

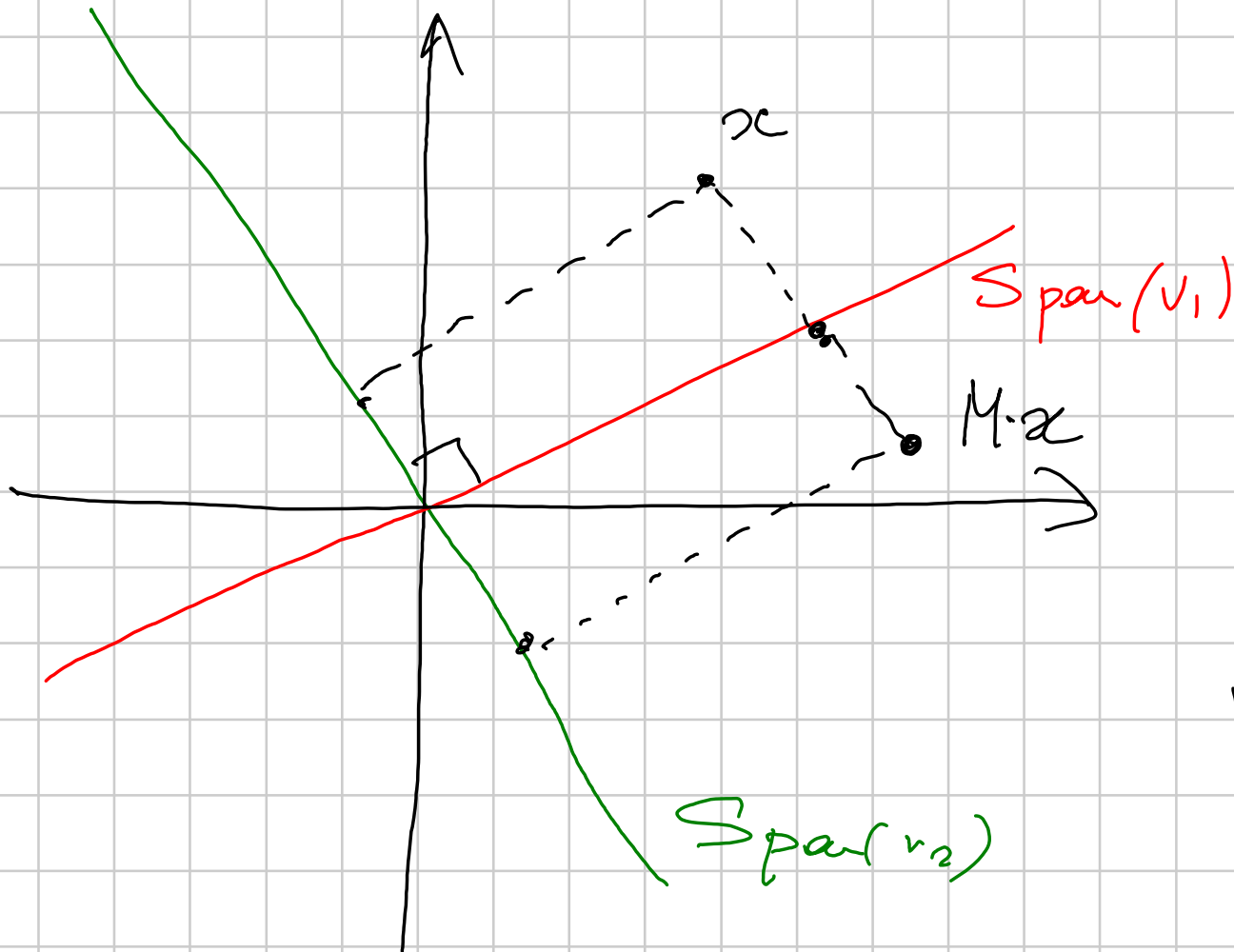
$f: V \rightarrow V$ isometria (ortogonale) se
 $\langle f(v)/f(w) \rangle = \langle v/w \rangle \quad \forall v, w$

$\mathbb{I}_n \mathbb{R}^n \quad M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ortog. se ${}^t M \cdot M = \mathbb{I}_n$

