

Geom 31/3/16

RECUPERO PACINI

OGGI

12:30

F3

_____ o _____

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$$

Pb: data $f: V \rightarrow V$ cu care B t.c.

$A = [f]_B^B$ s.e. "facile" (diagonale) -

Pb' : dato $A_0 \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$

(dato $A_0 = [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}$) cercare

$M \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertibile t.c.

$A = M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ sia "facile"

Def : 1) λ autoval. di f se esiste $v \neq 0$

t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$ (v : autovett.)

2) $P_f(t) = \det(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0})$

polinomio caratteristico

Prop: A matrice $A \in \mathbb{D}$ ha come polinomio caratteristico $P_A(t)$ -

Prop (facile): se f è diagonalizzabile allora $P_f(t)$ ha n radici in K contate con la loro molteplicità -

Dim: $\exists B$ t.c. $[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P_f(t) = \det \left(t \cdot I_n - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} t - \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t - \lambda_m \end{pmatrix} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_m)$$

$\Rightarrow P_f(t)$ ha le radici $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ $\square$

Oss: se $K = \mathbb{C}$ la Prop. precedente non dice nulla (sappiamo che $P_f(t)$ ha n radici in $\mathbb{C}$)

Eg: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$P_A(t) = \det \left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = t^2 + 1$$

non ha radici in $\mathbb{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non
è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

$$\underline{\text{ES}}: A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & 2 \\ 1 & t & -3 \\ -2 & 3 & t \end{pmatrix}$$

$$= t^3 - 6 + 6 + 4t + t + 9t = t^3 + 14t$$

$$= t(t^2 + 14)$$

su $\mathbb{R}$ ha solo la radice 0

$\Rightarrow A$ non è diago su $\mathbb{R}$.

Prop: Se $P_f(t)$ ha n radici distinte in $\mathbb{K}$ allora f è diagonalizzabile.

Dim: Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le radici di $P_f(t)$.

So che sono autovalori: $\exists v_i \neq 0$ t.c.

$f(v_i) = \lambda_i v_i$ - Concludo provando che

tali $v_1, \dots, v_m$ sono base di V ; anzi
basta provare che sono lin. indep. -

Provo per induzione (finita) su m che
 $v_1, \dots, v_m$ sono lin. indep.

$m=1$: $v_1 \neq 0$ ✓

P.I. : suppongo $v_1, \dots, v_m$ l.i. ($m < n$)

dimostro che lo sono $v_1, \dots, v_{m+1}$.

Per assurdo suppongo $v_{m+1} \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$

Cioè $v_{m+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ -

Calcolo $f(v_{m+1})$ in due modi:

$$\underset{\parallel}{f(v_{m+1})} = \lambda_{m+1} \cdot v_{m+1} = \alpha_1 \lambda_{m+1} v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_{m+1} v_m$$

$$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m$$

$$\Rightarrow 0 = \alpha_1 (\lambda_{m+1} - \lambda_1) v_1 + \dots + \alpha_m (\lambda_{m+1} - \lambda_m) v_m$$

$$\Rightarrow (\text{ip. ind. } v_1, \dots, v_m \text{ lin. indep.})$$

$$\Rightarrow \alpha_1 (\underbrace{\lambda_{m+1} - \lambda_1}_{\neq 0}) = \dots = \alpha_m (\underbrace{\lambda_{m+1} - \lambda_m}_{\neq 0}) = 0$$

(poiché $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sono distinti)

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow v_{m+1} = 0 \quad : \text{assurdo} \quad \square$$

— 0 —

Cerchiamo di diagonalizzare $A_0 \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$
 (oppure f , ponendo $A_0 = [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}$) :

I. Se $K = \mathbb{C}$: vai al passo II

Se $K = \mathbb{R}$: verifica che $P_A(t)$
abbia n radici con mult. A_0 in $\mathbb{R}$
(Se No : Esci : non diapo)

II. Verifica se le n radici sono distinte -

Se Si : Esci : diapo.

Se No : vai al passo III.

Def : se λ è autovettore di f chiamo:

- mult. algebrica le mult. di λ come
radice del pol. caratter. $P_A(t)$

- mult. geom $= \dim \text{Ken}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$
 $(= \dim \text{Ken}(\lambda \cdot I_m - A_0))$
 $= m - \text{rank}(\lambda \cdot I_m - A_0)$

Teorema :

(1) per ogni λ autovalore ho

$$1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$$

(2) f è diago se e solo se per ogni λ autovalore ho

$$m.g.(\lambda) = m.a.(\lambda)$$

Dim: (1) λ autovel $\Rightarrow \exists v \neq 0$ t.c.

$$f(v) = \lambda \cdot v \Rightarrow v \in \text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$$

$$\Rightarrow \dim \text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f) > 0$$

$$\parallel \\ m.g.(\lambda)$$

Se $m.g.(\lambda) = \emptyset$ allora $v_1, \dots, v_p$

base di $\text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$ e completa

a base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p, \dots)$ di V .

