Geom 18/5/16

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto

$\omega = f\,dx + g\,dy$ $\quad \left(\omega(x,y) = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy \right)$

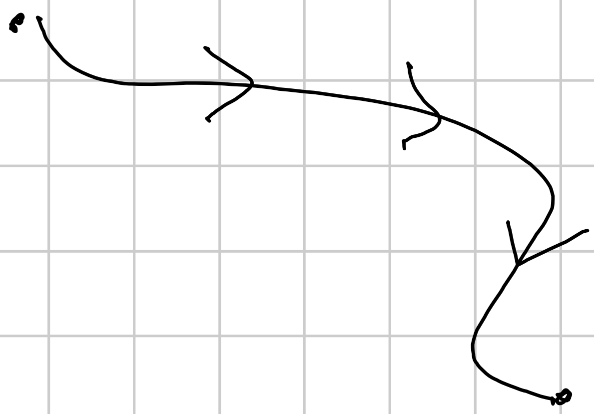
1-forma ; $\alpha : [a,b] \to \Omega$ curva $\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \Big(f(\alpha(t)) \cdot X'(t) + g(\alpha(t)) \cdot Y'(t) \Big)\, dt$$

Prop: $\int_\alpha \omega$ non cambia se riparametrizzo mantenendo l'orientazione;

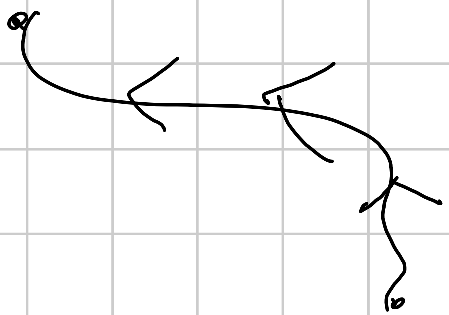
cambia segno se cambio orientazione.

$\downarrow \gamma$

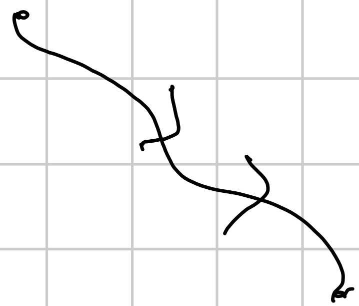


non dipende dalla legge di percorrenza

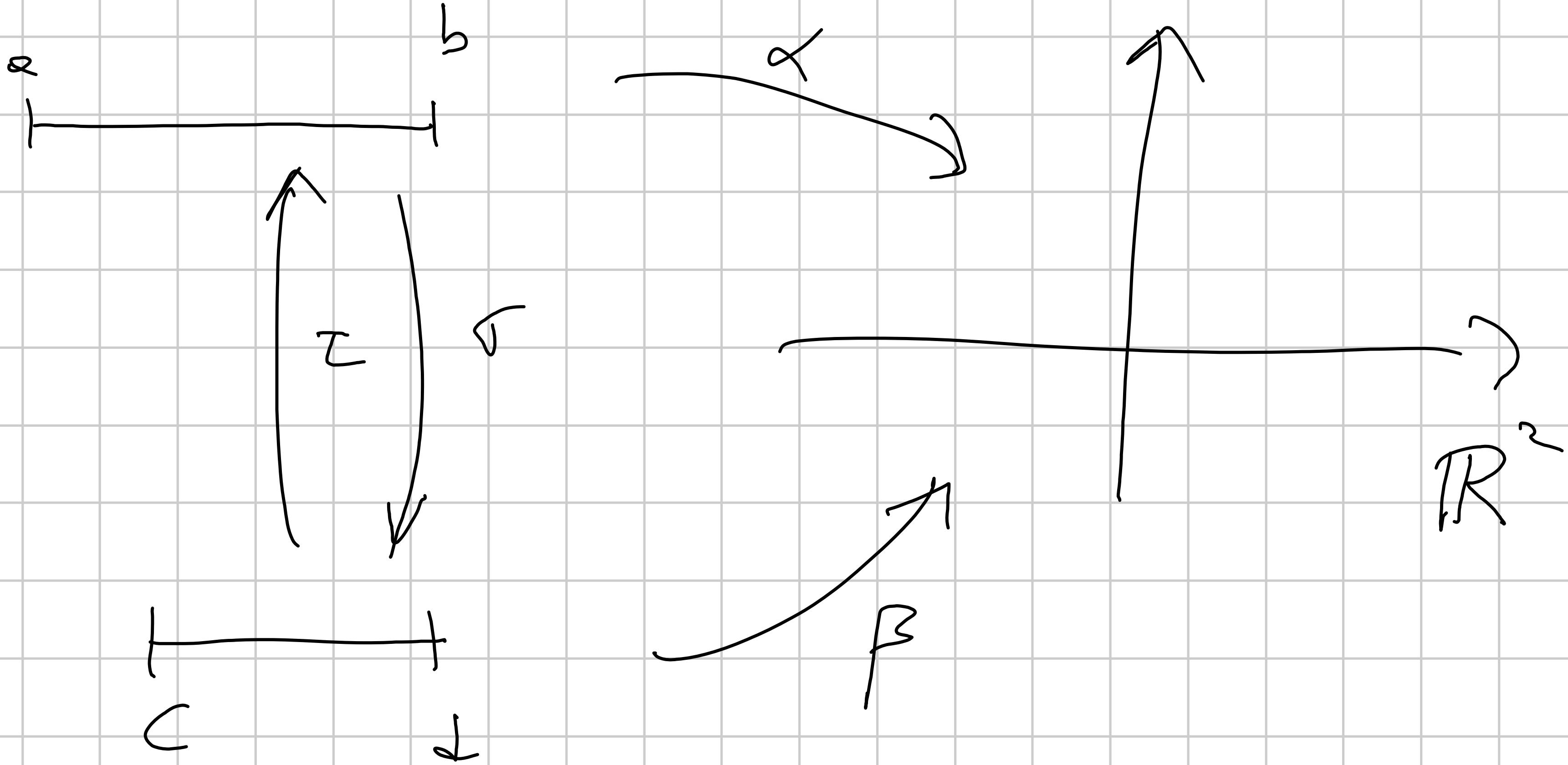
$\downarrow \gamma$



$= -$



Dim:



$$\beta(s) = \alpha(\tau(s))$$

ovvero $\alpha(t) = \beta(\sigma(t))$ $\quad \sigma = \tau^{-1}$

$$\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} Z \\ U \end{pmatrix}$$

$$\int_\beta \omega = \int_c^d \Big(f(\beta(s)) \cdot Z'(s) + g(\beta(s)) \cdot U'(s) \Big) ds$$

$$\beta(s) = \alpha(\tau(s))$$

$$Z(s) = X(\tau(s)) \implies Z'(s) = X'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)$$

$$U(s) = Y(\tau(s)) \implies U'(s) = Y'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)$$

$$\implies \int_\beta \omega = \int_c^d \Big(f(\alpha(\tau(s))) \cdot X'(\tau(s)) + g(\alpha(\tau(s))) \cdot Y'(\tau(s)) \Big) \cdot \tau'(s) \, ds$$

esegui cambio di variabile $t = \tau(s)$

che trasforma $[c, d]$ in $[a, b]$

$$\Rightarrow \underset{\substack{(\text{costante}) \\ \| \\ \underline{\pm 1}}}{\operatorname{sgn}(\tau'(s))} \cdot \underbrace{\int_a^b \left(f(\alpha(t)) \cdot X'(t) + g(\alpha(t)) \cdot Y'(t) \right) dt}_{\int_\alpha \omega}$$

