



Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1. Dato un sistema di 8 vettori di  $\{z \in \mathbb{C}^4 : (1-i)(z_1 + z_2) = (2+i)(z_3 - z_4)\}$ , è sempre possibile estrarne una base? Se è possibile, quanti vettori bisogna scartare?

2. Date  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  e  $\mathcal{C} = \left( \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$   
trovare  $[v]_{\mathcal{B}}$  sapendo che  $[v]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ .

3. Se  $f : \{x \in \mathbb{R}^8 : 2x_1 + 5x_4 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^{11}$  è lineare,  $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$  e  $\text{Im}(f) \oplus W = \mathbb{R}^{11}$ , che dimensione ha  $W$ ?

4. Risolvere  $\begin{cases} 2x + 3y - z = -7 \\ -3x + 4y + 2z = 20 \\ x - y + 5z = 5. \end{cases}$

5. Data  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$  calcolare  $(A^{-1})_{2,3}$ .

6. Calcolare  $\det \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

7. Posto  $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0\}$  e  $Y = \text{Span}(5e_1 + 2e_2 - e_3)$ , calcolare la proiezione su  $X$  di  $e_1 + 3e_2 - e_3$  rispetto alla decomposizione  $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ .

---

### Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

---

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇

---



1. In  $\mathbb{R}^4$  considerare il sottospazio  $U$  definito dalle equazioni  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$  e la matrice

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 7 & 9 & 19 \\ 0 & 0 & -10 & -6 \\ 2 & 7 & -7 & -9 \\ -10 & -1 & -1 & 13 \end{pmatrix}.$$

- (A) (3 punti) Esibire tutti i vettori di  $U$  che hanno una coordinata nulla e le altre intere e prime fra loro, di cui positiva quella con indice minore.
- (B) (3 punti) Disporre i vettori trovati al punto precedente in modo che sia crescente la somma dei valori assoluti delle coordinate, quindi estrarre dai vettori così ordinati una base  $\mathcal{B}$  di  $U$ .
- (C) (3 punti) Provare che l'espressione  $f(u) = M \cdot u$  definisce un'applicazione lineare  $f : U \rightarrow U$ .
- (D) (3 punti) Determinare  $[f]_{\mathcal{B}}$ .

2. Al variare di  $t \in \mathbb{R}$  considerare in  $\mathbb{R}^4$  il sottospazio affine

$$E_t : \begin{cases} (t-4)x + (2-t)y + (t-1)z + (3-t)w = t \\ (3-t)x + (16-2t)y + (7-3t)z + (9-t)w = -t-5. \end{cases}$$

- (A) (3 punti) Determinare  $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$  e  $t_0$  in  $\mathbb{R}$  tali che  $\dim(E_t) = \begin{cases} n_0 & \text{per } t = t_0 \\ n_1 & \text{per } t \neq t_0. \end{cases}$
- (B) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di  $E_0$ , cioè di  $E_t$  per  $t = 0$ .
- (C) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di  $E_{t_0}$ , cioè di  $E_t$  per  $t = t_0$ .
- (D) (3 punti) Stabilire che tipo di sottospazio affine sia  $E_0 \cap E_{t_0}$ .

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.



## Risposte ai quesiti

5.  $\diamond$ 

1. Solo se genera; 5

2.  $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. 6

4.  $x = -4, y = 1, z = 2$

5.  $\frac{2}{3}$

6. 13

7.  $36e_1 + 17e_2 - 8e_3$

---

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5.  $\diamond$  6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10.  $\diamond$

---



## Soluzioni degli esercizi

5.  $\diamond$ 

1.

$$(A) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 \\ 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 10 \\ -23 \end{pmatrix}$$

(B) L'ordine è il precedente; si tengono i primi 2 vettori

(C) Moltiplicando per  $M$  gli elementi di  $\mathcal{B}$  si ottengono vettori che soddisfano le equazioni di  $U$ 

$$(D) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$(A) n_0 = 3, n_1 = 2, t_0 = 5$$

$$(B) -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(C) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(D) Una retta