rightarrow$ posso anche moltiplicarli per numeri reali

$\Rightarrow$ V è anche uno sp. vett. su $\mathbb{R}$.

Prop: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V)$.

Es: $\mathbb{C} = \{z\} = \{x + iy \ : x, y \in \mathbb{R}\}$

1 par. libero complesso

2 par. liberi reali

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + i y_1 \\ x_2 + i y_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

2 par. liberi in $\mathbb{C}$

4 par. liberi in $\mathbb{R}$

Dim generale: $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$

$\Longleftrightarrow$ esiste base $v_1, \dots, v_n$ su $\mathbb{C}$

$\Longleftrightarrow$ ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$v = z_1 v_1 + \dots + z_n v_n \qquad z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$$

$\Longleftrightarrow$ ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$v = (x_1 + i y_1) \cdot v_1 + \dots + (x_n + i y_n) \cdot v_n$$

$$x_1, \dots x_n y_1 \dots y_n \in \mathbb{R}$$

$\Longleftrightarrow$ - - - - -

$$v = x_1 v_1 + y_1 \cdot (i v_1) + \dots + x_n v_n + y_n \cdot (i v_n)$$

$$x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n \in \mathbb{R}$$

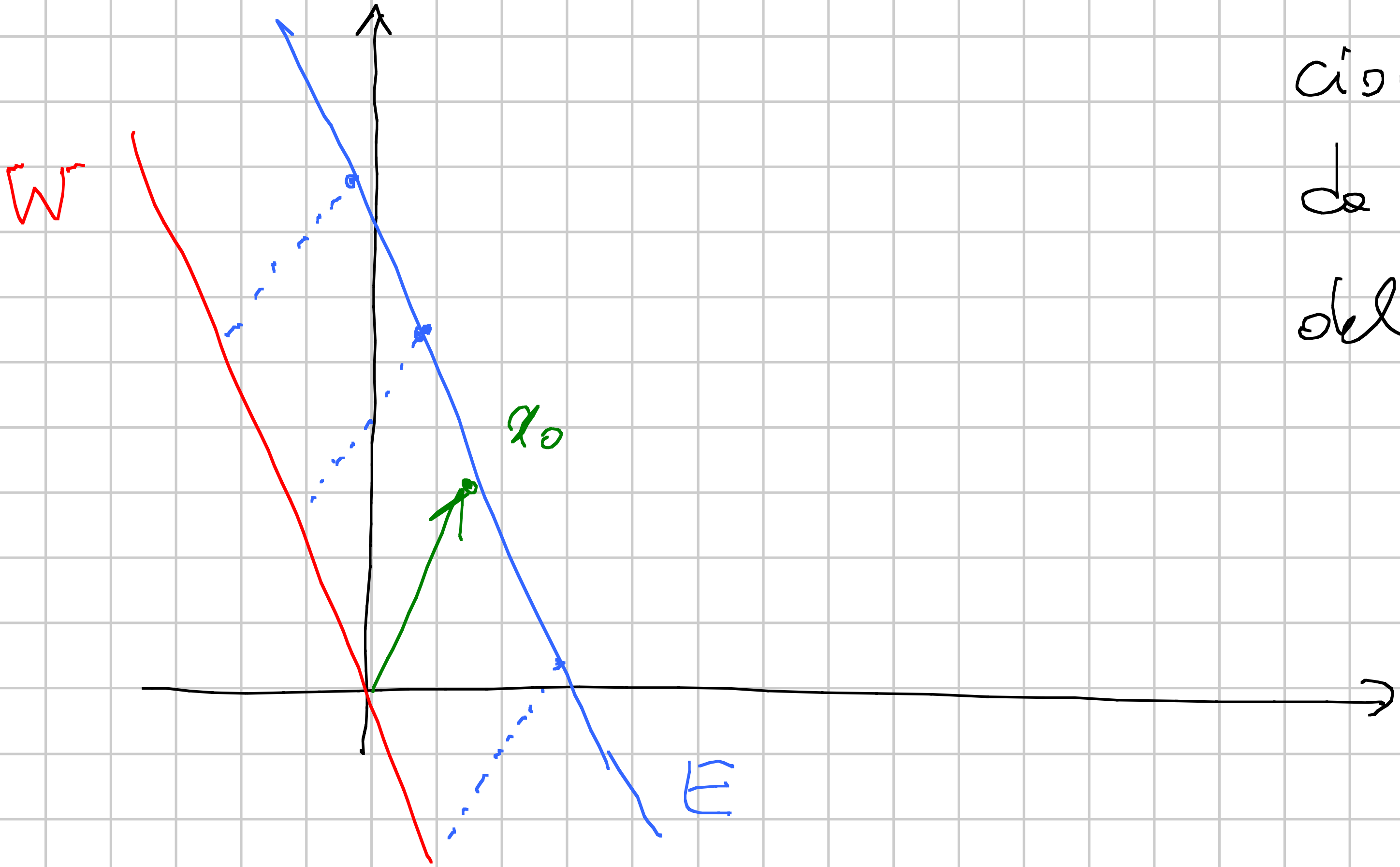
$\Longleftrightarrow$ $\underbrace{v_1, i \cdot v_1, \dots, v_n, i \cdot v_n}_{2n}$ base di V su $\mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$ $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$. $\blacksquare$