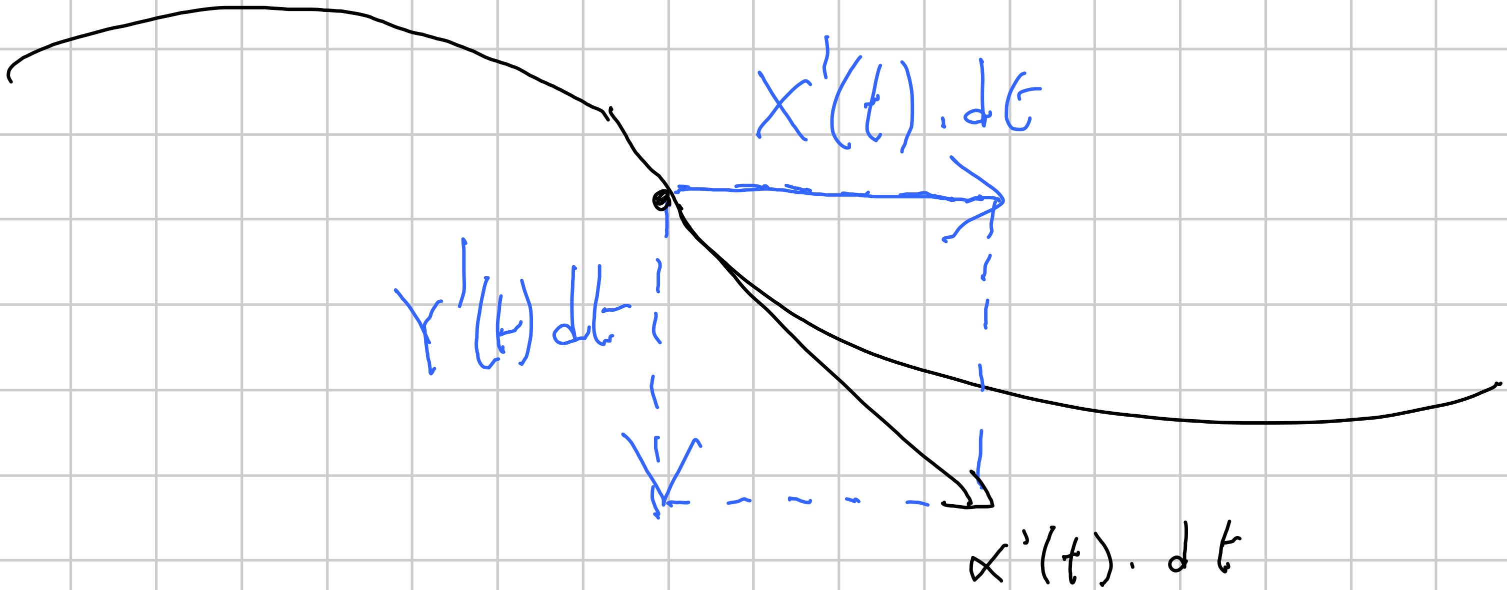
a seconda che τ mantenga o inverta l'orientazione. ▨

In fisica: una forza conservativa è una per la quale il lavoro fatto lungo un percorso dipende solo dagli estremi. Sono conservative le forze che ammettono un potenziale:

lavoro lungo curva α = differenza di potenziale tra gli estremi di α.

Consideriamo $U : \Omega \to \mathbb{R}$ (potenziale).

Lavoro infinitesimo fatto dalla forza di potenziale U lungo una curva $\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ è



dunque: $\frac{\partial U}{\partial x}(\alpha(t)) \cdot X'(t)\,dt$

$+ \frac{\partial U}{\partial y}(\alpha(t)) \cdot Y'(t)\,dt$

lavoro totale: $\int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x}(\alpha(t)) \cdot X'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(\alpha(t)) \cdot Y'(t) \right) dt$

Ho trovato la forma

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy$$

differenziale di U.

Es: $U(x,y) = e^{3x+2} \cdot \ln(5x+7y)$

$$dU = \left(3 \cdot e^{3x+2} \cdot \ln(5x+7y) + e^{3x+2} \frac{5}{5x+7y}\right) \cdot dx$$

$$+ \, e^{3x+2} \cdot \frac{7}{5x+7y} \cdot dy \, .$$

Prop: $\displaystyle\int_{\alpha} dU = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$.

Dim: $\displaystyle\int_\alpha dU = \int_a^b \frac{\partial U}{\partial x}(X(t), Y(t)) \cdot X'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(X(t), Y(t)) \cdot Y'(t)\, dt$

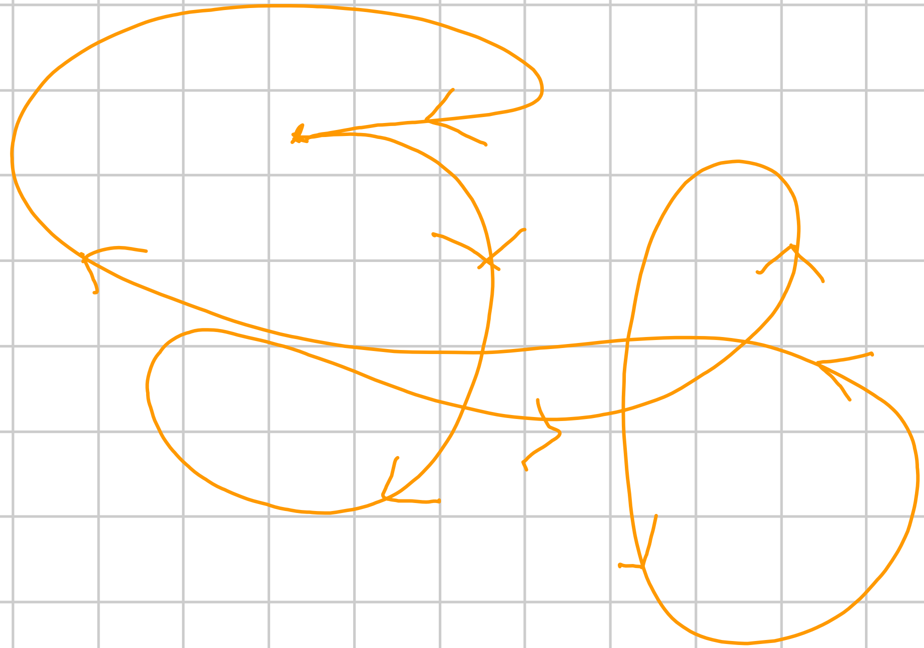
$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}(X(t), Y(t)) \cdot X'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(X(t), Y(t)) \cdot Y'(t)}_{\frac{d}{dt} U(\underbrace{X(t), Y(t)}_{\alpha(t)})}$$

$$= U(\alpha(t)) \Big|_{t=a}^{t=b} = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)).$$

$\boxed{\text{c.v.d.}}$

Cor: se α è una curva chiusa

— cioè $\alpha(b) = \alpha(a)$



allora $\int_\alpha dU = 0$.

<u>Def</u>: chiamo $\omega = f\,dx + g\,dy$ su $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ <u>esatta</u> se $\exists\, U : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $\omega = dU$,

cioè $f = \frac{\partial U}{\partial x}$ e $g = \frac{\partial U}{\partial y}$.

Oss: se $\omega = f\,dx + g\,dy$ è esatta allora

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \end{aligned}\right\} \text{sono uguali}$$

Dunque ω può essere esatta solo se

$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$. Se ciò accade chiamo ω chiusa.

