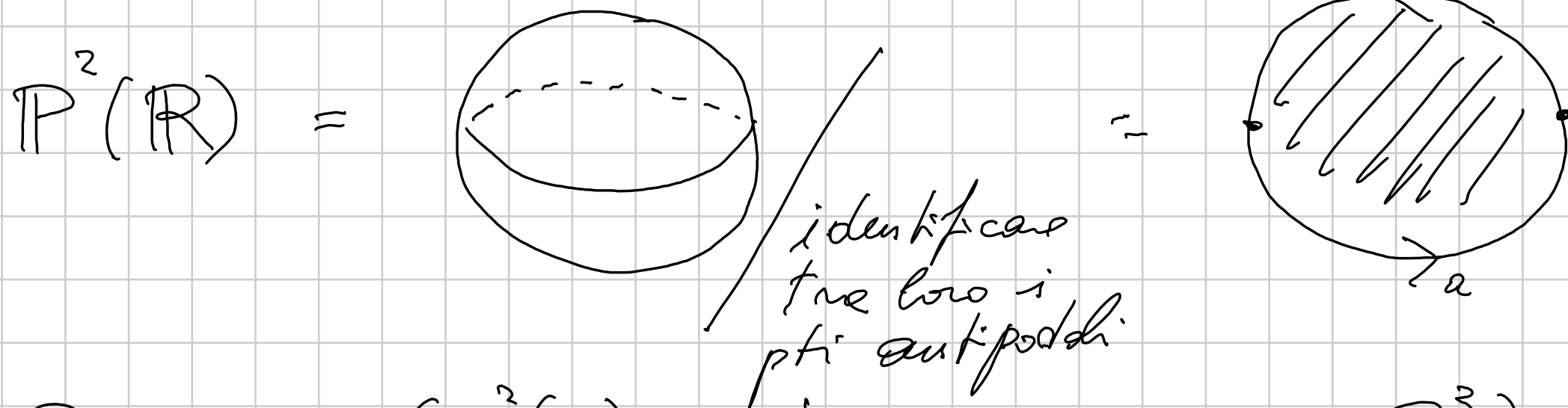


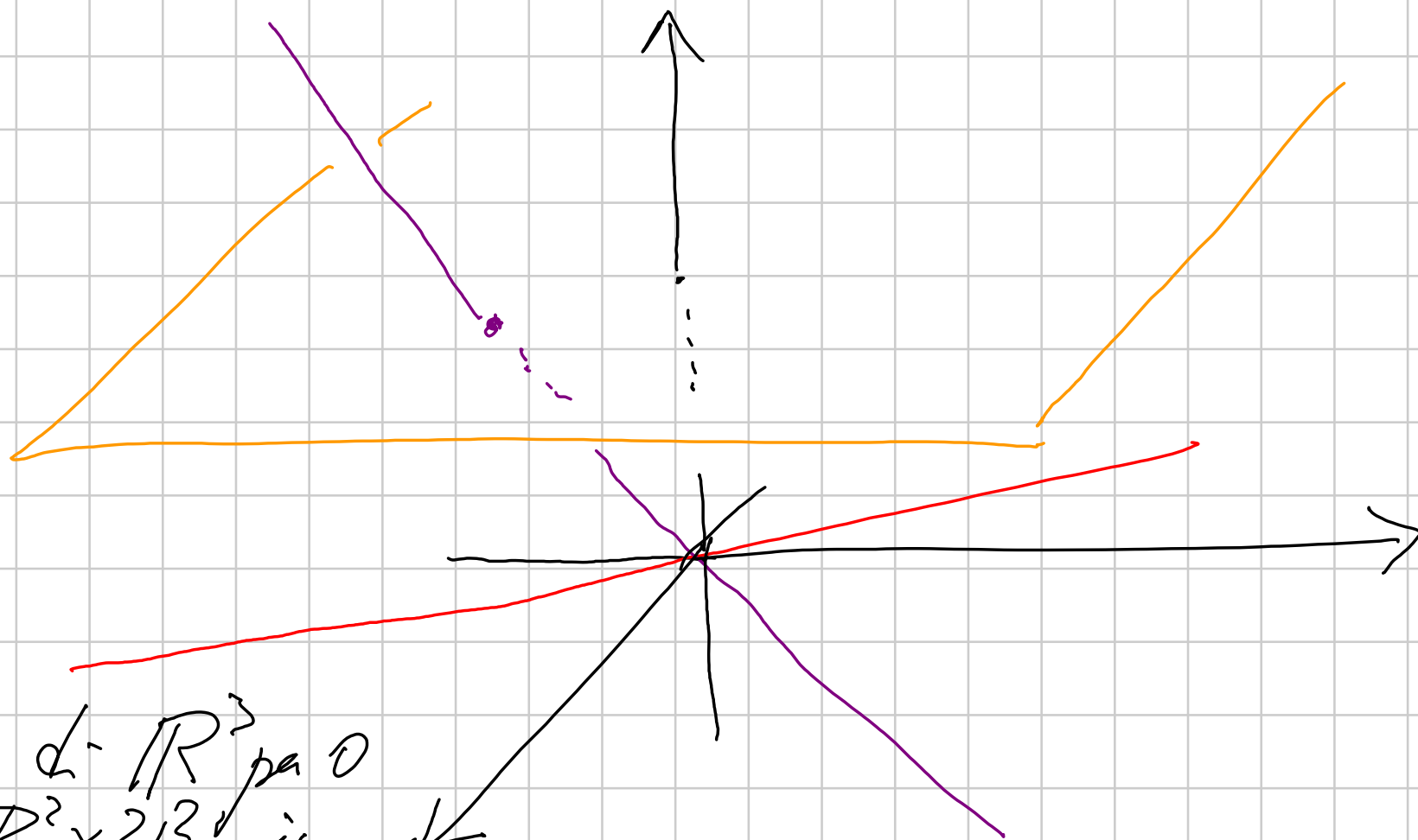
Geom 28/4/16

Pen domain: 12.1.1-4, 12.2.1-7 *esazi*
(in part 12.2.5-7)



Oppure: $(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \text{l'insieme delle rette in } \mathbb{R}^3)$

$$\mathbb{R}^2 \times \{1\}$$



Tutte le rette di $\mathbb{R}^3$ o
intersecano $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ in
un solo punto, tranne quelle orizzontali

$$\Rightarrow \mathbb{TP}^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) \cup \text{le rette sul piano } \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

$\mathbb{R}^2$

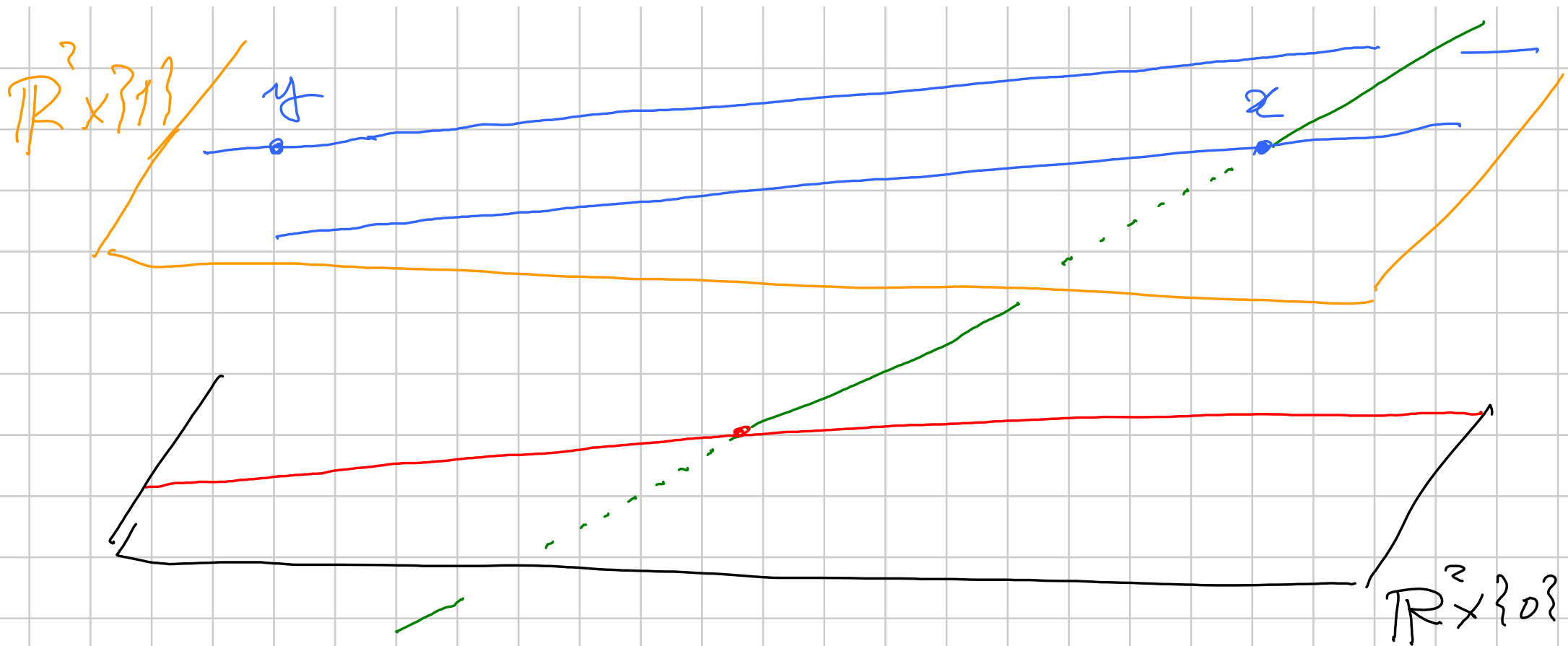
le rette in $\mathbb{R}^2$
 $= \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$$\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \right)$$

↑ punto vicino
ai punti di $\mathbb{R}$
molto lontani di 0

Anche $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ può essere visto come l'insieme
dei punti all'infinito di $\mathbb{R}^2$:



Per x che tende a ∞ lungo la retta blu
 (parallela alla retta ad abscissa 1) il
 corrispondente punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tende a
 quello dato dalla retta rossa.

Per qualsiasi α $\neq 0$ parallela a quella con α ,
e per entrambe le direzioni con cui α
può tendere all' ∞ .