Sottospazi affini.

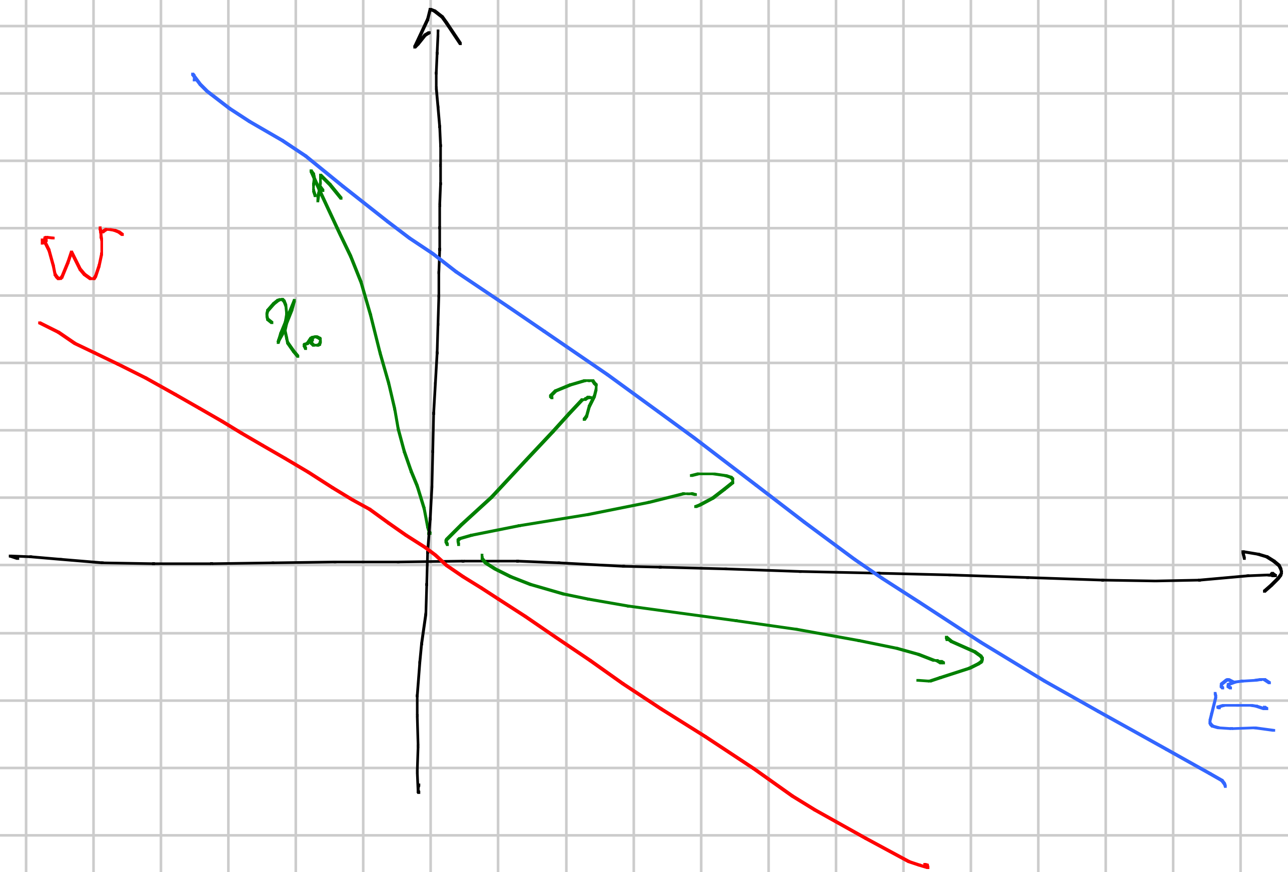
Sia V spazio vettoriale. Chiamo $E \subset V$ sottospazio affine se esistono $x_0 \in V$, $W \subset V$ sottosp. vett. t.c.

$$E = \{ x_0 + w : w \in W \}$$ e scrivo $E = x_0 + W$.



cioè: E è ottenuto da W per traslazione del vettore x_0

Q: dato E sono unici W e x_0?