Riassumendo: $\omega = f\,dx + g\,dy$

- esatta se $\omega = dU$, cioè $f = \frac{\partial U}{\partial x}$, $g = \frac{\partial U}{\partial y}$
- chiusa se $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$

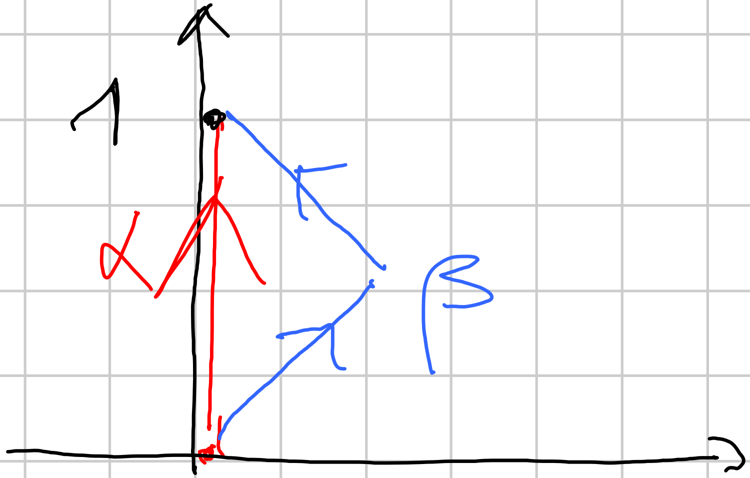
Fatto: esatta $\Longrightarrow$ chiusa.

Esempio: $\omega = x \cdot dy = \underset{\overset{\parallel}{f(x,y)}}{0} \cdot dx + \underset{\overset{\parallel}{g(x,y)}}{x} \cdot dy$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies$ non è chiusa

$\implies$ non è esatta.

Altro modo di vedere che non è esatta:



$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$

$\beta(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} & t \in [0, 1/2] \\ \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} & t \in [1/2, 1] \end{cases}$

$$\int_\alpha x\,dy = \int_0^1 0 \cdot 1 \cdot dt = 0$$

$$\int_\beta x\,dy = \int_0^{1/2} t \cdot dt + \int_{1/2}^1 (1-t)\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big|_0^{1/2} + \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{1/2}^1$$

$$= \frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Q: come accorgersi che una certa $\omega = f\,dx + g\,dy$ è esatta?

Se non è chiusa, cioè se $\frac{\partial g}{\partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial y}$: A: <u>No</u>.

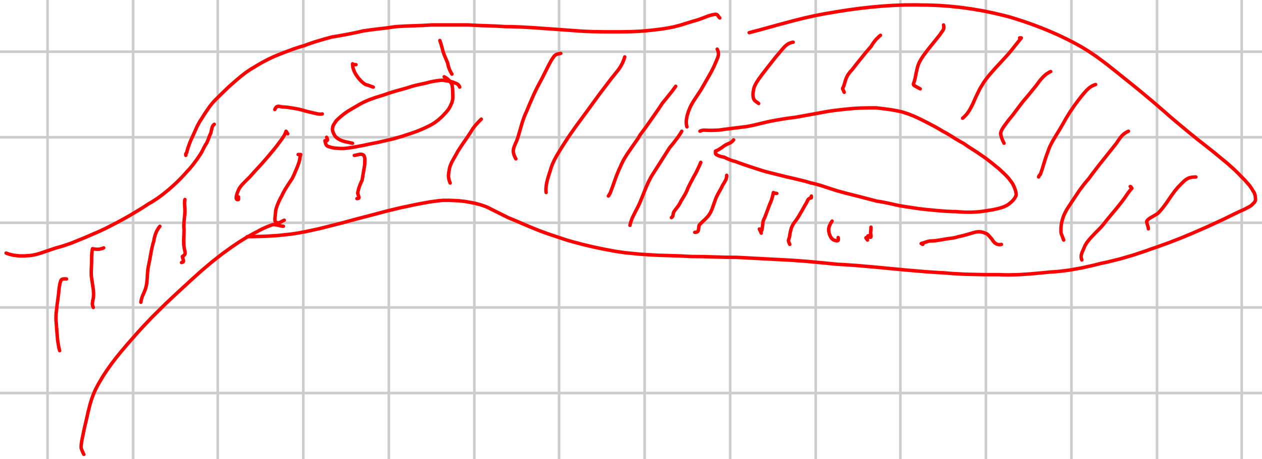
A: (generale ma inutile)

<u>Teo</u>: ω su Ω è esatta

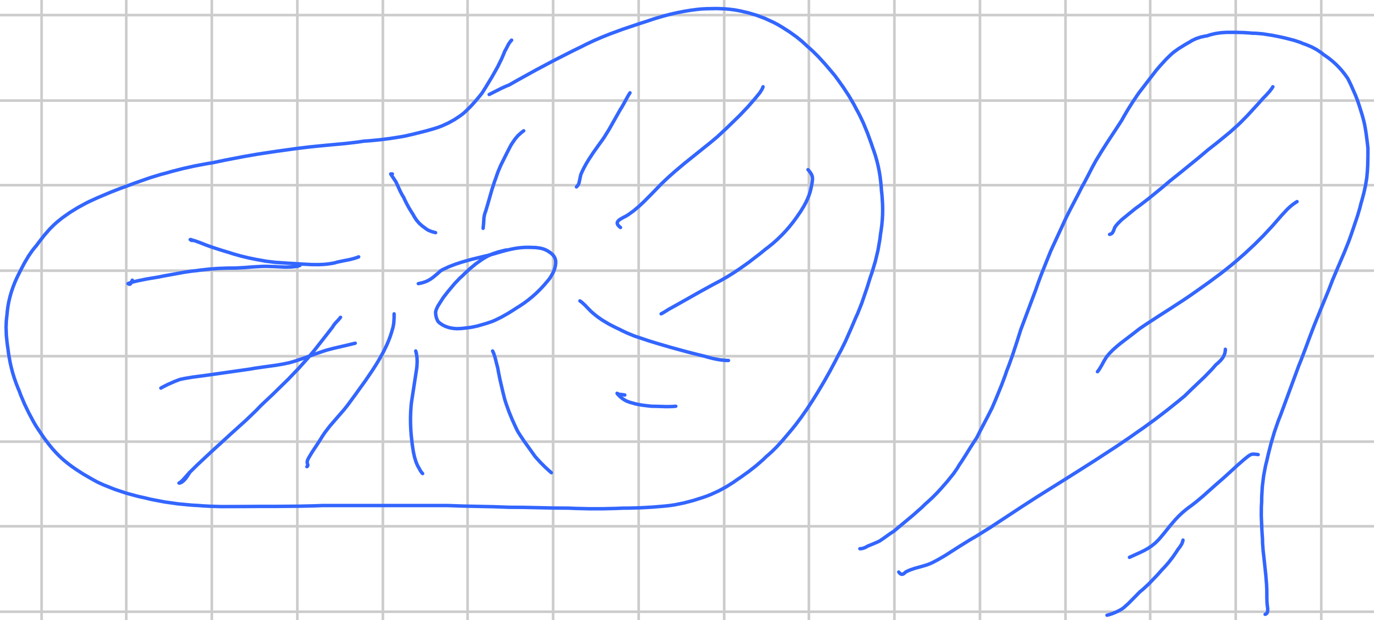
$$\Updownarrow$$

data $\alpha : [a,b] \longrightarrow \Omega$, $\int_\alpha \omega$ dipende solo da $\alpha(b)$ e $\alpha(a)$.