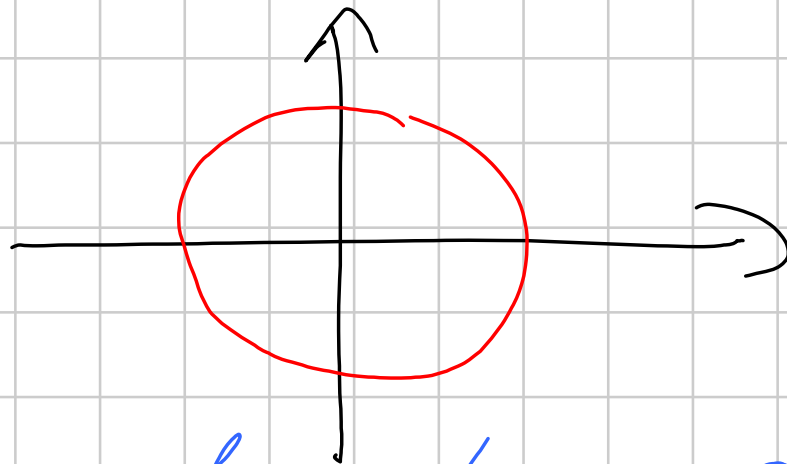
$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è l'insieme delle direzioni
lungo cui un punto di $\mathbb{R}^2$ può
tendere all' ∞ .

Cioè $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è l'insieme dei punti
all' ∞ di $\mathbb{R}^2$.

Ritroviamo: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è circonferenza con
i punti antipodali identificati
 $\Rightarrow$ di nuovo una circonferenza.

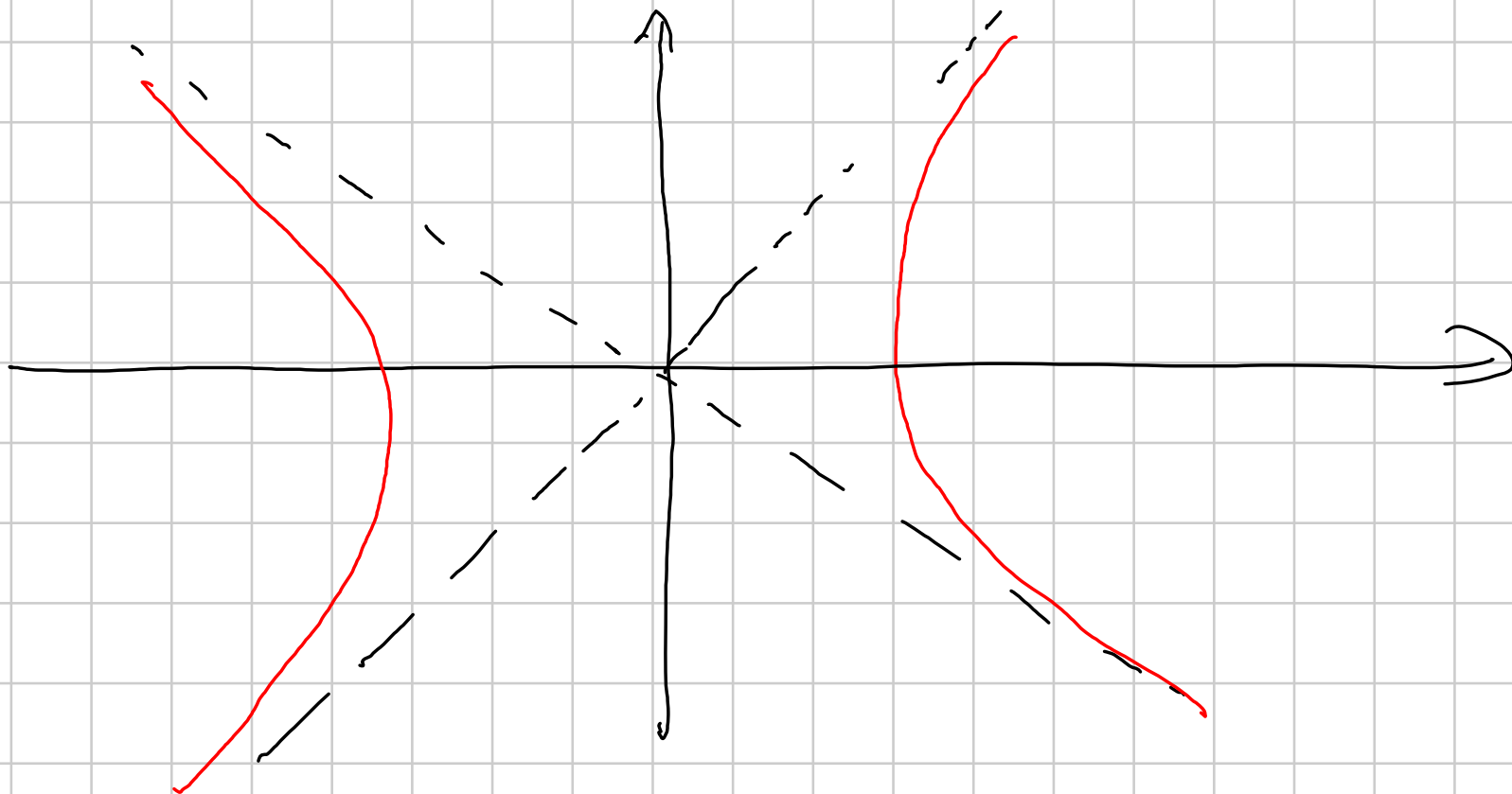
Esempio: Quali sono i pt all' ∞ delle coniche, cioè le direzioni lungo cui una conica va verso ∞ .