Esempi: $\mathbb{R}^2$ rotazioni $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos \alpha \\ s = \sin \alpha \end{matrix}$

riflessioni: $\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} = M$

E' infl. perche' esistono vettori v_1, v_2 ortogonali t.c.
 $Mv_1 = v_1 \quad Mv_2 = -v_2$



$$v_1 : \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (c-1)x + sy = 0 \\ sx - (c+1)y = 0 \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} c-1 & s \\ s & -c-1 \end{pmatrix} =$$

$$= -c^2 + 1 - s^2 = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} s \\ 1-c \end{pmatrix}$$

$$v_2 : \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (c+1)x + sy = 0 \\ sx + (1-c)y = 0 \end{cases}$$

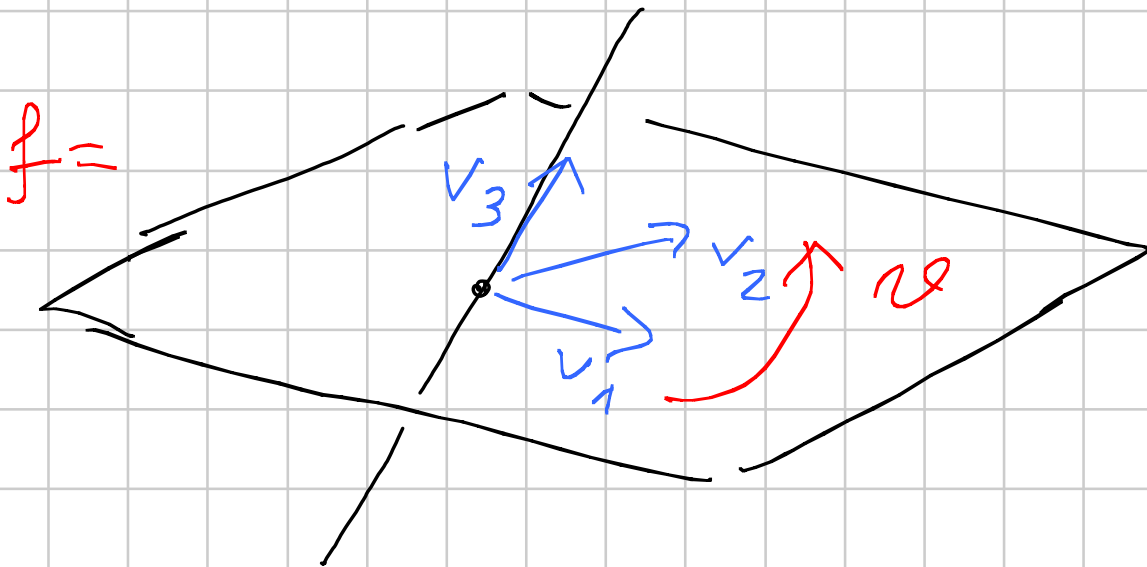
$$\det () = 1 - c^2 - s^2 = 0$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -s \\ 1+c \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} s \\ 1-c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s \\ 1+c \end{pmatrix} \right\rangle = -s^2 + 1 - c^2 = 0$$

Fatto: tutte le isom. di $\mathbb{R}^2$ sono rotaz. o rifl.