(D'ora in poi: prendiamo solo Ω connessi



OK



NO

)

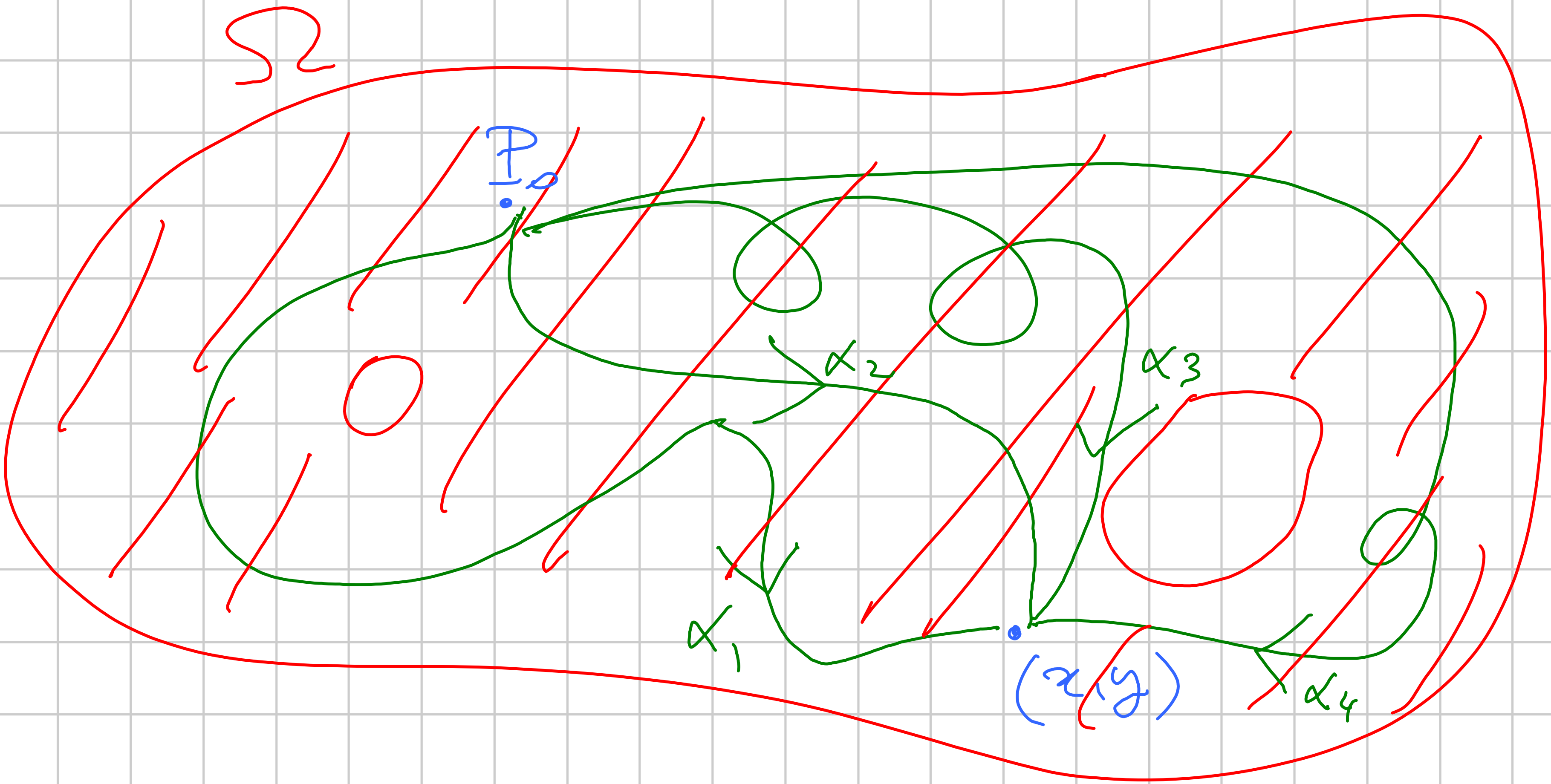
Dim: $\Downarrow$ Visto sopra.

$\Uparrow$ Devo "inventare" il potenziale U; voglio che $\int_\alpha \omega = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$.

Fisso $P_0 \in \Omega$ e definisco

$U : \Omega \to \mathbb{R}$

$U(x,y) = \int_\alpha \omega$ dove α è qualsiasi curva che unisce P_0 a (x,y)

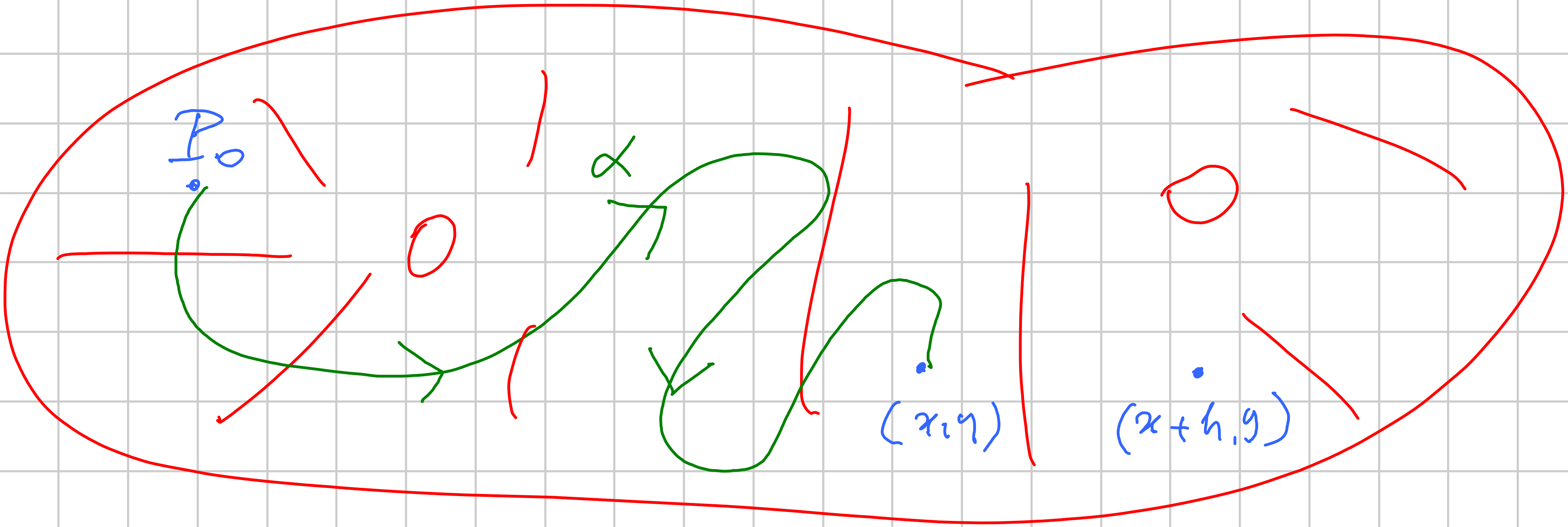


SO: $\int_\alpha \omega$ dipende solo dagli estremi

$\Longrightarrow$ la definizione ha senso

Devo provare che $\dfrac{\partial U}{\partial x} = f \qquad \dfrac{\partial U}{\partial y} = g$.