$$\Rightarrow [t]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \lambda \end{matrix} & X \\ \hline \underbrace{0}_{P} & C_1' \end{array} \right) \}^P$$

$$\Rightarrow P_f(t) = (t - \lambda)^P \cdot P_{C_1'}(t)$$

$$\text{(Also: } \det \left(\underbrace{A}_P \quad \underbrace{B}_{n-p} \right) \}^P = \det(A) \cdot \det(C_1')$$

$$\text{Alt: } \det \begin{pmatrix} \underbrace{A}_P & \underbrace{B}_P \\ \underbrace{C}_P & \underbrace{D}_P \end{pmatrix} \begin{matrix} \} P \\ \} P \end{matrix} \neq \det(A) \cdot \det(D) - \det(B) \cdot \det(C)$$

$$\Rightarrow m.a.(A) \geq p -$$

$$(2) \quad \text{if } \text{diag} \Rightarrow m.g.(A) = m.a.(A) \quad \text{facile:}$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\lambda_q \dots \lambda_q}_{m_q} \end{pmatrix} \begin{matrix} \} m_1 \\ \vdots \\ \} m_q \end{matrix}$$

$$\Rightarrow m.a.(\lambda_j) = m.g.(\lambda_j) = m_j. \checkmark$$

$$m.g.(\lambda_j) = m.a.(\lambda_j) \Rightarrow f \text{ diago. :}$$

idea : provare che prendendo una dopo
l'altra basi di $\text{Ker}(\lambda_j I_n - f)$
otteniamo una base di V .

(Visto sopra nel caso in cui tutte le
m.a. sono uguali a 1) - " $\mathbb{Z}$ "

III. Esaminiamo tutte le radici λ di $P_f(t)$ con $m.a.(\lambda) > 1$ e verifico se ho sempre $m.g.(\lambda) = m.a.(\lambda)$; se sì f è diago se no, f non lo è -

Es: $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

$$P_f(A) = \det \begin{pmatrix} t-6 & -1 & -5 \\ 0 & t-6 & -4 \\ 0 & 0 & t+7 \end{pmatrix} = (t-6)^2 \cdot (t+7)$$

$$\Rightarrow \text{autorel } \lambda_1 = 6 \text{ con } m.a.(6) = 2$$
$$\text{autorel } \lambda_2 = -7 \text{ con } m.a.(-7) = 1$$

Per $\lambda_2 = -7$ non devo verificare nulla
(so già che $m.p.(-7) = 1$) - Invece

$$m.g.(6) = \dim(\text{Ker}(6 \cdot I_3 - A))$$
$$= 3 - \text{rank}(6 \cdot I_3 - A) = 3 - \text{rank}(A - 6 \cdot I_3)$$
$$= 3 - \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$\Rightarrow \Rightarrow$ A mom è diagonalizzabile -

9.4.1 In $\mathbb{R}^n$ con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ trovare
la matrice A di P_W verificando
che ${}^t A = A$, $A^2 = A$.

(a) $n = 2$ $W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$ -

$$P_W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3x - 5y}{9 + 25} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 9x - 15y \\ -15x + 25y \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{34} \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$${}^t A = A \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} A \cdot A &= A & : \quad A \cdot A &= \frac{1}{34^2} \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{pmatrix} \\ & & &= \frac{1}{34^2} \begin{pmatrix} 306 & 34 \cdot (-15) \\ 34 \cdot (-15) & 850 \end{pmatrix} \\ & & &= \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$(b) \quad m=3 \quad W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{4x + 7y - 3z}{16 + 49 + 9} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{74} \begin{pmatrix} 16 & 28 & -12 \\ 28 & 49 & -21 \\ -12 & -21 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

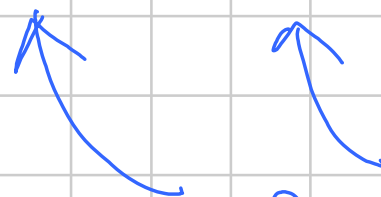
$\underbrace{\hspace{15em}}_A$

$${}^t A = A \quad \checkmark$$

$$A \cdot A = A \quad \dots$$

(c) $n = 3$

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$



$$2 - 15 + 7 = 0$$

So no orthog. for base

$$\begin{aligned} P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{4x + 3y + z}{16 + 9 + 1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2x - 5y + 7z}{4 + 25 + 49} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{78} \begin{pmatrix} 52 & 26 & 26 \\ 26 & 52 & -26 \\ 26 & -26 & 52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(d) $n=3$ $W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{-6 + 10 - 7}$$

non ortogonali

Due modi: I. Ortogonalizzare le base di W date e procedere come sopra-

Given:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-6 + 10 - 7}{9 + 4 + 49} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

