UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 13/1/16 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitarî, con somma delle coordinate nulla e ortogonali a $5e_1-7e_2+4e_3$.

3. Stabilire per quali $t\in\mathbb{R}$ il punto $[4:6t-1:2-5t]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ appartiene alla retta passante per $[2:-5:3]$ e $[1:2:-4]$.

4. Stabilire per quali $t\in\mathbb{R}$ l'equazione $(t+3)x^2-2(t+5)xy+9y^2+2(t+1)x-6y+t^2=0$ definisce una parabola.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $-3x^2+2xz-4x+3y^2-10yz+2y+8z^2=1$.

6. Determinare la matrice hessiana nel punto $(0,0)$ della funzione $f(x,y)=\cos(2x-3xy)+\mathrm{e}^{2xy+5y}$ e i segni dei suoi autovalori.

7. Calcolare $\int_\alpha \mathrm{e}^{3x^2-6xy+7y^2}(3(x-y)\,\mathrm{d}x+(7y-3x)\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t)=\begin{pmatrix} t^2+t-1 \\ 2t^2-t+1 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 13/1/16 — Esercizî

1. Al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M_{t,s} = \begin{pmatrix} 1-t & s^2-20 & 3s-10 \\ -s & 1 & t-5 \\ s^2-14 & t-5 & t-1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che esiste esattamente un valore s_0 di s tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale con ${}^{\mathrm{t}}B \cdot M_{t,s} \cdot B$ diagonale.

Indicare d'ora in poi con A_t la matrice M_{t,s_0}, ovvero $M_{t,s}$ per s uguale al valore s_0 appena trovato.

(B) (3 punti) Trovare gli autovalori di A_{11}, ovvero di A_t per $t = 11$, e una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.

(C) (2 punti) Trovare tutti i valori di t per i quali A_t ha determinante nullo.

(D) (3 punti) Provare che esiste $j \in \{1, 2, 3\}$ tale che la restrizione di $\langle \cdot | \cdot \rangle_{A_t}$ al piano di equazione $x_j = 0$ non è un prodotto scalare per alcun $t \in \mathbb{R}$.

(E) (2 punti) Determinare i segni degli autovalori di A_t al variare di $t \in \mathbb{R}$

2. Considerare la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 + \ln(1+t) \\ t + \ln(1-t^2) \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Trovare il più grande insieme I su cui α è definita, e provare che su I la α è regolare.

(B) (5 punti) Provare che α passa per l'origine di $\mathbb{R}^2$ e calcolarne la curvatura in tale punto.

(C) (4 punti) Calcolare $\int_\beta \mathrm{e}^{2x-y}(2\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)$ dove β è la restrizione di α all'intervallo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Risposte

5. ♢

1. $5,\ 2;\ \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{266}}(11e_1 + e_2 - 12e_3)$

3. $t = -3$

4. $t = -2$

5. Paraboloide iperbolico

6. $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}$; discordi

7. $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{19} - \mathrm{e}^{16}\right)$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $s_0 = 4$

(B) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 13,\ \lambda_3 = -12$
$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(C) $t = 11,\ t = 3,\ t = -2$

(D) $j = 2$

(E) Uno positivo, uno negativo e uno nullo per $t = -2,\ t = 3,\ t = 11$
Due negativi e uno positivo per $-2 < t < 3$ e $t > 11$
Due positivi e uno negativo per $t < -2$ e $3 < t < 11$

2.

(A) $I = (-1, 1)$; la derivata della prima componente è sempre positiva

(B) $-\frac{3}{2\sqrt{2}}$

(C) 2