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{U(x+h,y) - U(x,y)}{h}$$



Come β tra P_0 e $(x+h,y)$ scelgo α seguito dal segmento $[x,x+h]\times\{y\}$

parametrizzato da $\sigma:(x+t,y)$ $t\in[0,h]$

$$\Rightarrow \frac{U(x+h,y)-U(x,y)}{h} = \frac{\cancel{\int_\alpha \omega} + \int_\sigma \omega - \cancel{\int_\alpha \omega}}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \Big(f(x+t,y)\cdot 1 + g(x+t,y)\cdot 0 \Big)\,dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h f(x+t,y)\,dt = \frac{d}{dh}\int_0^h f(x+t)\,dt \Big|_{h=0}$$

$= f(x,y)$. $\blacksquare$

—— ○ ——

$\omega = f\,dx + g\,dy$ su Ω

- esatta se $\omega = dU$, cioè $f = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $g = \dfrac{\partial U}{\partial y}$
- chiusa se $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Fatto: esatta $\Longrightarrow$ chiusa.

Esempio (1-forme chiuse ma non esatte).

$$\omega(x,y) = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \quad \text{su } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{f(x,y)} dx + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{g(x,y)} \cdot dy$$

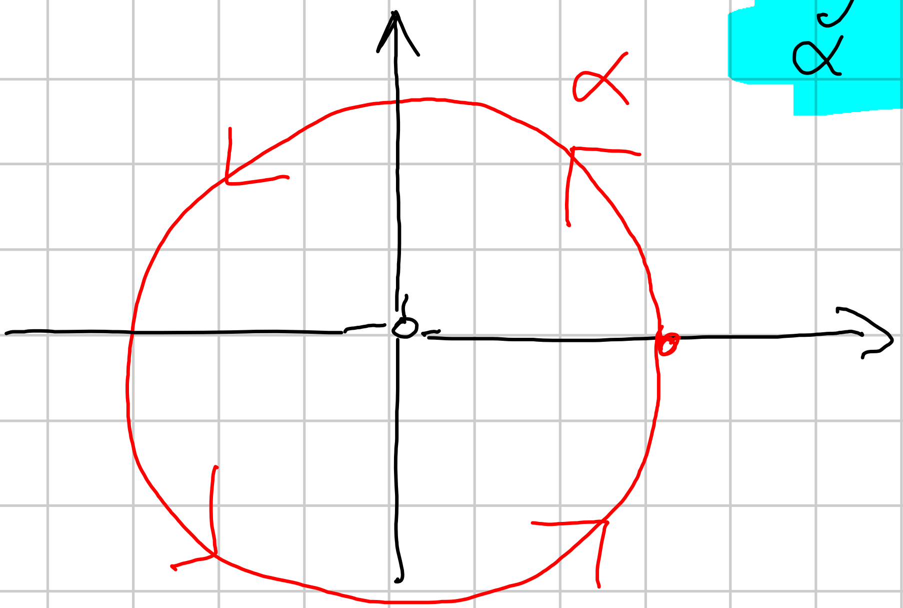
chiusa: $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

OK

non esatta: se ω fosse esatta avrei

$$\boxed{\int_\alpha \omega = 0}$$ $\forall \alpha$ curva chiusa contenuta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.



$$\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

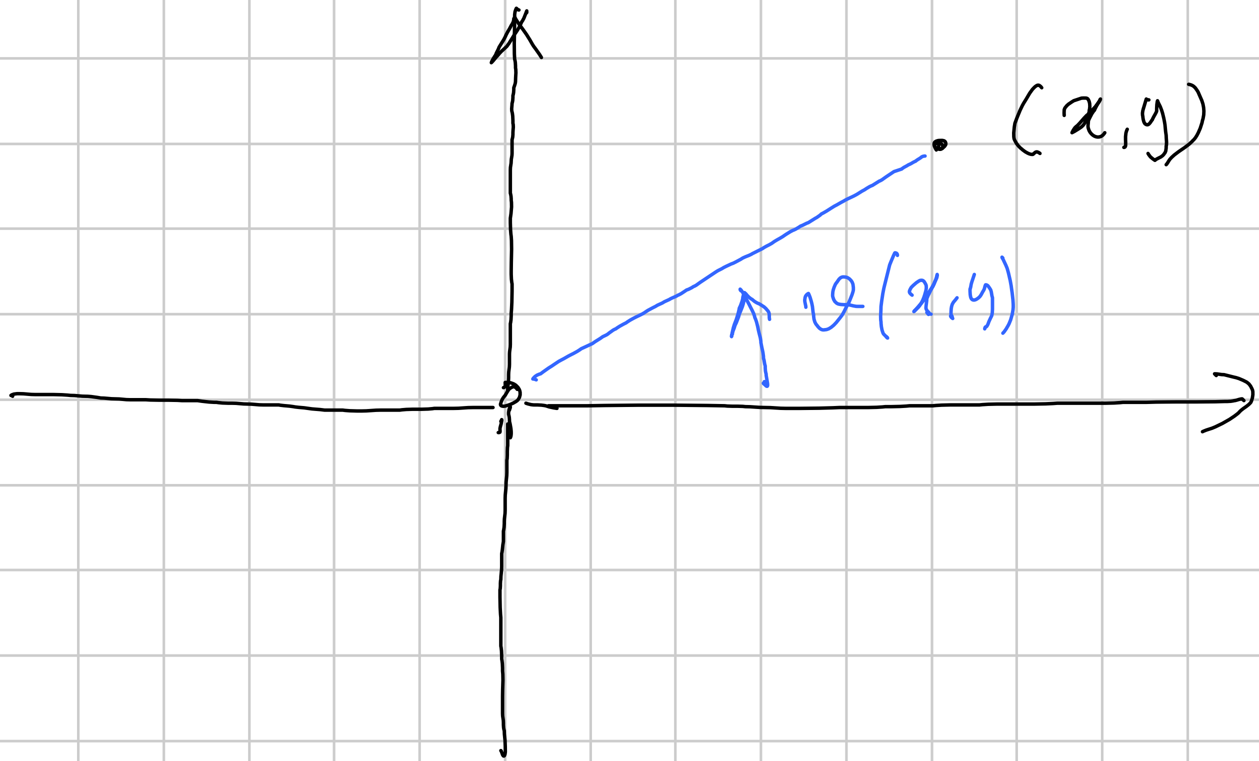
$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

$$\int_\alpha \omega = \int_\alpha \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)\cdot\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