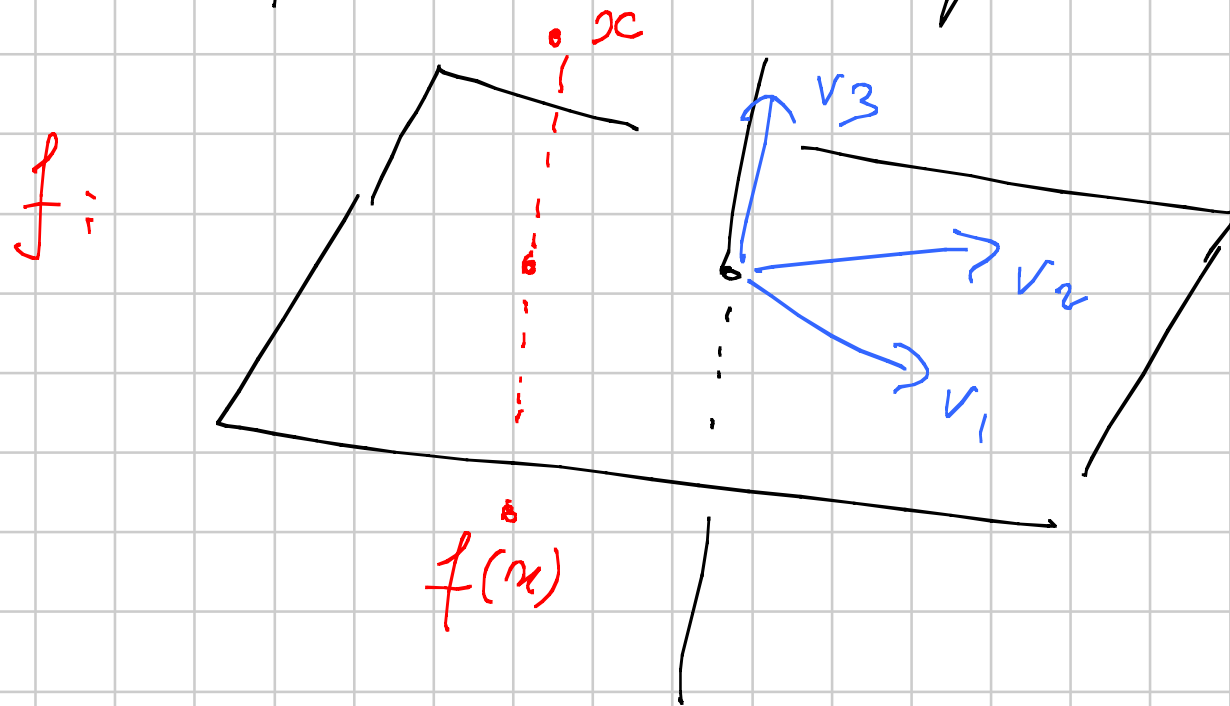
Esempio: $\mathbb{R}^3$ • rotazioni intorno a retta



$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ base
ortonormale con
 v_1, v_2 sul piano di rotaz.

