Geom 23/3/16

Pb: data $f: V \to V$ lineare cercare una base $\mathcal{B}$ di V t.c. $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ sia "facile"

(caso migliore: diagonale

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \right).$$

Q: perché non $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$?

(In particolare: perché non $f: V \to W$?)

A: Se mi costruito $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ vedo solo rank(f).

<u>Prop</u>: Se $f: V \to W$ ha rango k esistono $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

<u>Dim</u>: rank$(f) = k$ significa $\dim(\mathrm{Im} f) = k$.

Prendo $w_1, \dots, w_k$ base di $\mathrm{Im}(f)$ e $v_1, \dots, v_k$ t.c. $f(v_i) = w_i$ $i = 1 \dots k$.

Sia $\dim V = n$, $\dim W = m$. Noto che $\dim(\mathrm{Ker} f) = n - k$, e che se $v_{k+1}, \dots, v_n$

sono una base di $\ker f$ allora $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ sono base $\mathcal{B}$ di V (è la dimo della formula della dim) — Ora completo $w_1, \dots, w_k$ a base $\mathcal{C}$ di W e ho

$$
[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} =
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccccc}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & 1 & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_m
\end{array}
\\
\begin{array}{cccccc}
f(v_1) & \dots & f(v_k) & f(v_{k+1}) & \dots & f(v_n)
\end{array}
\end{array}
$$

$\blacksquare$

Pb: data $f : V \to V$ lin. trovare $\mathcal{B}$ t.c. $A = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ sia facile —

Def: dico che una $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ è **coniugata** di $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ se esiste $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibile t.c. $B = M \cdot A \cdot M^{-1}$.

(Oggi: $\mathbb{K}$ è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$; uso $\mathbb{K}$ quando è uguale su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$; uso $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ quando serve.)

Prop: se $\mathcal{B}_0$ è una base di V e $A_0 = [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}$ allora le matrici $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sono tutte e sole le coniugate di A.

Cor: se $A_0 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è l'applicazione lineare associata ($A_0 = [f]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_n}$)

cercare $\mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia facile significa cercare M t.c. $M \cdot A \cdot M^{-1}$ sia facile.

<u>Dim</u> (Prop): Se $\mathcal{B}$ è un'altra base di V, ho matrice $M \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ di cambio di base, cioè $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cdot M$. Sappiamo

$$A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M \cdot [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0} \cdot M^{-1} = M \cdot A_0 \cdot M^{-1}.$$

Viceversa se $A = M \cdot A_0 \cdot M^{-1}$ posto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cdot M$ ho $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A$. ▨

Fatto visto in AL.

Desiderio: trovare $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ t.c.

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \\ f(v_1) \;\dots\; f(v_n) & \end{array}$$

cioè $f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j \quad \forall j$.

In tal caso diciamo che f è diagonalizzabile.

Q: come trovare (se ci sono) tali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e $v_1, \dots, v_n$?

A1: cercarli uno alla volta.

Def: data $f : V \to V$ lineare (V su $\mathbb{K}$) diciamo che $\lambda \in \mathbb{K}$ è <u>autovalore</u> di f se esiste $v \in V$, $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$.
Ogni tale v è detto <u>autovettore</u> di f rispetto a λ.

Oss: se non chiedessi $v \neq 0$ avrei $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$0 = f(0) = \lambda \cdot 0$$

dunque ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ sarebbe autovalore.

A2: gli autovalori si cercano come radici di un polinomio.

Prop (def): dato $f: V \to V$ lineare chiamiamo polinomio caratteristico di f il polinomio

$$p_f(t) = \det\left(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) \in \mathbb{K}[t]$$

con $\mathcal{B}$ base di V.

Fatti: (1) $p_f(t)$ non dipende da $\mathcal{B}$ (è ben definito).

(2) $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $f \Longleftrightarrow \lambda$ è radice di $p_f(t)$.

<u>Esempio</u>: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$; $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$p_A(t) = \det\left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} t-5 & -2 \\ 7 & t+4 \end{pmatrix} = t^2 - t - 20 + 14$$

$$= t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$$

Prop: gli autovalori di A sono le radici di $p_A(t)$, ovvero $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$.

Verifichiamolo:

$\lambda_1 = 3$: dobbiamo provare che esiste $v_1 \neq 0$ t.c.
$f_A(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$ cioè $A \cdot v_1 = 3 \cdot v_1$.

Cerco $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; devo avere

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3x \\ -7x - 4y = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -7x - 7y = 0 \end{cases} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -2$: cerco $v_2 \neq 0$ t.c. $A \cdot v_2 = -2 v_2$;

$$\begin{cases} 5x + 2y = -2x \\ -7x - 4y = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} 7x + 2y = 0 \\ -7x - 2y = 0 \end{cases} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Ho trovato autovettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Sono base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2 \Rightarrow A$ è diagonalizzabile

$$[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ cioè

$$\mathcal{B}^{-1} \cdot A \cdot \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dim (Prop): 1) $\det(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$ non dipende da $\mathcal{B}$.

Sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cdot M$

$$\det(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) =$$

$$= \det(M \cdot t I_n \cdot M^{-1} - M \cdot [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0} \cdot M^{-1})$$

$$= \det\left(M \cdot \left(t \cdot I_n - [f]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0} \right) \cdot M^{-1} \right)$$

Binet

$$\overset{\text{Binet}}{=} \cancel{\det(M)} \cdot \det\left(t \cdot I_n - [f]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0} \right) \cdot \underbrace{\det(M^{-1})}_{\cancel{\frac{1}{\det(M)}}}$$

$$= \det\left(t \cdot I_n - [f]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0} \right)$$

2) λ autoval $\Longleftrightarrow$ λ radice di $p_f(t)$:

λ autoval $\Longleftrightarrow \exists\, v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$

$\Longleftrightarrow \exists\, v \neq 0$ t.c. $\lambda \cdot v - f(v) = 0$

$\Longleftrightarrow \exists\, v \neq 0$ t.c. $\lambda \cdot \mathrm{Id}_V(v) - f(v) = 0$

$$\Longleftrightarrow \exists v \neq 0 \text{ t.c. } (\lambda \cdot id_V - f)(v) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(\lambda \cdot id_V - f) \neq \{0\}$$

$$\Longleftrightarrow \det\left([\lambda \cdot id_V - f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \det\left([\lambda \cdot id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \det\left(\lambda \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \det\left(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right) \Big|_{t=\lambda} = 0$$

$$\Longleftrightarrow P_f(t) \text{ ha la radice } \lambda. \qquad \blacksquare$$

Oss: $p_f(t) = \det\left(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$ è effettivamente un polinomio: se $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

$$p_f(t) = \det \begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & \cdots & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ -a_{n1} & & & & t-a_{nn} \end{pmatrix}$$

tutti i coeff sono polinomi in t
(o costanti $-a_{ij}$ o binomi monici di I grado
$t - a_{ii}$)

coeff. del monomio di grado max è 1

$\Rightarrow$ è polinomio con:

- grado n, monico
- coeff di t^{n-1} è $-a_{11}-a_{22}\cdots-a_{nn}$

infatti in un addendo del det. se c'è un coeff fuori dalla diago ce ne sono almeno due:

$\Rightarrow$ gli addendi con un fattore fuori dalla diago contribuiscono con grado $\leq n-2$

- termine noto $p_f(0) = \det(0 \cdot I_n - A)$
$= \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(A)$

Riassumo:

<u>Prop 1</u>: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$
$$p_A(t) = t^n - tr(A)\cdot t^{n-1} + ??? + (-1)^n \det(A)$$

<u>Prop 2</u>: data $f: V \to V$ lineare posso definire $tr(f) = tr\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$

$$\det(f) = \det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right) \quad \text{ed ho}$$

$$p_f(t) = t^n - tr(f) \cdot t^{n-1} + ??? + (-1)^n \cdot \det(f)\_$$

<u>Dim</u> (Prop 2): devo solo provare che

$tr\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right)$ e $\det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right)$

non dipendono da $\mathcal{B}$ (il resto segue dalla Prop 1):

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M \cdot [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0} \cdot M^{-1}.$$

det : $\det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) = \cancel{\det(M)} \cdot \det\left([f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}\right) \cdot \cancel{\det(M^{-1})}$

tr : Verifico un fatto generale :

$$T \in \mathcal{M}_{k \times h} \qquad S \in \mathcal{M}_{h \times k}$$

$$\Longrightarrow tr(T \cdot S) = tr(S \cdot T)$$ — Infatti

$$tr(T \cdot S) = \sum_{i=1}^{k} (T \cdot S)_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} (T)_{ij} \cdot (S)_{ji}$$

$$\operatorname{tr}(S \cdot T) = \sum_{j=1}^{h} (S \cdot T)_{jj}$$

$$= \sum_{j=1}^{h} \sum_{i=1}^{k} (S)_{ji} \cdot (T)_{ij}$$

Per noi: $\operatorname{tr}\Big(\underbrace{M}_{T} \cdot \underbrace{\big([f]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0} \cdot M^{-1}\big)}_{S}\Big)$

$$= \operatorname{tr}\Big(\big([f]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0} \cdot \cancel{M^{-1}}\big) \cdot \cancel{M}\Big) = \operatorname{tr}\big([f]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0}\big) \quad \blacksquare$$

Cor: data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

se il polinomio caratteristico $p_A(t)$ ha tutte le radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $\mathbb{K}$ (contate con la molteplicità) allora

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = tr(A)$$

$$\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det(A)$$

Infatti: $p_A(t) = t^n - tr(A) \cdot t^{n-1} + ??? + (-1)^n \det(A)$

$$\|$$

$$(t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n) = t^n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \cdot t^{n-1} + ??? + (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Oss

Per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ è sempre vero che un polinomio di grado n ha n radici contate con la molteplicità

Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ –

Rispetto a quello che potete trovare scritto:

io: $P_f(t) = \det\left(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right)$

altri: $P_f(t) = \det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - t \cdot I_n \right)$

$= (-1)^n \cdot$ mia versione

(differenza da poco)

io: def λ autovalore è: $\exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$

molteplicità algebrica: radice di $p_f(t)$

altri: def: λ autovalore se radice di $p_f(t)$

ERRORE CONCETTUALE

——— o ———

$\boxed{19.3.14}$ dato P piano param trovare $P^\perp$ param

(a) $P = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$

$$\pi^{\perp} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \text{Span}\begin{pmatrix} 30 \\ -32 \\ 22 \end{pmatrix} = \text{Span}\begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$75 - 64 - 11$ ✓

$-45 - 32 + 77$ ✓

$\boxed{9.3.15}$ Data ℓ cart. trovare $\ell^{\perp}$ cart.

(a) $\ell: \begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ 6x - 7y + z = 0 \end{cases}$

$$\ell = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-7\\1\end{pmatrix}\right)^{\perp}$$

$$\ell^{\perp} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-7\\1\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}6\\-7\\1\end{pmatrix}\right)^{\perp}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\-8\\-44\end{pmatrix}^{\perp} = \begin{pmatrix}1\\4\\22\end{pmatrix}^{\perp}$$

$$2 + 20 - 22 \checkmark$$
$$6 - 28 + 22 \checkmark$$

$$\Rightarrow \ell^{\perp} : \ x + 4y + 22z = 0$$