OK

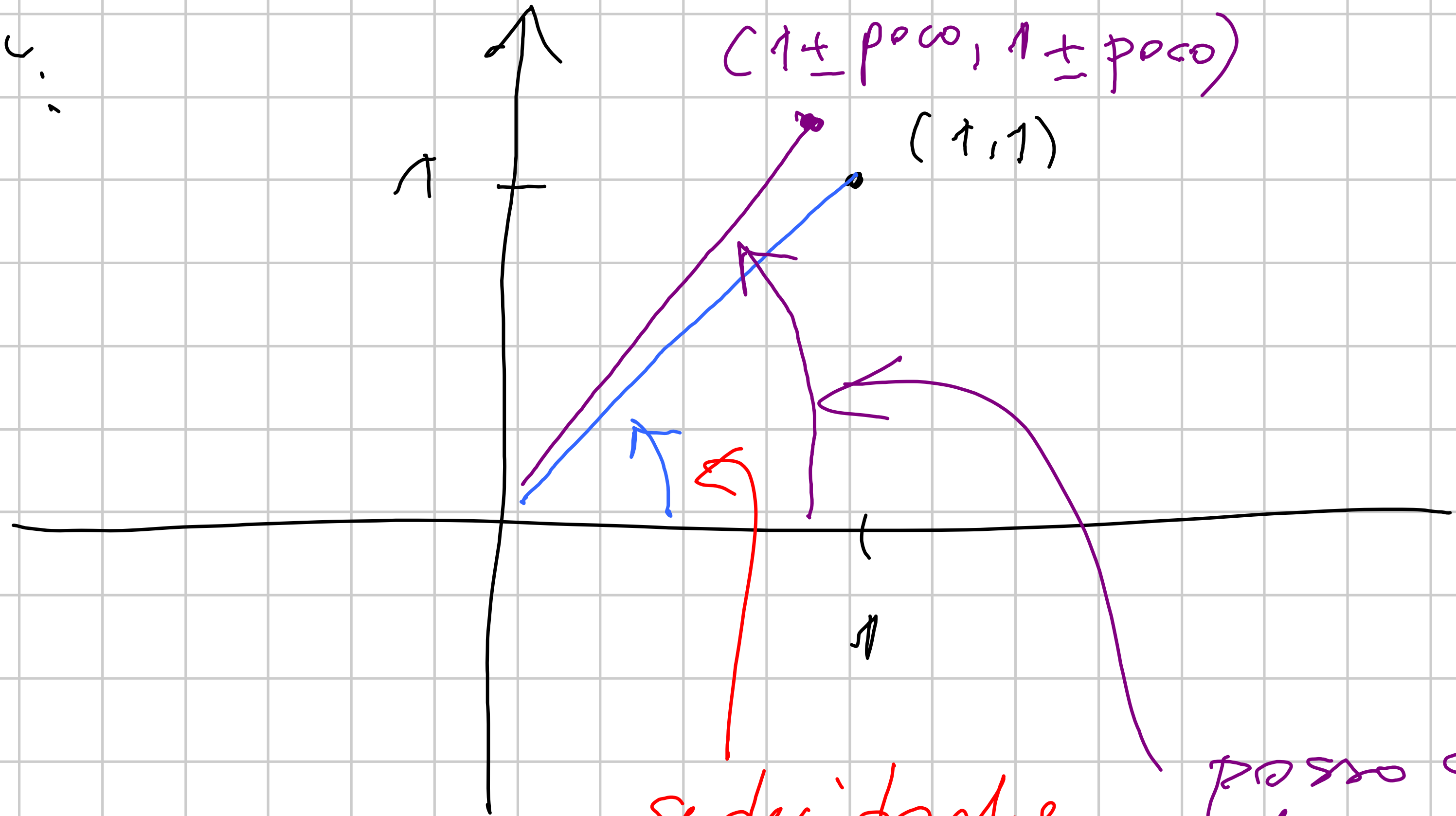
Q: da dove viene questa $\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$?



$\vartheta(x,y)$ non è ben definito: se va bene un certo valore, vanno bene lo stesso valore $+2\pi, +4\pi, \dots$

$-2\pi, -4\pi, \dots$

Però:



se decido che vale $\pi/4$

posso decidere che qui vale vicino a $\pi/4$

se invece decido che vale $9/4\,\pi$

vale circa $9/4\,\pi$

Dunque: ϑ non ha senso
ma $d\vartheta$ sì.

Ora le espressioni possibili per ϑ sono

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{arccotg}\frac{x}{y}+k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)dy$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dy$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}\,dy$$

$$= \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

le nostro !!

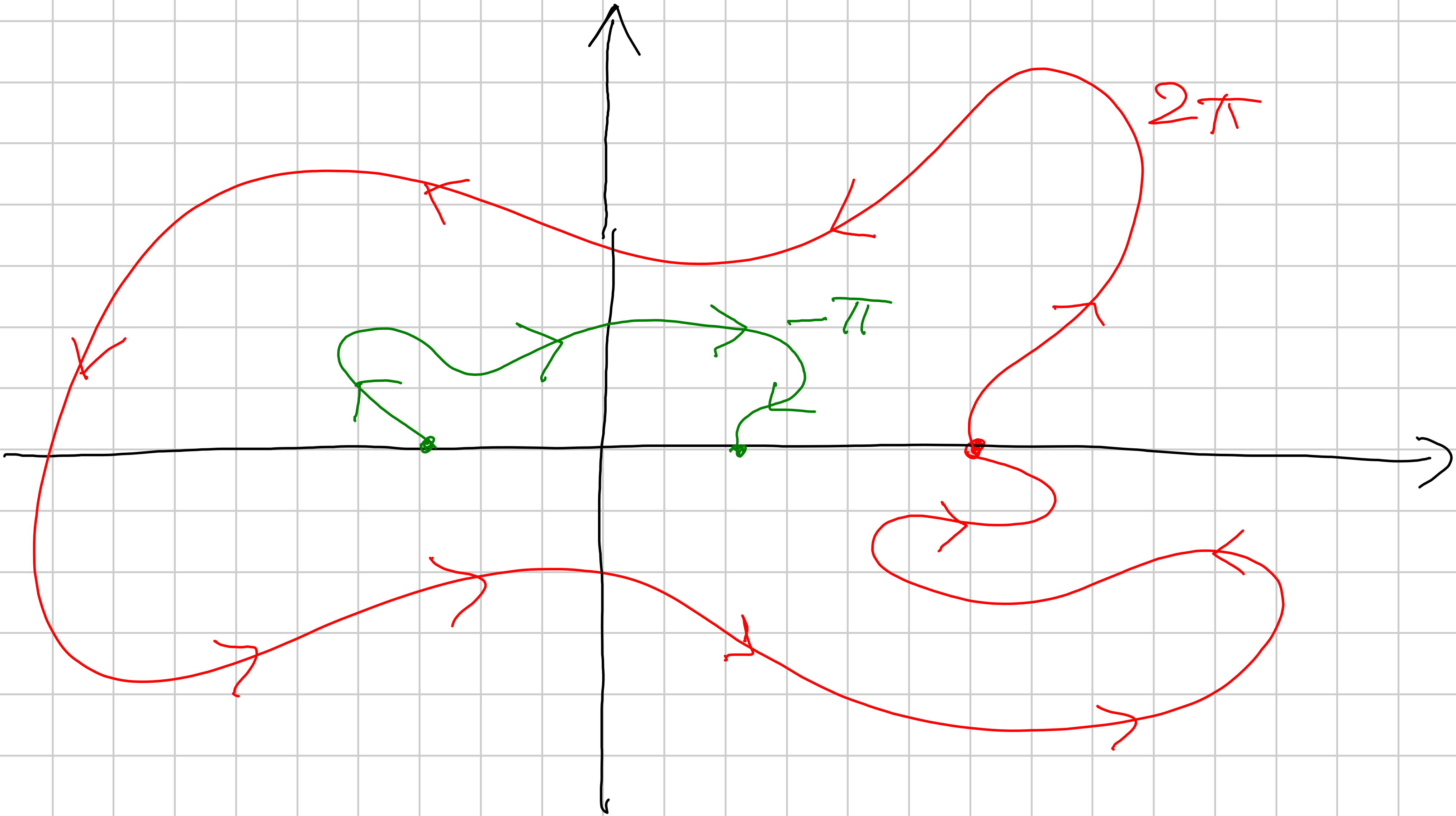
$$d\left(\operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}\cdot dx + \left(-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)dy$$