Prop: $x_1 + W_1 = x_2 + W_2 \iff W_1 = W_2 \,,\, x_2 \in x_1 + W_1$

Dim: $x_2 = x_2 + \underset{\overline{W}_2}{\underset{\cap}{0}} \in x_2 + \overline{W}_2 = x_1 + W_1 \Rightarrow$ II condizione ok.

Analogamente $x_1 \in x_2 + W_2$.

$\Rightarrow x_2 = x_1 + u_1 \qquad u_1 \in W_1$

$x_1 = x_2 + u_2 \qquad u_2 \in W_2$

Se $w_1 \in W_1$ ho $x_1 + w_1 \in x_1 + W_1 = x_2 + W_2$

$$\Rightarrow \exists\, w_2 \text{ t.c. } x_1 + w_1 = x_2 + w_2$$

$$\Rightarrow w_1 = (x_2 - x_1) + w_2 = \underset{\overline{W}_2}{\underset{\cap}{-u_2}} + \underset{\overline{W}_2}{\underset{\cap}{w_2}}$$

$$\Rightarrow w_1 \in \overline{W}_2$$

Ho provato che $\overline{W}_1 \subset \overline{W}_2$. Stesso argomento:

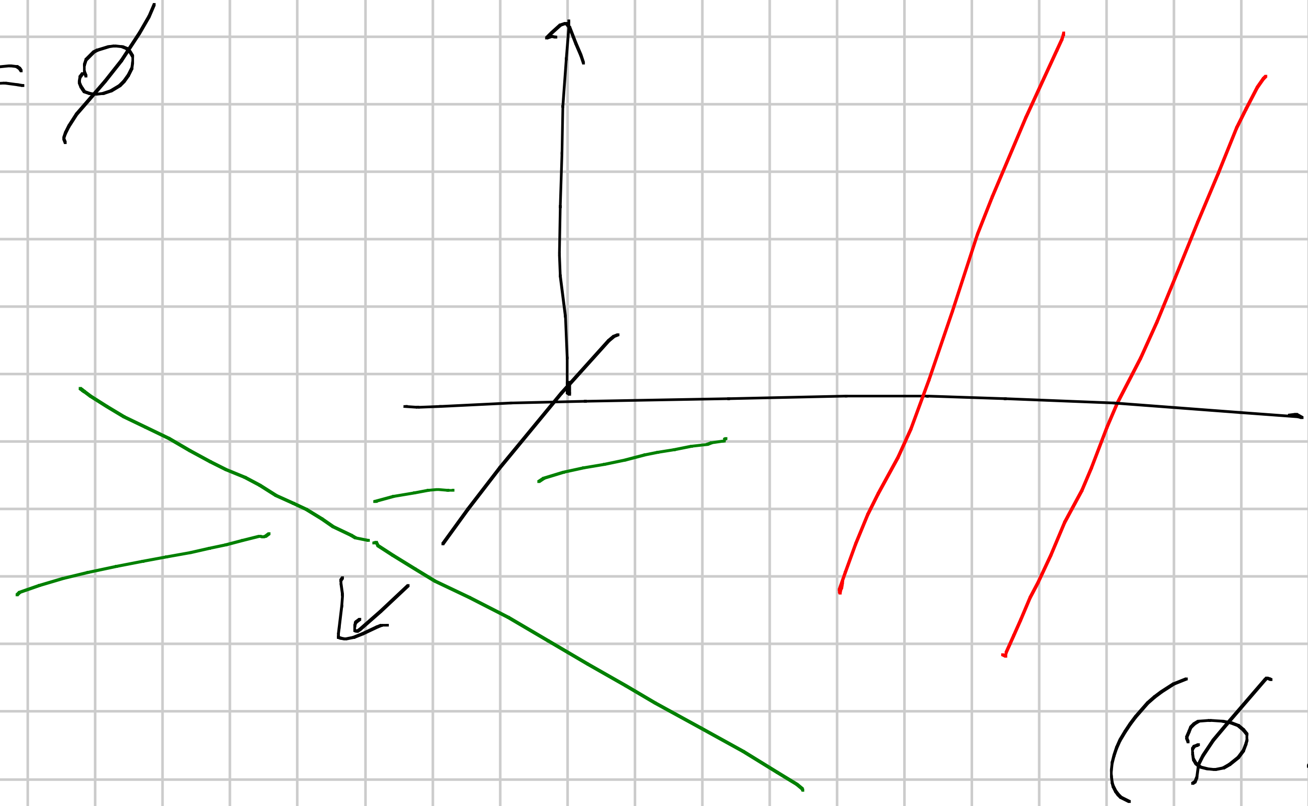
$W_2 \subset W_1$. $\blacksquare$

<u>Def</u>: se $E = x_0 + W$ diciamo W giacitura di E.
Pongo $\dim(E) = \dim(W)$.

Analogo di Grassmann per sottospazi affini.

<u>Oss</u>: E, F sottosp. affini ci sono due casi:

- $E \cap F = \emptyset$



