UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 18/7/17 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Da un sistema di 7 generatori di $Z = \{z \in \mathbb{C}^5 : \ (4-3i)z_2 + 7iz_5 = 0\}$, quanti vettori vanno scartati per ottenere una base di Z?

2. Per quale base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ si ha $\left[\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$?

3. Se U e W sono sottospazî di $V = \{z \in \mathbb{C}^9 : \ 5iz_3 = (1-2i)z_7\}$ con $\dim_{\mathbb{C}}(U) = 5$ e $\dim_{\mathbb{C}}(W) = 4$, e $U + W$ non contiene $e_1 - ie_8$, che dimensione può avere $U \cap W$?

4. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ stabilire quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} (t+1)x - 6y = -3 \\ (1-t)x + ty = 2t - 3. \end{cases}$

5. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Quante sono le orlate di una sottomatrice 3×3 di una matrice 7×6?

7. Provare che $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 10 \\ 3 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
è la matrice di una proiezione rispetto a una decomposizione di $\mathbb{R}^3$ in somma diretta.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 18/7/17 — Esercizî

1. Considerare $X = \mathrm{Span}(4e_1 - 5e_2 - 3e_3 + e_4,\ 3e_1 + 2e_2 + 7e_3 - 2e_4) \subset \mathbb{R}^4$ e $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -8 & 7 & -3 \\ 9 & 10 & -9 & 5 \\ 3 & -4 & -1 & -1 \\ 6 & 10 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che i vettori assegnati come generatori sono una base $\mathcal{B}$ di X

(B) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane del sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ parallelo a X e passante per $6e_1 - e_2 + 5e_3 + 3e_4$.

(C) (3 punti) Provare che l'espressione $f(x) = M \cdot x$ definisce un'applicazione lineare da X in sé.

(D) (4 punti) Trovare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

2. In $\mathbb{R}^5$ considerare i vettori

$$v_1 = 3e_1 + e_3 - e_4, \quad v_2 = e_1 + 4e_2 - e_3 + 3e_5, \quad v_3 = 2e_2 - e_3 + e_4 + e_5, \quad v_4 = 5e_1 + 2e_2 + e_4.$$

(A) (1 punto) Provare che esiste una sola applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ tale che $f(e_j) = v_j$ per $j = 1, 2, 3, 4$.

(B) (4 punti) Provare che f ha rango 3.

(C) (3 punti) Stabilire che dimensione può avere un sottospazio Y di $\mathbb{R}^5$ tale che $\dim(Y \cap \mathrm{Im}(f)) = 2$ e $Y + \mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^5$.

(D) (4 punti) Posto $Z = \mathrm{Span}(e_1, e_5)$ provare che $\mathbb{R}^5 = Z \oplus \mathrm{Im}(f)$ e calcolare la proiezione di e_3 su Z rispetto a tale decomposizione.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. 3

2. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

3. Tra 2 e 4 compresi

4. Infinite per $t = 2$, nessuna per $t = 3$, una altrimenti

5. 8

6. 12

7. $A \cdot A = A$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) Sono linearmente indipendenti

(B) $\begin{cases} 29x_1 + 37x_2 - 23x_3 = 22 \\ x_2 + 8x_3 + 29x_4 = 126 \end{cases}$

(C) Moltiplicando M per i vettori di $\mathcal{B}$ si ottengono vettori che soddisfano $\begin{cases} 29x_1 + 37x_2 - 23x_3 = 0 \\ x_2 + 8x_3 + 29x_4 = 0 \end{cases}$

(D) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.

(A) Un'applicazione lineare è univocamente determinata dai suoi valori su una base

(B) v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, mentre $v_4 = 2v_1 - v_2 + 3v_3$

(C) 2 o 3

(D) $-5e_1 + e_5$