$$x^2 + y^2 = 1$$



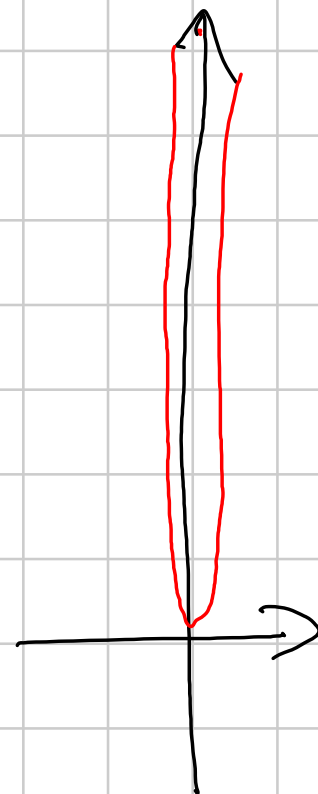
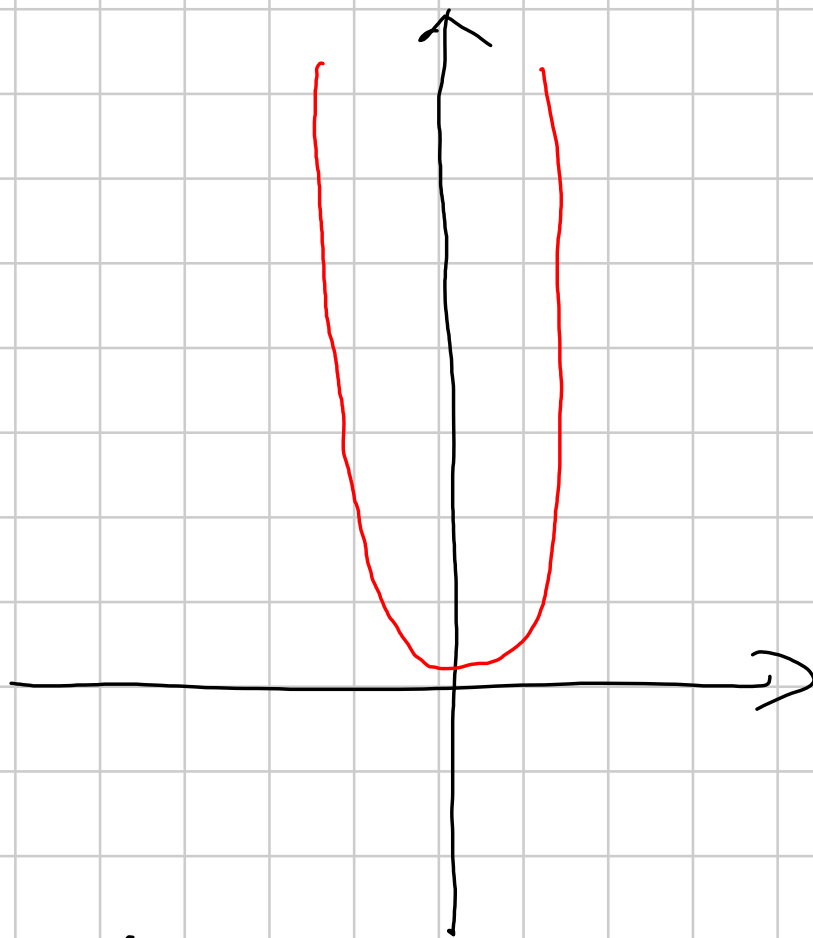
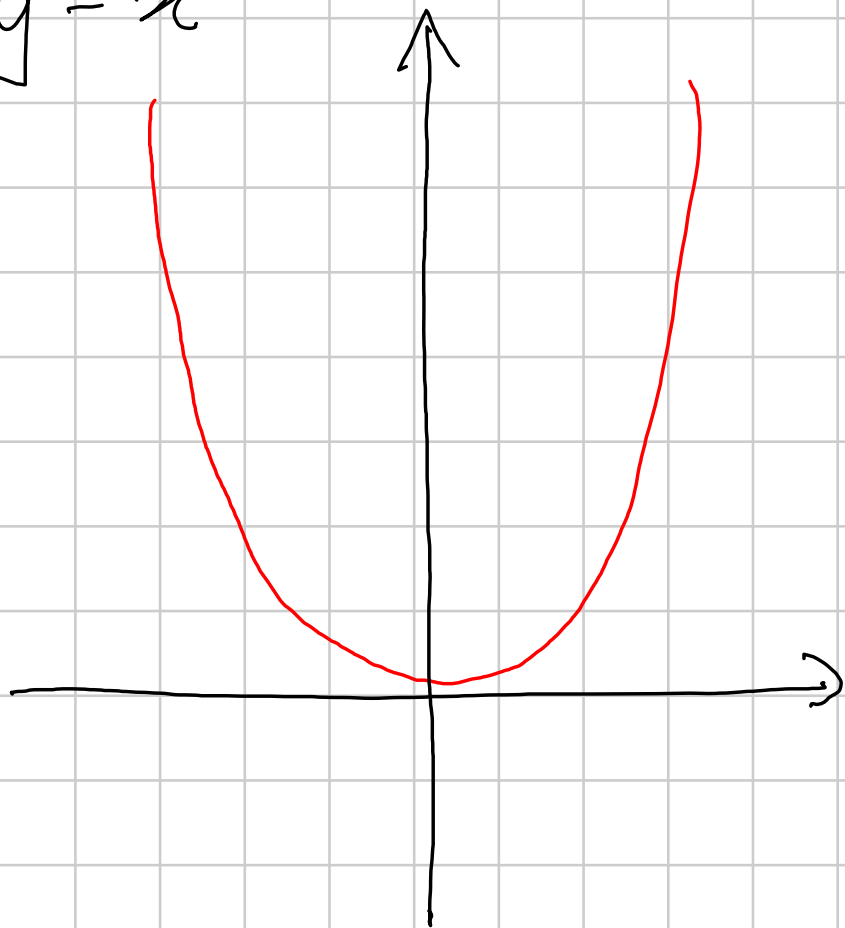
non ho pt a ∞ .