($\emptyset$ non è sttsp. affine)

- $E \cap F \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ se $x_0 \in E \cap F$ ho

$E = x_0 + W$

$F = x_0 + Z$

$E \cap F = x_0 + (W \cap Z)$

$\Rightarrow$ è un sottospazio affine.

Oss: $E \cup F$ è stsp. affine solo se $E \subset F$ oppure $F \subset E$.

Def: $E+F$ è il più piccolo sottospazio affine che contiene entrambi.

Caso I: $E \cap F \neq \emptyset$

Se $x_0 \in E \cap F$ ho $E = x_0 + W$

$F = x_0 + Z$

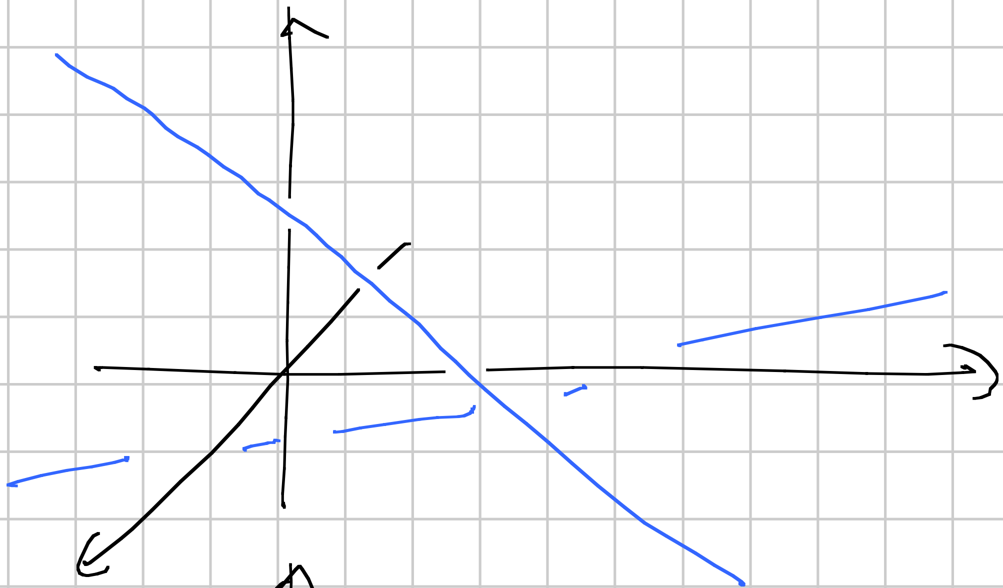
$$E \cap F = x_0 + (W \cap Z) \quad , \quad E + F = x_0 + (W + Z)$$

$\Rightarrow \dim E + \dim F = \dim(E \cap F) + \dim(E+F)$

<u>Caso II</u>: $E \cap F = \emptyset$

Stsp. affini di $\mathbb{R}^3$:

(W giacitura di E
Z giacitura di F)



$$\dim(E+F)=3$$
$$\dim(Z+W)=2$$

$$\dim(E+F)=2$$
$$\dim(W+Z)=1$$

Prop: se $E = x_0 + W$, $F = y_0 + Z$, $E \cap F = \emptyset$

$\Rightarrow \dim(E+F) = \dim(W+Z) + 1$

Dim: affermo 1) $y_0 - x_0 \notin W+Z$

2) $E+F = x_0 + \mathrm{Span}(y_0 - x_0, W+Z)$.