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

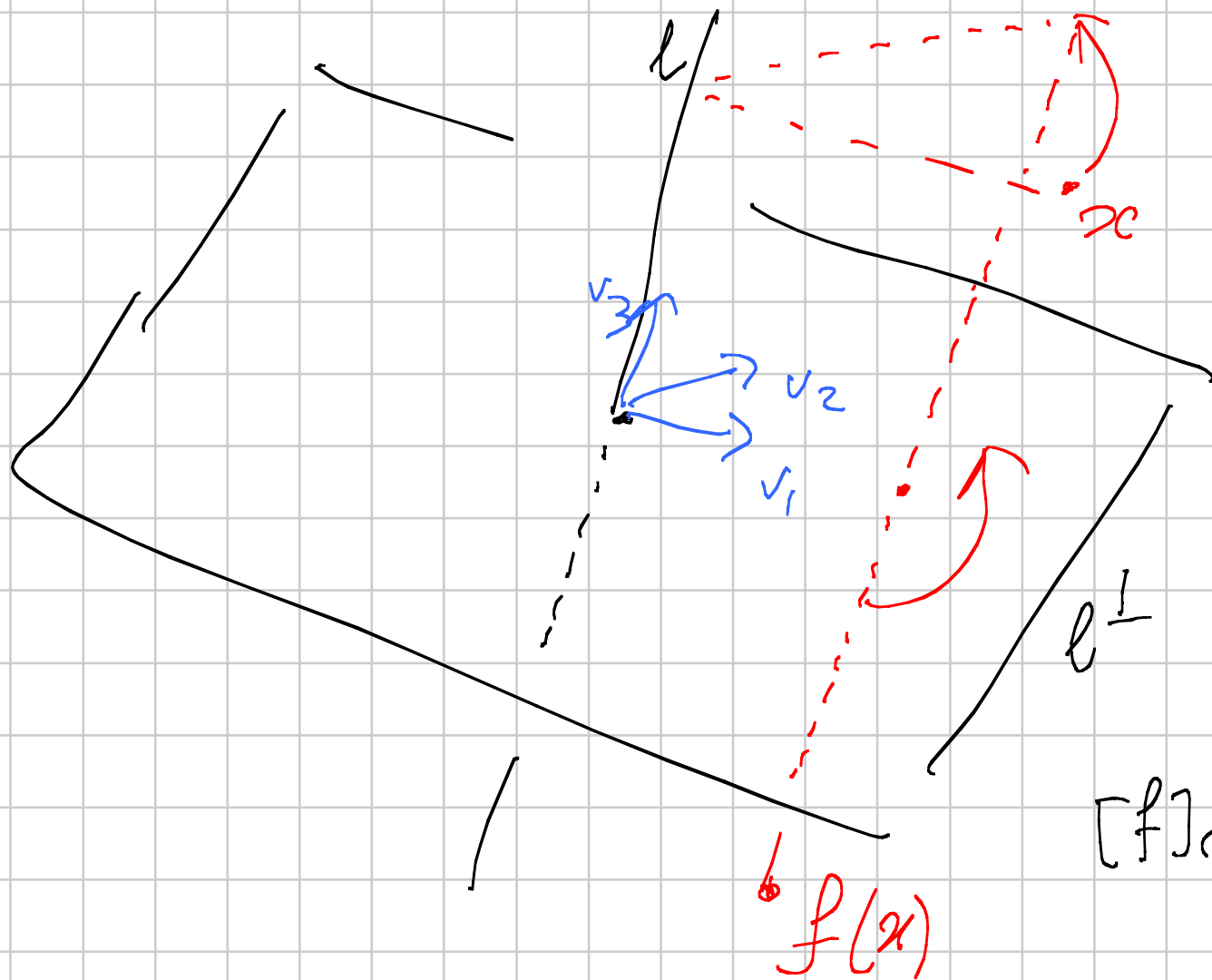
- riflessione rispetto a piani



$\mathcal{B}$ base ortonormale
 $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- rotazione intorno a retta l
 composta con riflessione rispetto a $l^\perp$



$$[f]_3 = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Fatto: tutte le isom di $\mathbb{R}^3$ sono con-

(rispetto a base standard opportuna hanno una tale matrice) -

Caso complesso

$$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ore: $\|z\|^2$ visto in $\mathbb{R}^{2n}$ è

$$x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$$

$$= \bar{z}_1 \cdot z_1 + \dots + \bar{z}_n \cdot z_n$$

$$= (\bar{z}_1 \dots \bar{z}_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = {}^t \bar{z} \cdot z$$

Def: prodotto scalare hermitiano standard $\mathbb{C}^n$

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle z | w \rangle_{\mathbb{C}^n} = {}^t \bar{w} \cdot z$$

Def: se V è sp. vett. su $\mathbb{C}$ chiamo una

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

- sesquilineare se è lineare a sx e antilineare a dx, ovvero

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 | w \rangle = \lambda_1 \langle v_1 | w \rangle + \lambda_2 \langle v_2 | w \rangle$$

$$\langle w | \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle w | v_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle w | v_2 \rangle$$

• hermitiana se $\langle w | v \rangle = \overline{\langle v | w \rangle}$

(oss: in tal caso $\langle v | v \rangle = \overline{\langle v | v \rangle}$
 $\Rightarrow \langle v | v \rangle \in \mathbb{R}$)

• def. pos. se $\langle v | v \rangle > 0 \quad \forall v \neq 0$.

• prodotto scalare hermitiano α ha le tre preced.

Fatto : $\langle . | . \rangle_{\mathbb{C}^n}$ lo è.

Fatto : tutto quanto visto su $\mathbb{R}$ si ripete su $\mathbb{C}$ stando attenti che la

simmetrica non reale (c'è il coniugato)
($\Rightarrow$ Disopue sono alternative
Differenza tra dx e sin)

Prop: 1) le applicazioni sesquilineari su $\mathbb{C}^n$
sono tutte e sole quelle del tipo

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_A \quad A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \quad \text{dove}$$

$$\langle z | w \rangle_A = {}^t \bar{w} \cdot A \cdot z$$

2) una tale A è hermitiana se e solo se

$$A \text{ è } \underline{\text{hermitiana}} \quad \text{ovvero} \quad {}^t \bar{A} = A$$

(notez: ${}^t\bar{A} = A^*$) -

(Perdu 2: $\langle w|z \rangle_A = {}^t\bar{z} \cdot A \cdot w$

$$\langle z|w \rangle_A = {}^t\bar{w} \cdot A \cdot z$$

ou plus: $\langle w|z \rangle_A = \overline{\langle z|w \rangle_A}$

$$\begin{aligned} {}^t\bar{z} \cdot A \cdot w &= \overline{{}^t\bar{w} \cdot A \cdot z} \\ &= {}^t w \cdot \bar{A} \cdot \bar{z} \\ &= ({}^t w \cdot \bar{A} \cdot \bar{z}) \\ &= {}^t\bar{z} \cdot {}^t\bar{A} \cdot w \end{aligned}$$

so no sempre usado: $\Leftrightarrow {}^t\bar{A} = A$.