$$x^2 - y^2 = 1$$



I punti all' ∞ sono le direzioni degli
asintoti (2 punti all' ∞)

$$y = x^2$$



ha un solo pto all' ∞ (la direzione dell'asse).

Interpretazione

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}_{\text{pti all' } \infty \text{ di } \mathbb{R}^2}$$

Si estende a

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \underbrace{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})}_{\text{pts all' } \infty \text{ di } \mathbb{R}^n}$$

$$(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \cup (\text{le direzioni delle} \\ \text{rette in } \mathbb{R}^3))$$

(sfera $S^{1,2}$) / identificaz.
dei pt.
antipodali

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

Caso completo: $\mathbb{P}^0(\mathbb{C}) = \text{un pto}$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = (\mathbb{C} \times \{1\}) \cup (\text{le altre } \mathbb{C} \times \{0\})$$

$\parallel$

$\mathbb{C}$

$\parallel$

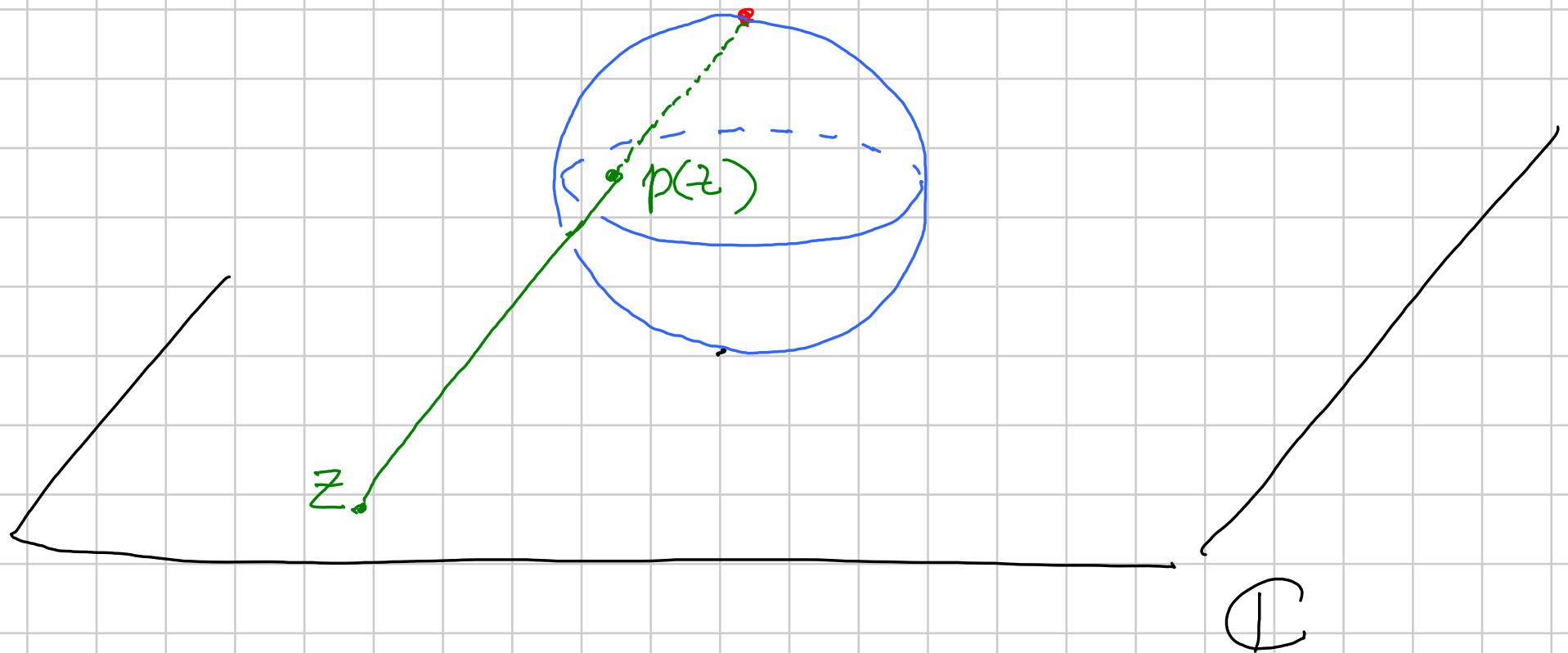
$\mathbb{P}^0(\mathbb{C}) = \text{ptto}$

come sopra

$$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\text{ptto}\}$$

$\uparrow$
l'unico pto all'inf di $\mathbb{C}$

$\bar{e}$ una sfera:



$p: \mathbb{C} \rightarrow \bar{e}$ la sfera tranne il polo nord
 $\bar{e}$ corrisp. biunivoca

(p^{-1} è la proiezione stereografica)

Per z che tende a ∞ in $\mathbb{C}$ in qualsiasi direzione, $p(z)$ tende al polo nord

$\Rightarrow$ p si estende a una corrispondenza univoca

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{sfera } S^2$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) &= \text{le rette di } \mathbb{R}^{(n+1)} \\ &= (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / x \sim y \text{ se } y = \lambda \cdot x \end{aligned}$$

Notazione: indico la classe di equivalenza di

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_m) \quad \text{con}$$

$$[x] = [x_0 : x_1 : \dots : x_m] \quad \text{coordinate omogenee}$$

" $:$ " perché per determinare il pto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
non contano le singole coordinate
ma i rapporti fra loro

$$\underline{\text{es}} : [9 : 6 : 2] = [3 : 2 : \frac{2}{3}]$$

$$[\sqrt{3} : -1 : \sqrt{6}] = [-3 : \sqrt{3} : -3\sqrt{2}]$$

$\mathcal{L}_\infty$: pti all' ∞ delle coniche:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$\parallel$

$\nwarrow$ pti all' ∞
di $\mathbb{R}^2$

$$\{[x:y:1] : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\{[x:y:0] : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

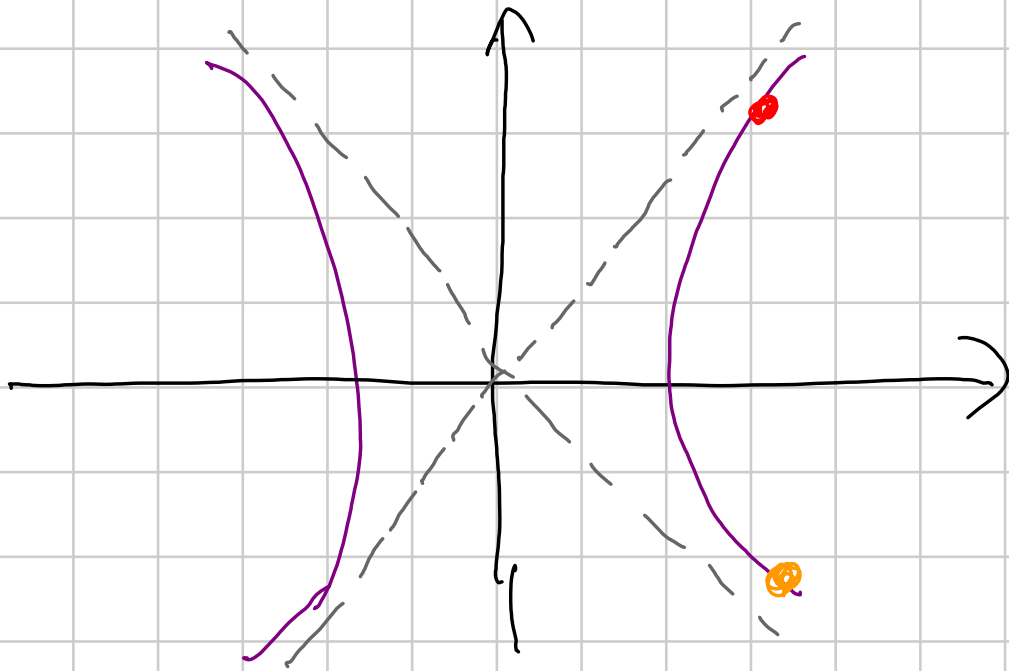
Ipersbole: $x^2 - y^2 = 1$

$$y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Punti su ipersbole:

$$\bullet \left[x : \sqrt{x^2 - 1} : 1 \right] = \left[1 : \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} : \frac{1}{x} \right] \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \underline{\underline{[1:1:0]}}$$

$$\bullet \left[x : -\sqrt{x^2 - 1} : 1 \right] = \left[1 : -\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} : \frac{1}{x} \right] \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \underline{\underline{[1:-1:0]}}$$



le direzioni
delle braccia
di I e II quadrante

le direzioni
delle braccia
di III e IV quadrante

Parabola : $y = x^2$

Pto sulla parabola:

$$[x : x^2 : 1] = \left[\frac{1}{x} : 1 : \frac{1}{x^2} \right] \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \underline{\underline{[0 : 1 : 0]}}$$

direzione dell'asse y
= l'asse della parabola

Oss: se $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$ è un polinomio
omogeneo nelle variabili $x_0, \dots, x_n$

(tutti i monomi dello stesso grado d) ha
senso considerare in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ il luogo

$$\{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] : p(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

infatti se $[x] = [y] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ho $y = \lambda \cdot x$

$$\begin{aligned} p(y_0, y_1, \dots, y_n) &= p(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \\ &= \lambda^d \cdot p(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

dunque $p(y) = 0 \iff p(x) = 0$ ~

Es : $\{ [x, y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : y - x^2 = 0 \}$

equazione
non omogenea

Non ha
senso :