Questo basta: 2) $\Rightarrow \dim(E+F) = \dim(\mathrm{Span}(y_0-x_0), W+Z)$

1) $\Rightarrow$ $= \dim(W+Z) + 1$.

Proviamo 1) e 2):

1) Se p.a. $y_0 - x_0 = w + z$ avrei

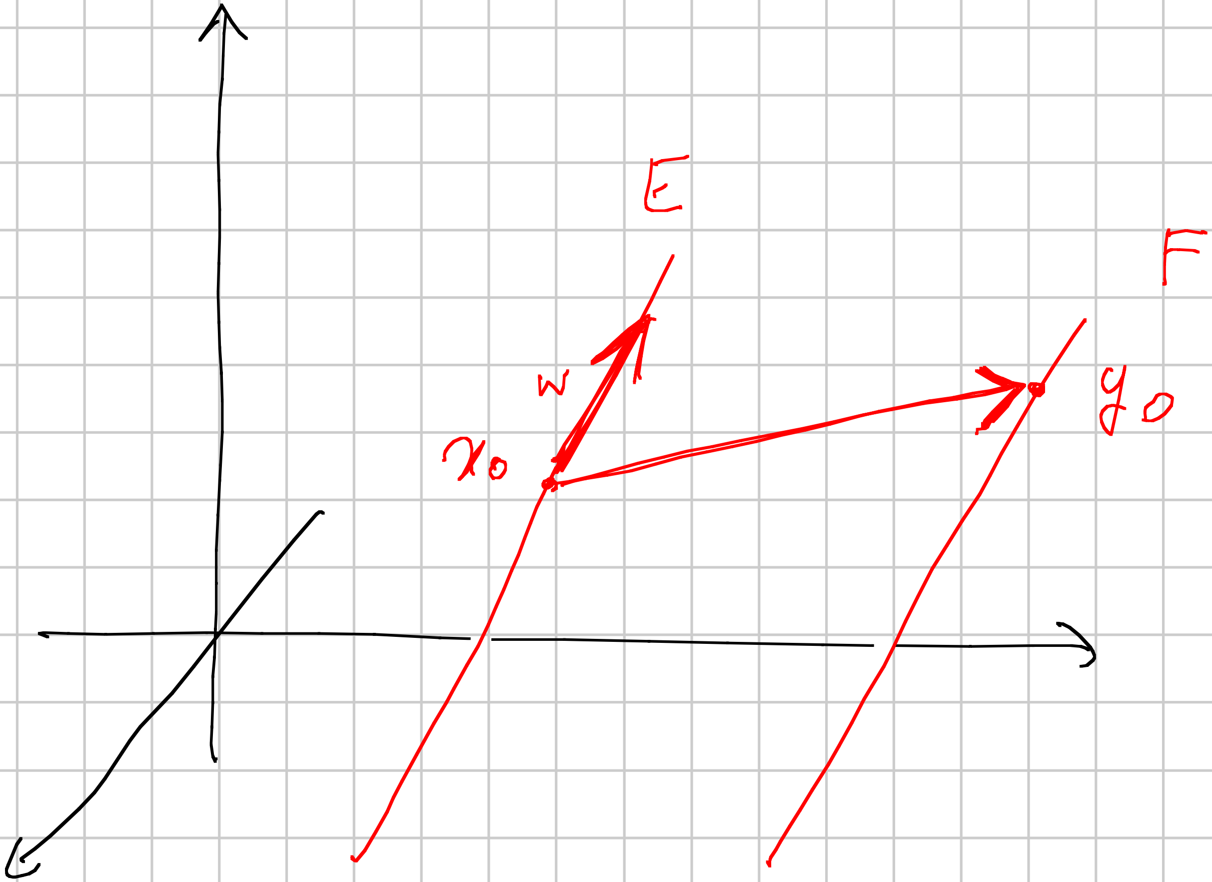
$$\underset{\substack{\Uparrow \\ E}}{x_0 + w} = \underset{\substack{\Uparrow \\ F}}{y_0 - z}$$

No: $E \cap F = \emptyset$

2) esercizio.