Prop: se $w_1, \dots, w_k$ è base ortogonale di W
 sottosp di V allora

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

perché v a sin?
 voglio che P_W sia lineare in v

Prop (ortogonalizzazione di G-S):
 lin. indep. $v_1, \dots, v_k$ $\xrightarrow{\text{ortogonalizzazione}} w_1, \dots, w_k$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{w}_{m+1} = v_{m+1} - \sum_{i=1}^m \langle v_{m+1} | w_i \rangle \cdot w_i$$

a sin'anche' voglio
lineare v_{m+1}

Prop: $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle v|w\rangle + \|w\|^2$

Infatti $\|v+w\|^2 = \langle v+w | v+w \rangle$

$$= \langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle$$

$$\overbrace{\|v\|^2}$$

$$\overbrace{\langle v|w \rangle}$$

$$\overbrace{\|w\|^2}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{2 \operatorname{Re} \langle v|w \rangle}$$

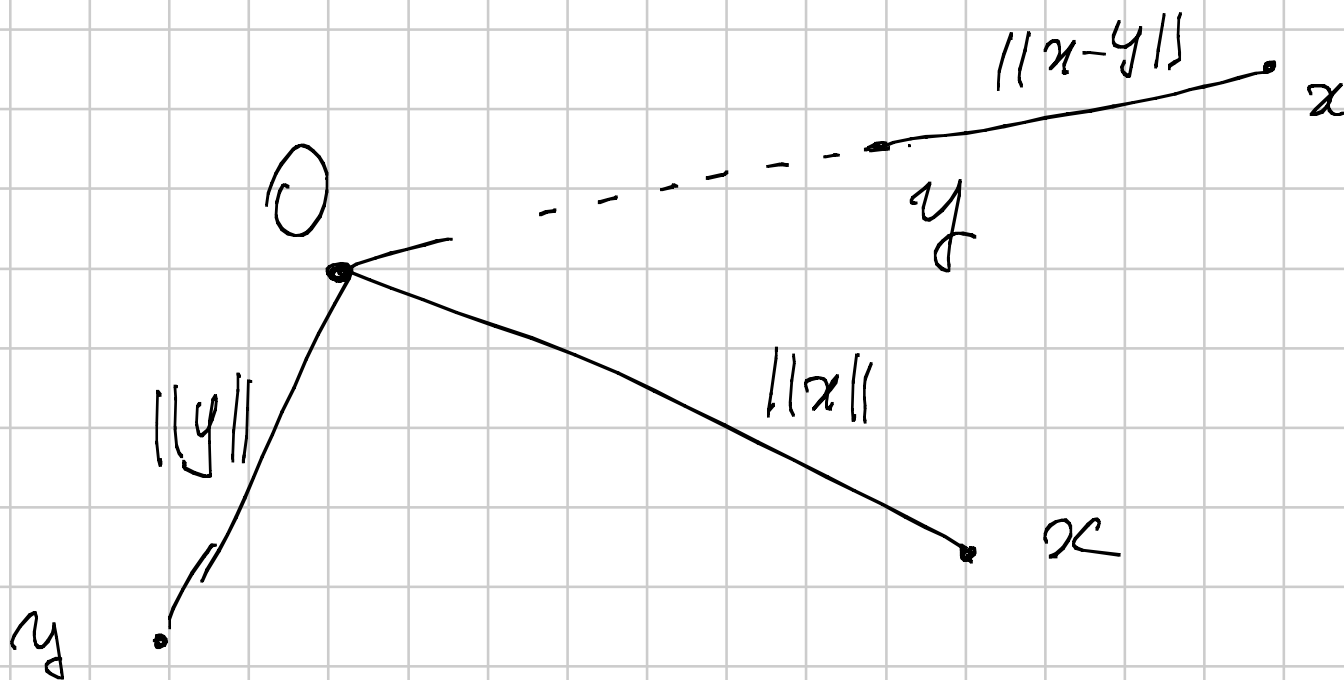
Prop: $M \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$ è una proiezz. ortog.
se e solo se $M^2 = M$ e $M^* = M$.

Prop: $M \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$ è isometria
se e solo se $M^* \cdot M = I_n$ ($\exists M^{-1}$ ed è M^*)
se e solo se le colonne di M sono base ortonormale.

(Dinamo la M unitare.)