$[1:1]$

soddisfa

$[2:2]$

non soddisfa

ma sono uguali ~

Def: chiamo sottospazio proiettivo X di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

la proiezione in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di $W \setminus \{0\}$ dove

$W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è sottosp. rett. ovvero un luogo

in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ definito da equazioni di I grado.

$$\text{Poupo } \dim(X) = \dim(W) - 1$$

(si può identificare a $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$
dove $d = \dim(X)$) -

Es: in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (dim = 2) i sottosp.

proiettivi sono: dim = 0 i punti

dim = 1 le rette proiettive

dim = 2 tutto $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Rette proiettive: immagine in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di
un piano W in $\mathbb{R}^3$ (dove si toglie 0).

vedendo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

ci sono due casi:

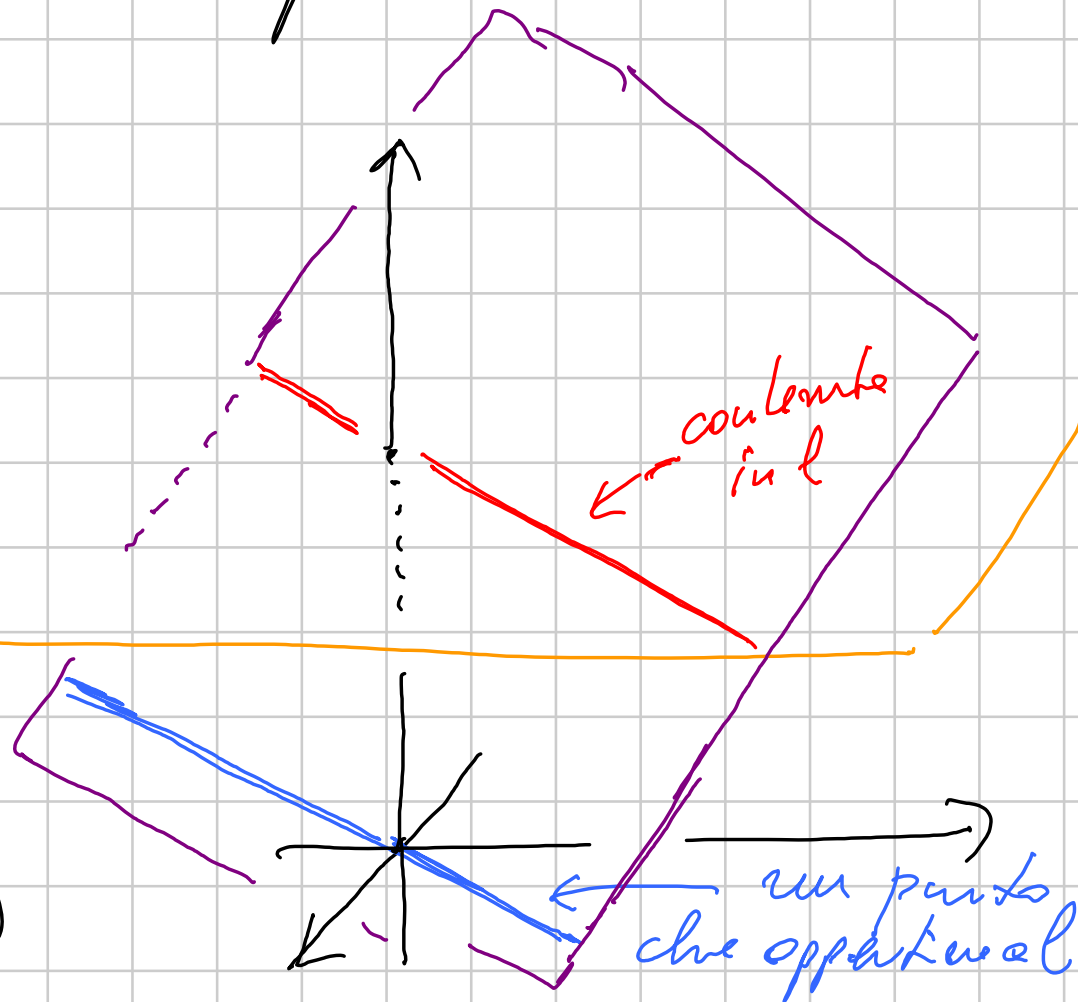
1) $W = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \Rightarrow l$ è la retta all'infinito per $\mathbb{R}^2$

2) altrimenti

$\mathbb{R}^2 \times \{1\}$

(Nota: la retta rossa non passa per l'origine di $\mathbb{R}^2$)
sempre

W



$\Rightarrow$ l è una retta affine di $\mathbb{R}^2$
insieme al suo pto all'inf (la
direzione lungo cui esse va all'inf)

Prop: due rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ distinte si
intersecano sempre in un solo punto.

