

Geometria 16/3/16

$$\text{Eq. cart. piano } P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : ax + by + cz = 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow P^\perp = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) \text{ eq. par.}$$

$$\text{Eq. cart. retta } l = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow l^\perp = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \text{ eq. par.}$$

Risultato: eq. cart. rette $\rightarrow$ eq. par
eq. param piano $\rightarrow$ eq. cart

stesso metodo dei det 2×2 , infatti

in entrambi i casi dati due vettori

si riesce a trovare un terzo e loro $\perp$.

Def: dati $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
chiamo prodotto vettoriale

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} b_1 c_2 - c_1 b_2 \\ -(a_1 c_2 - c_1 a_2) \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

x

- Fatti:
- 1) $v_1 \wedge v_2$ è ortog. a $\text{Span}(v_1, v_2)$
 - 2) $v_1 \wedge v_2$ ha lunghezza uguale all'area del parallelogramma di lati v_1 e v_2
 - 3) $v_1 \wedge v_2$ è nullo se e solo se v_1, v_2 lin. dip.
- altrimenti i vettori $v_1, v_2, v_1 \wedge v_2$ soddisfanno la regola della mano destra, ovvero

$$\det(v_1, v_2, v_1 \wedge v_2) > 0 \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

Consequente: se voglio ortonormalizzare v_1, v_2, v_3 posso fare così:

$$\bullet w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\bullet \tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2 | w_1 \rangle w_1, \quad w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}$$

$$\left(\bullet \tilde{w}_3 = v_3 - \langle v_3 | w_1 \rangle w_1 - \langle v_3 | w_2 \rangle w_2, \quad w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} \right.$$

pongo e mi w_3

unitario

ortogonale a w_1, w_2

met. cambio da v_1, v_2, v_3

a w_1, w_2, w_3 ha $\det > 0$)

• prendo $y = \frac{w_1 \wedge w_2}{\|w_1 \wedge w_2\|}$; è unitario e
 ortop. a w_1, w_2
 so che $\det(w_1, w_2, y) > 0$;

se $\det(v_1, v_2, v_3) > 0$ allora $w_3 = y$

se no $w_3 = -y$ oss: $y = v_1 \wedge v_2 / \|v_1 \wedge v_2\|$

es: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$w_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot 23 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \left(\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \right)$$

$$y = \frac{4}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & -9 \end{pmatrix} = -18 + 30 > 0$$

$$\Rightarrow w_3 = y$$

RECUPERO PACINI

prima o poi

V sp. vett. dim $< +\infty$ su $\mathbb{R}$ con prod. scal $\langle \cdot | \cdot \rangle$

Def: $f: V \rightarrow V$ lineare è autoaggiunta
rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ se $\langle f(v_1) | v_2 \rangle = \langle v_1 | f(v_2) \rangle$
 $\forall v_1, v_2$.

oss 1: per $\mathbb{R}^m$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$ una $M \in \mathcal{M}_{m \times m}$

$\bar{e}$ autoaggiunte se e solo se

$$\langle Mx | y \rangle = \langle x | My \rangle \quad \forall x, y$$

$$\Leftrightarrow {}^t y \cdot M \cdot x = {}^t y \cdot {}^t M \cdot x \quad \forall x, y$$

$$\Leftrightarrow {}^t y \cdot \underbrace{(M - {}^t M)}_{\text{è ortogonale a ogni } y \in \mathbb{R}^n} \cdot x = 0 \quad \forall x, y$$

$$\Leftrightarrow (M - {}^t M) \cdot x = 0 \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow M - {}^t M = 0 \quad \Leftrightarrow {}^t M = M \Leftrightarrow M \text{ simm.}$$

QSS: in $\mathbb{R}^n$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ una $M \in M_{n \times n}$
è autoaggiunta

$$\Leftrightarrow \langle M \cdot x | y \rangle_A = \langle x | M \cdot y \rangle_A \quad \forall x, y$$

$$\Leftrightarrow {}^t y \cdot A \cdot M \cdot x = {}^t y \cdot {}^t M \cdot A \cdot x \quad \forall x, y$$

$$\stackrel{\text{c.s.}}{\Leftrightarrow} {}^t M \cdot A = A \cdot M \quad _$$

Prop: $f: V \rightarrow V$ lineare è una proiezz. ortog.