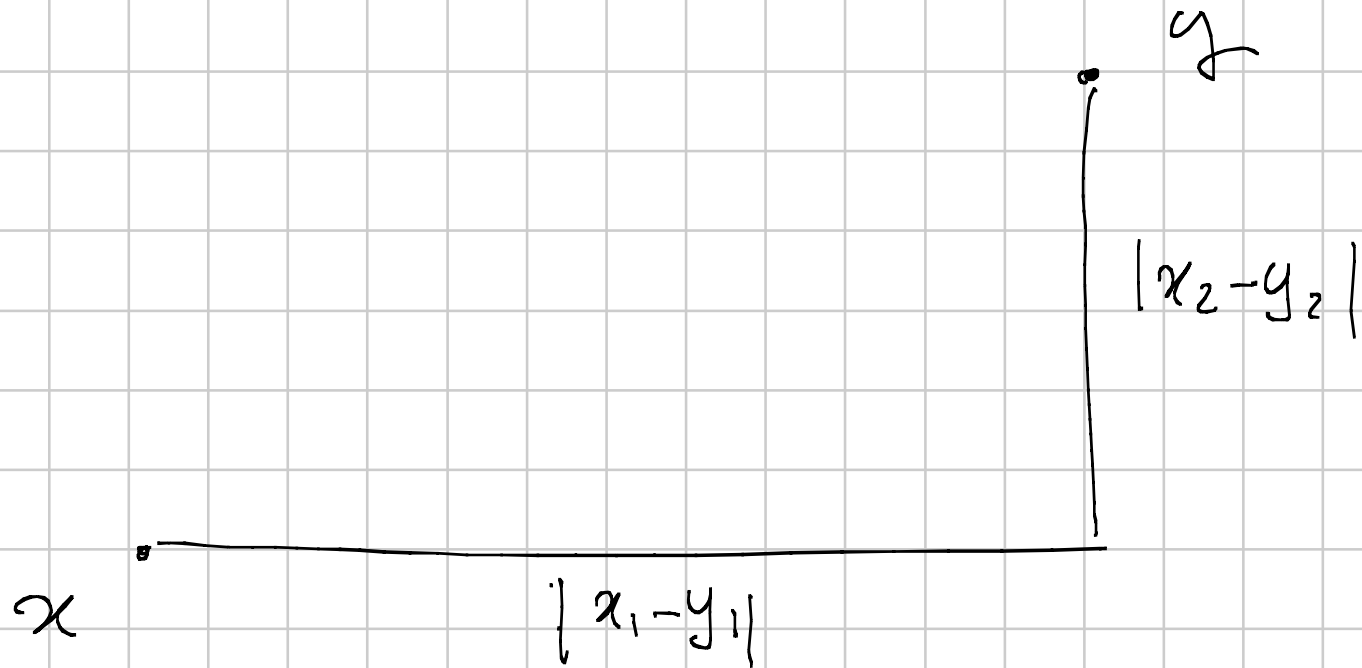
9.2.3

$$\text{SNFC}(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{se } x \text{ și } y \text{ sunt proporționale} \\ \|x\| + \|y\| & \text{altruiuri} \end{cases}$$



(triangolare: geometria / linea per caso)

$$NYC(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$



triangle : segue da $|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$

9.2.4 : orthonormalizzare

$$(a) \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{13} \\ -1789 \end{pmatrix}$$

v_1 v_2

$$w_1 = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

w_2 è tale che •) $w_2 \perp w_1$

•) $\|w_2\| = 1$

•) notice cambio base $(v_1, v_2) \rightarrow (w_1, w_2)$
ha $\det > 0$.

$$\Rightarrow w_2 = \pm \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{dalle prime due}$$

Voglio $\det(w_1, w_2)$ concorde con $\det(v_1, v_2)$

$$\uparrow \\ < 0$$

$$\Rightarrow w_2 = - \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(b) $\mathbb{R}^2$ $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

canonica: ortogonale
rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ canonico

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_A} \quad \|v_1\|_A^2 = 3$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2 | w_1 \rangle_A \cdot w_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \left((0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \|_A} = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 16 + 8 \cdot (-4) \cdot 3 + 7 \cdot 9}} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$a) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{14} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 \qquad v_2 \qquad v_3$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-6+2-3}{14} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$e \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

w_3 é o único vet. unitário ortog a $\text{Span}(v_1, v_2)$
 t.e. $\det(v_1, v_2, w_3)$ é coerente com $\underbrace{\det(v_1, v_2, v_3)}_{\text{positivo}}$.