Se nessuna delle due è la retta all'inf
ci sono due casi:

- le corrispondenti rette affini si incontrano
in un pto al finito
- le corrisp. rette affini sono parallele e

si incontrano in un pto all'infinito -

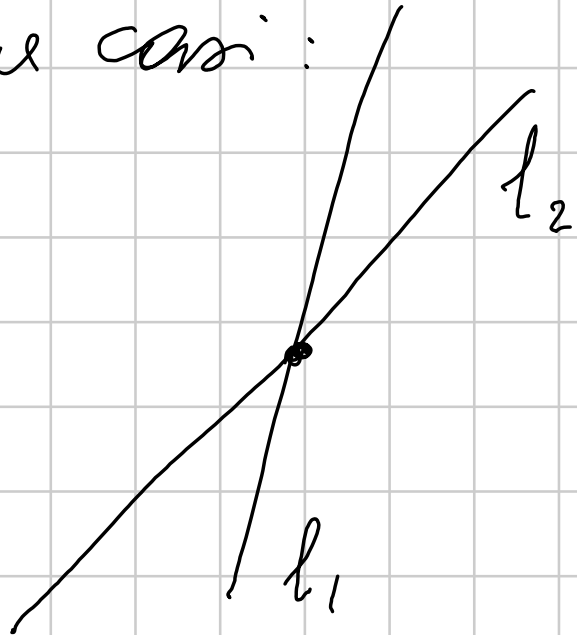
Dim: l_j proiezione di $W_j \subset \mathbb{R}^3$ piano $j=1,2$

distinte: $W_1 \neq W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 = Y$

$\dim Y = 1 \Rightarrow l_1 \cap l_2 = \text{il punto dato dalla retta } Y.$

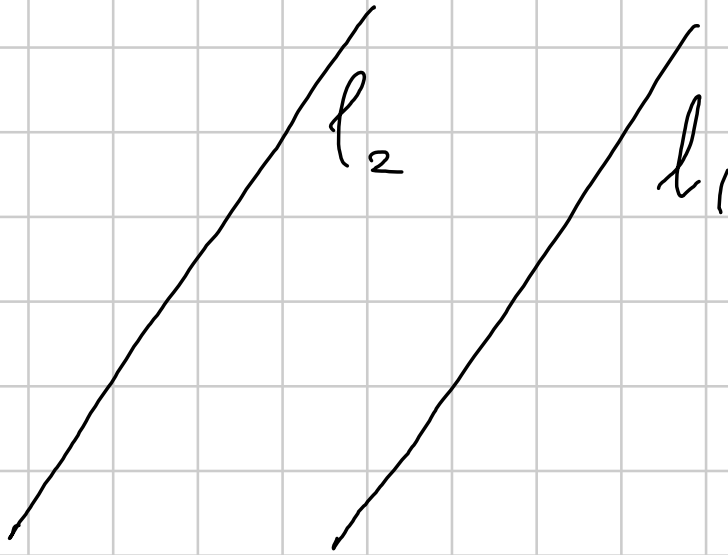
Due casi:

1)



si incontrano al finito
e hanno pti distinti all' ∞

2)



parallele (no
intersezione finita),
stesso pto all'∞ -



$$\text{visto: } \overline{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})} = \overline{\mathbb{R}^n} \cup \overline{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})}$$

spazio affine $\mathbb{R}^n$

i pti all'∞
di $\mathbb{R}^n$

non importa dov'è l'origine:
i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

che non sono tutti ell'oo sono i
sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$

Combinate di coordinate:

• per $\mathbb{R}^n$ come spazio rett. $x' = M \cdot x$
 $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertibile

• per $\mathbb{R}^n$ come spazio affine $x' = M \cdot x + v$
 $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertibile
 $v \in \mathbb{R}^n$

oppure
$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

- per $P^n(\mathbb{R})$ sono quelle indotte dalle trasformaz. di $\mathbb{R}^{n+1}$ come sp. vet.

lunga
$$[x'] = [N \cdot x]$$

$$N \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R}) \text{ invertibile.}$$

Q: quali sono le trasf. di $P^n(\mathbb{R})$ che lasciano il finito al finito

(e dunque l'input è all'infinito) ?

A : scrivo
$$N = \left(\begin{array}{cc} M & v \\ \underbrace{t_w}_m & \underbrace{c}_1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} m \\ \} 1 \end{array}$$

$M \in \mathbb{M}_{m \times m}$
 $v, w \in \mathbb{R}^m$
 $c \in \mathbb{R}$

Voglio che ogni pto al finito $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$

venga trasformato in un pto al finito $\begin{bmatrix} x' \\ k \end{bmatrix}$

con $k \neq 0$ (in modo che sia
o finito).

Voglio:
$$\begin{pmatrix} M & v \\ t_w & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mx + v \\ w \cdot x + c \end{pmatrix}$$

$$w \cdot x + c \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Se $w \neq 0$ procurando $x = -\frac{c}{\|w\|^2} \cdot w$ ho

$${}^t w \cdot x + c = -\frac{c}{\|w\|^2} \cdot {}^t w \cdot w + c = 0.$$

Depois disso com $w = 0$

$$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\det(N) = \det(M) \cdot c \neq 0$$

$$\Rightarrow \det(M) \neq 0, \quad c \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{considera } \frac{1}{c} \cdot N = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} M & \frac{1}{c} \cdot v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da' le stesse
trasf. di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
che N

cambio i nomi
e le chiamo

$$\begin{pmatrix} M & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ho scoperto che le transf. di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che
mandano in se' stesse la parte al finito $\mathbb{R}^n$

sono

$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero $x' = M \cdot x + V$

Cioè sono quello spini -