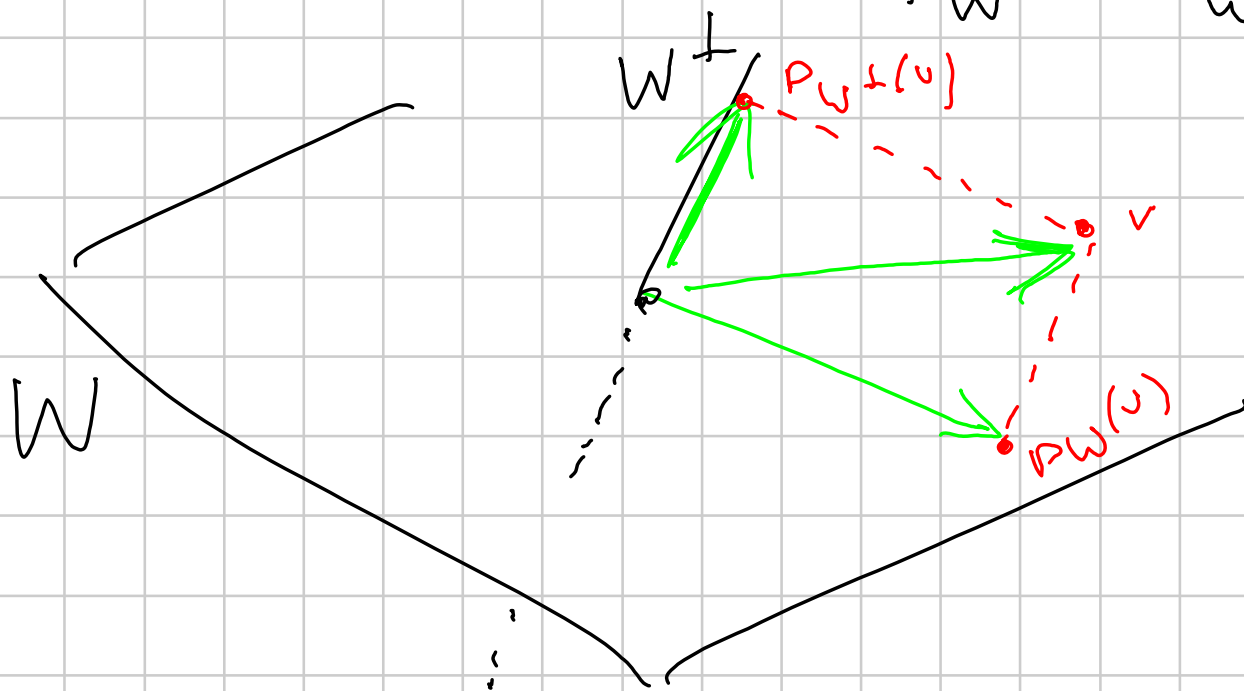
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{62} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{62} \begin{pmatrix} 115 \\ 316 \\ -40 \end{pmatrix}$$

$$P_w \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-3x + 2y + 7z}{9 + 4 + 49} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{115x + 316y - 40z}{115^2 + 316^2 + 40^2} \begin{pmatrix} 115 \\ 316 \\ -40 \end{pmatrix}$$

= ...

II : Notiamo che $P_W + P_{W^\perp} = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$



$\Rightarrow P_W = \text{id} - P_{W^\perp}$

retta generata da

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37 \\ 11 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{37x - 11y + 19z}{37^2 + 11^2 + 19^2} \begin{pmatrix} 37 \\ -11 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1851} \begin{pmatrix} 1851 - 37^2 & 11 \cdot 37 & -19 \cdot 37 \\ 11 \cdot 37 & 1851 - 11^2 & 19 \cdot 11 \\ -19 \cdot 37 & 19 \cdot 11 & 1851 - 19^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A

$${}^t A = A \quad \checkmark$$

$$A^2 = A \quad \dots$$

$$(e) \quad n = 4 \quad W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

$$P_W \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) = \frac{2x + 3y - z + 5t}{4 + 9 + 1 + 25} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & 10 \\ 6 & 9 & -3 & 15 \\ -2 & -3 & 1 & -5 \\ 10 & 15 & -5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\quad\quad\quad}^{\quad\quad\quad} A$$

$$tA = A \quad \checkmark$$

$$A^2 = A \quad \dots$$

$$(f) \quad n=4$$

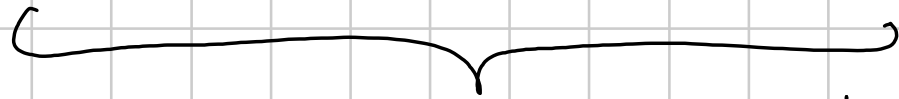
$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$1 - 1 + 2 - 2 = 0$$

sono ortogonali

$$\Rightarrow P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{x - y + z + 2t}{1 + 1 + 1 + 1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{x + y + 2z - t}{1 + 1 + 1 + 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$



A

$${}^t A = A \quad \checkmark$$

(g) $n=4$

$$\text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$



$$-2 - 6 + 3 - 5$$

non zero output

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Is blue?

$$2 + 0 + 11 - 13 = 0 \quad \checkmark$$

$$p_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{2x - 3y + z - t}{4 + 9 + 1 + 1} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{x + 11z + 13t}{1 + 11^2 + 13^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \quad \quad \quad \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$