$$\Rightarrow w_3 = + \frac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad C^0([0, 1], \mathbb{R}) \quad \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt$$

$$u(t) = t - 2t^2 \quad v(t) = t$$

$$\|u\|^2 = \int_0^1 (t - 2t^2)^2 dt = \int_0^1 (t^2 - 4t^3 + 4t^4) dt = \frac{1}{3} - 1 + \frac{4}{5} = \frac{2}{15}$$

$$U(t) = \sqrt{\frac{15}{2}}(t - 2t^2)$$

$$\tilde{V} = v - \langle v | U \rangle \cdot U = v - \underbrace{\langle v | u \rangle}_{//} \cdot \frac{u}{\|u\|^2}$$

$$\int_0^1 t(t - 2t^2) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\tilde{V}(t) = t - \frac{15}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (t - 2t^2) = \dots$$

$$V = \frac{\tilde{V}}{\|\tilde{V}\|} = \dots$$

9.3.1

Trovare base ortogonale di matrice di
proiet. ortogonale su

$$W = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \perp$$

Troviamo base di W :

$$\begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix}$$

w_1 w_2

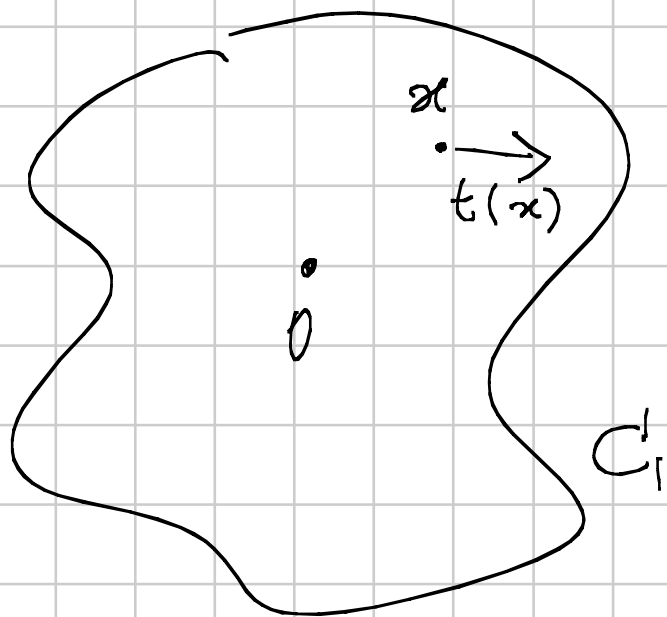
Una base ortogonale trovando u_1, u_2 e
scrivere la matrice di

$$P_W(x) = \langle x/u_1 \rangle \cdot u_1 + \langle x/u_2 \rangle \cdot u_2$$

Diagonalizzazione

Q : capire come agisce una
data f. $V \rightarrow V$ lineare

Consideriamo un corpo rigido soggetto a
sforzi ma in equilibrio : risultante
sul baricentro sia nulla -



$$C_1 \subset \mathbb{R}^3$$

$$t : C_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t(x) = \text{force applied on } x$$

$$\text{Equilibrium} : t(0) = 0$$

Approssimazione lineare : $T = Jt$

$$t(x) = \underbrace{T \cdot x}_{\text{linear degli sforzi}} + \underbrace{o(\|x\|)}_{\text{trascuro questo}}$$

linear degli
sforzi

trascuro questo

Fatto : $T = \underbrace{\frac{1}{2}(T + {}^tT)}_S + \underbrace{\frac{1}{2}(T - {}^tT)}_A$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{simmetrica}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{antisimmetrica}}$

(proiezioni di T rispetto alle

$$M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) = \mathcal{I}_3(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{Q}_3(\mathbb{R})$$

S è responsabile della deformazione

A è responsabile di un mov. rigido

Se $S = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

non è diagonale l'azione -

Vedremo: per ogni $S \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ simmetrica
 esiste una base ortonormale $(v_1, v_2, v_3) = \mathcal{B}$ di
 $\mathbb{R}^3$ t.c. rispetto a $\mathcal{B}$ l'azione di S è diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{ad es.} \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

cioè a meno di un cambiamento geometrico
 (rigido) di sistema di riferimento le forze

equivale a una somma di forze di pure
trazione o compressione si tratta di
cordinati _