



Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1. Da un sistema di 7 generatori di  $Z = \{z \in \mathbb{C}^5 : (4 - 3i)z_2 + 7iz_5 = 0\}$ , quanti vettori vanno scartati per ottenere una base di  $Z$ ?

2. Per quale base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^2$  si ha  $\left[ \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $\left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ?

3. Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi di  $V = \{z \in \mathbb{C}^9 : 5iz_3 = (1 - 2i)z_7\}$  con  $\dim_{\mathbb{C}}(U) = 5$  e  $\dim_{\mathbb{C}}(W) = 4$ , e  $U + W$  non contiene  $e_1 - ie_8$ , che dimensione può avere  $U \cap W$ ?

4. Al variare di  $t \in \mathbb{R}$  stabilire quante soluzioni ha il sistema  $\begin{cases} (t+1)x - 6y = -3 \\ (1-t)x + ty = 2t - 3. \end{cases}$

5. Calcolare  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

6. Quante sono le orlate di una sottomatrice  $3 \times 3$  di una matrice  $7 \times 6$ ?

7. Provare che  $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 10 \\ 3 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

è la matrice di una proiezione rispetto a una decomposizione di  $\mathbb{R}^3$  in somma diretta.

---

### Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

---

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦

---



1. Considerare  $X = \text{Span}(4e_1 - 5e_2 - 3e_3 + e_4, 3e_1 + 2e_2 + 7e_3 - 2e_4) \subset \mathbb{R}^4$  e  $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -8 & 7 & -3 \\ 9 & 10 & -9 & 5 \\ 3 & -4 & -1 & -1 \\ 6 & 10 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ .

- (A) (1 punto) Provare che i vettori assegnati come generatori sono una base  $\mathcal{B}$  di  $X$
- (B) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane del sottospazio affine di  $\mathbb{R}^4$  parallelo a  $X$  e passante per  $6e_1 - e_2 + 5e_3 + 3e_4$ .
- (C) (3 punti) Provare che l'espressione  $f(x) = M \cdot x$  definisce un'applicazione lineare da  $X$  in sé.
- (D) (4 punti) Trovare  $[f]_{\mathcal{B}}$ .

2. In  $\mathbb{R}^5$  considerare i vettori

$$v_1 = 3e_1 + e_3 - e_4, \quad v_2 = e_1 + 4e_2 - e_3 + 3e_5, \quad v_3 = 2e_2 - e_3 + e_4 + e_5, \quad v_4 = 5e_1 + 2e_2 + e_4.$$

- (A) (1 punto) Provare che esiste una sola applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$  tale che  $f(e_j) = v_j$  per  $j = 1, 2, 3, 4$ .
- (B) (4 punti) Provare che  $f$  ha rango 3.
- (C) (3 punti) Stabilire che dimensione può avere un sottospazio  $Y$  di  $\mathbb{R}^5$  tale che  $\dim(Y \cap \text{Im}(f)) = 2$  e  $Y + \text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^5$ .
- (D) (4 punti) Posto  $Z = \text{Span}(e_1, e_5)$  provare che  $\mathbb{R}^5 = Z \oplus \text{Im}(f)$  e calcolare la proiezione di  $e_3$  su  $Z$  rispetto a tale decomposizione.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



## Risposte ai quesiti

5.  $\diamond$ 

1. 3

2.  $\mathcal{B} = \left( \left( \begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array} \right) \right)$

3. Tra 2 e 4 compresi

4. Infinite per  $t = 2$ , nessuna per  $t = 3$ , una altrimenti

5. 8

6. 12

7.  $A \cdot A = A$ 

---

1.  $\spadesuit$  2.  $\heartsuit$  3.  $\spadesuit$  4.  $\clubsuit$  5.  $\diamond$  6.  $\spadesuit$  7.  $\clubsuit$  8.  $\heartsuit$  9.  $\clubsuit$  10.  $\diamond$

---



## Soluzioni degli esercizi

5.  $\diamond$ 

- 1.
- (A) Sono linearmente indipendenti
- (B)  $\begin{cases} 29x_1 + 37x_2 - 23x_3 = 22 \\ x_2 + 8x_3 + 29x_4 = 126 \end{cases}$
- (C) Moltiplicando  $M$  per i vettori di  $\mathcal{B}$  si ottengono vettori che soddisfano  $\begin{cases} 29x_1 + 37x_2 - 23x_3 = 0 \\ x_2 + 8x_3 + 29x_4 = 0 \end{cases}$
- (D)  $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- 2.
- (A) Un'applicazione lineare è univocamente determinata dai suoi valori su una base
- (B)  $v_1, v_2, v_3$  sono linearmente indipendenti, mentre  $v_4 = 2v_1 - v_2 + 3v_3$
- (C) 2 o 3
- (D)  $-5e_1 + e_5$