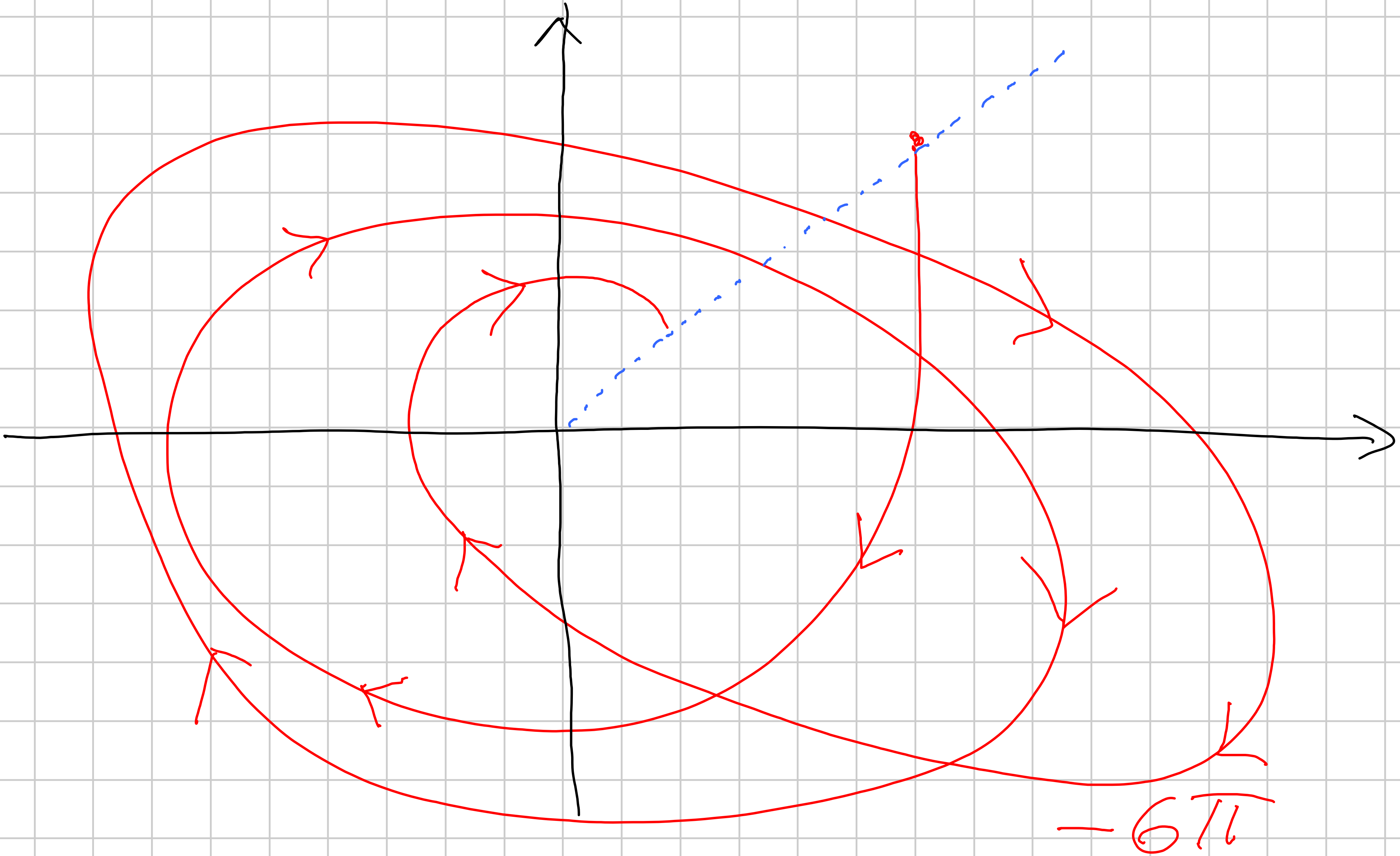
$$= \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}.$$

Morale: la forma $\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$ è dre.

Questo consente di calcolare i suoi integrali senza fare i conti:



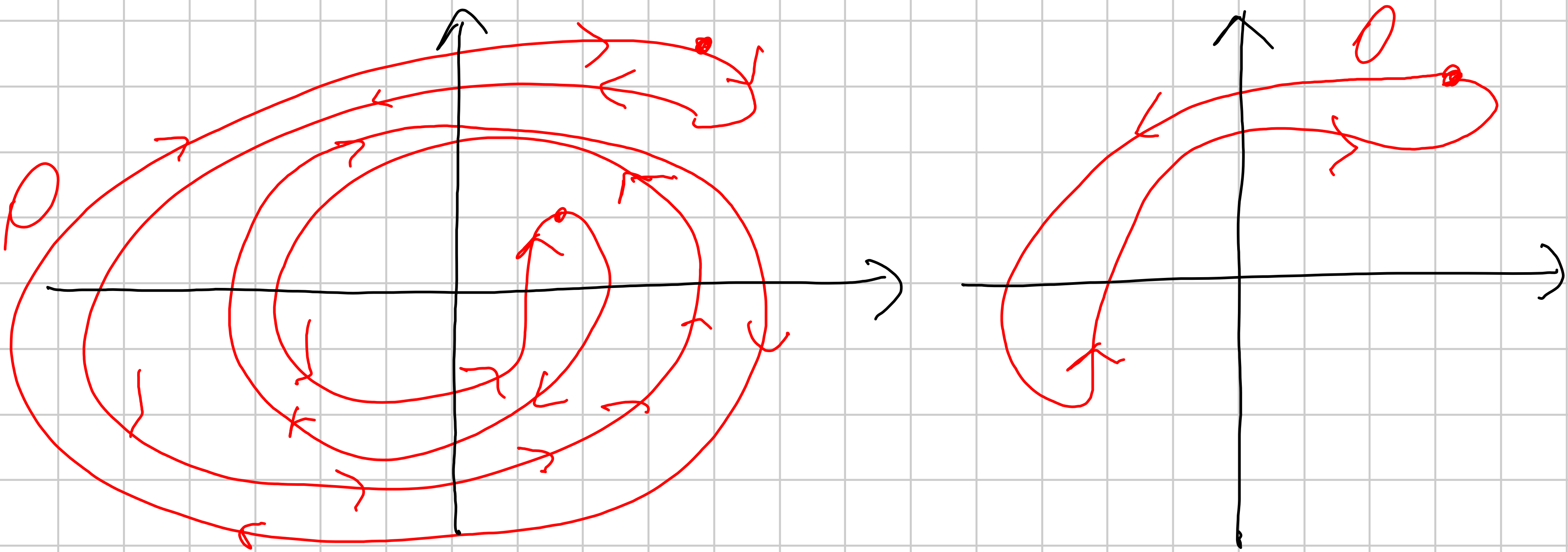
2π
−π

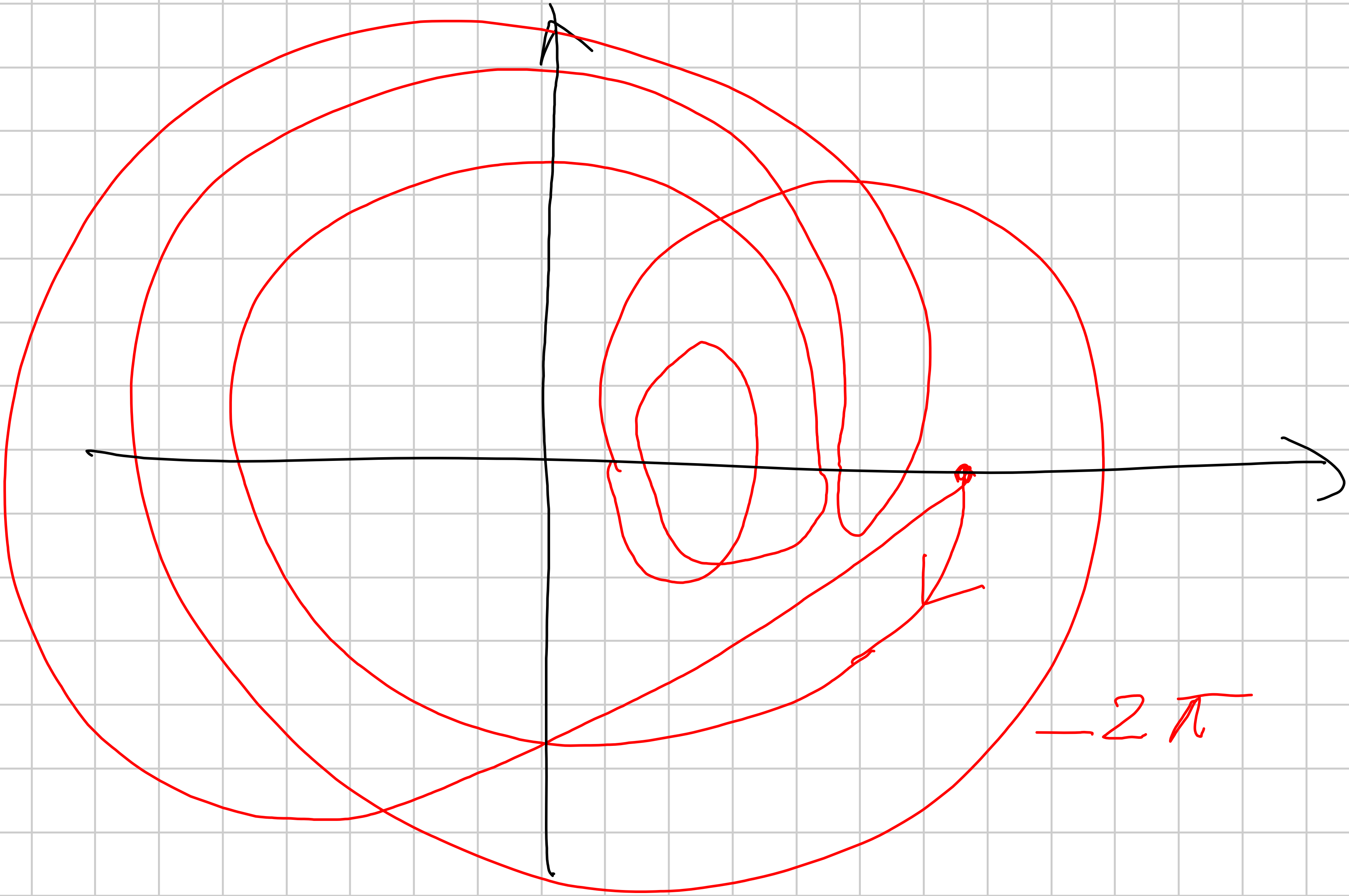


-6π

<u>Morale</u>: per una α chiusa $\int_\alpha \omega$

è $2\pi \cdot$ numero algebrico di avvolgimenti di α intorno a O.

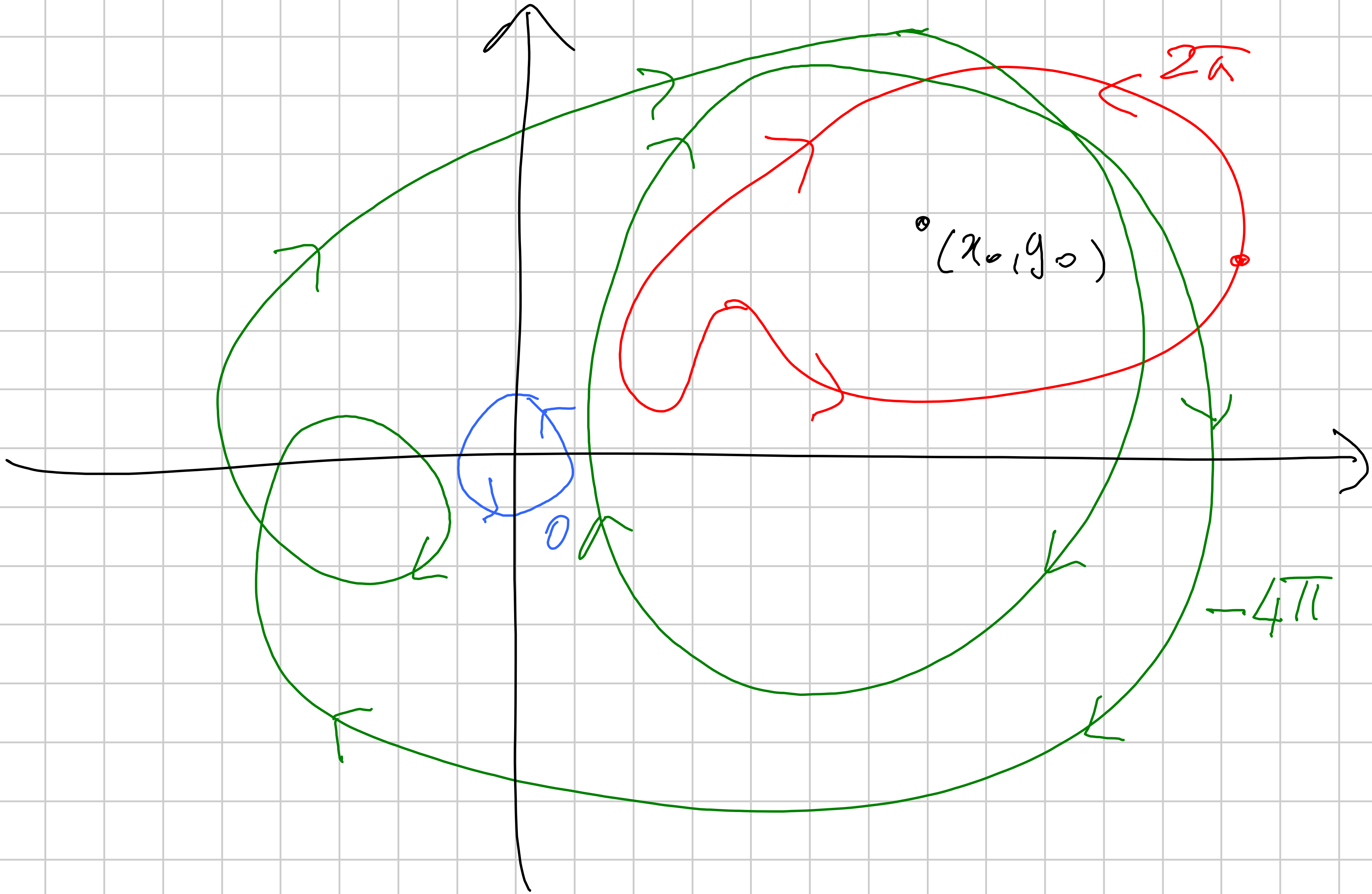



-2π

Oss: posso usare le stesse idee con un altro pto invece dell'origine:

$$\frac{-(y-y_0)\cdot dx + (x-x_0)\, dy}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Conta $2\pi \cdot$ numero avvolg. intorno a (x_0, y_0).



(x_0, y_0)
2π
0
-4π