$\boxtimes$

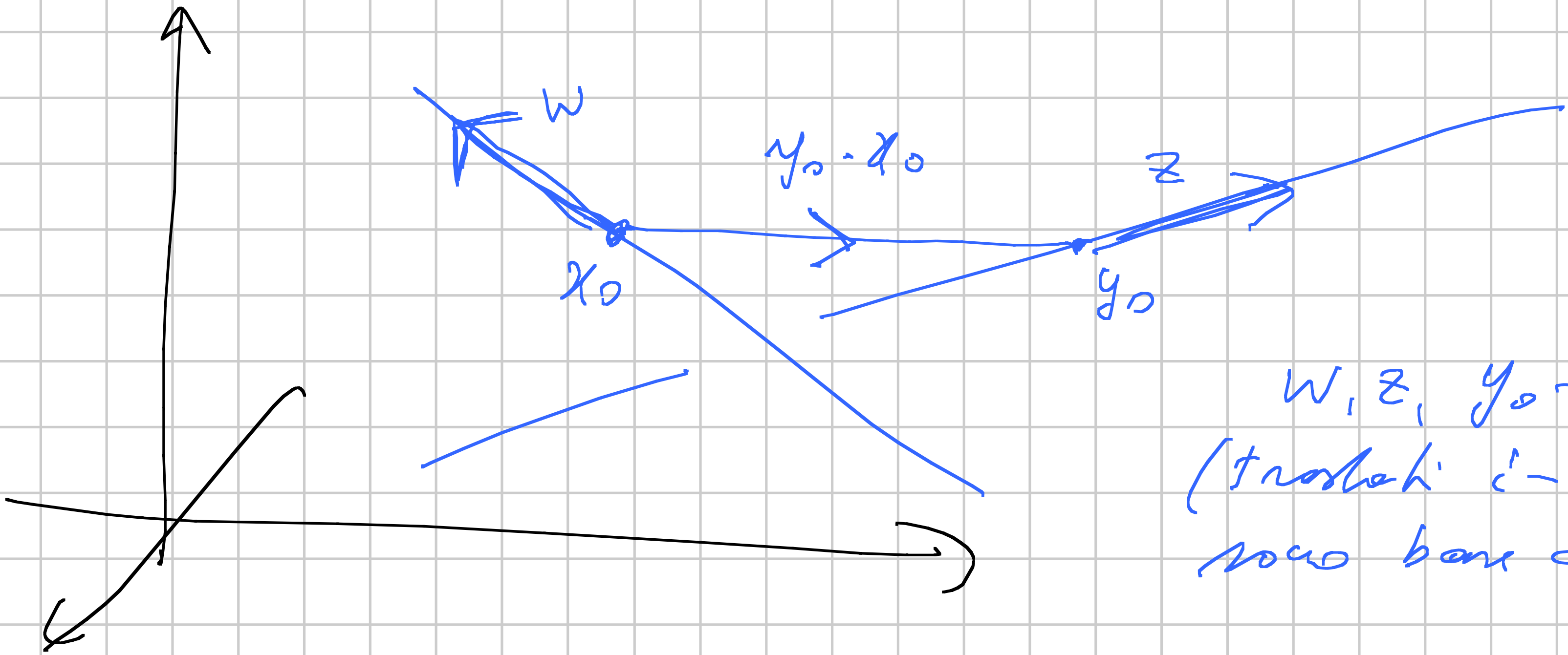
$W = Z$



Base delle giaciture di $E+F$

$= w, y_0 - x_0$

traslati in O



$w, z, y_0 - x_0$ (traslati in 0) sono base di $\mathbb{R}^3$.

Consideriamo sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$

Oss: l'insieme delle soluz. di $A \cdot x = b$, se non è vuoto è $x_0 + \mathrm{Ker}(A) \Rightarrow$ è un sottosp. aff.

Def: chiamo presentazione cartesiana di un sottosp. affine E (equazioni cartesiane per E) la scrittura

$$E = \{ x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b \}$$ oppure

$$E : \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

<u>Oss</u>: se $E \subset \mathbb{R}^n$ è definito da m equazioni

allora E ha dimensione almeno $n-m$

(può essere di più se le equaz. sono lin. dip.)

Def: chiamo presentazione parametrica di E la sua espressione

$$E = u + \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$$

ovvero $E = \{ u + t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k \ : \underbrace{t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}}_{1} \}$

$$E: \begin{cases} x_1 = u_1 + t_1 w_{11} + \dots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = u_n + t_1 w_{n1} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases} \qquad t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$$

parametri

__Oss:__ $\dim(E) \leq k$