$$\Leftrightarrow f \circ f = f \quad \text{e} \quad f \text{ è autoaggiunta} \quad _$$

Cor: una matrice $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è
proiett. ortog. rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$
se e solo se $M^2 = M$ e ${}^t M = M$ _

Dim (Prop): $\underline{=} \underline{D}$

Sia $f = p_w$; sappiamo $f \circ f = f$;

Prendiamo $v_1, v_2 \in V$ e proviamo che
 $\langle f(v_1) | v_2 \rangle = \langle v_1 | f(v_2) \rangle$ _

Scriviamo :

$$v_1 = \underbrace{w_1}_{\substack{\parallel \\ f(v_1) \\ \wedge \\ W}} + \underbrace{z_1}_{\substack{\perp \\ W}}$$

$$v_2 = \underbrace{w_2}_{\substack{\parallel \\ f(v_2) \\ \wedge \\ W}} + \underbrace{z_2}_{\substack{\perp \\ W}}$$

$$\langle f(v_1) | v_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 + z_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 \rangle + \underbrace{\langle w_1 | z_2 \rangle}_{=0}$$

$$\langle v_1 | f(v_2) \rangle = \langle w_1 + z_1 | w_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 \rangle + \underbrace{\langle z_1 | w_2 \rangle}_{=0}$$

⇐ Supponiamo $f \circ f = f$ e f autoaggiunta.

f è la proiezione su W rispetto $V = W \oplus Z$

dove $W = \text{Im } f$ $Z = \text{Ker } f$.

Resta da vedere che $Z = W^\perp$

Se $\dim(V) = n$, $\dim(W) = k$ sappiamo che

$$\dim(W^\perp) = \dim(Z) = n - k$$

dunque basta vedere che $Z \subset W^\perp$, cioè

$$\forall z \in Z \text{ ho } z \in W^\perp \text{ cioè}$$

$$\forall z \in Z \text{ ho } \langle w | z \rangle = 0 \quad \forall w \in W.$$

$$\text{Infatti: } \langle w | z \rangle = \langle f(w) | z \rangle = \langle w | f(z) \rangle = \langle w | 0 \rangle = 0.$$



Def: $f: V \rightarrow V$ si dice ortogonale se

$$\langle f(v_1) | f(v_2) \rangle = \langle v_1 | v_2 \rangle \quad \forall v_1, v_2$$

cioè se f conserva il prodotto scalare -

Oss: f ortogonale $\Leftrightarrow f$ conserva la norma

$\Leftrightarrow f$ conserva le distanze

(f è detta allora isometria)

Es: le rotazioni in $\mathbb{R}^n$ sono isometrie -

Prop: in $\mathbb{R}^m$ con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ una $M \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$

è ortogonale se e solo se

- ${}^t M \cdot M = I_m$ (cioè: $\exists M^{-1}$ ed è ${}^t M$)
- le colonne di M sono una base ortonormale

(Terminologia: se le colonne di M sono una base ortogonale non è vero che M è ortogonale; devono essere anche unitarie -)

$$\underline{\text{Dim:}} \quad M \text{ on top} \Leftrightarrow \langle Mx | My \rangle = \langle x | y \rangle \quad \forall x, y$$

$$\Leftrightarrow {}^t y \cdot {}^t M \cdot M \cdot x = {}^t y \cdot x \quad \forall x, y$$

$$\Leftrightarrow {}^t y \cdot ({}^t M \cdot M - I_m) \cdot x = 0 \quad \forall x, y$$

$$\Leftrightarrow {}^t M \cdot M = I_m$$

$$\Leftrightarrow ({}^t M \cdot M)_{ij} = \delta_{ij} \quad (M = (v_1, \dots, v_m))$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} {}^t v_1 \\ \vdots \\ {}^t v_m \end{pmatrix} \cdot (v_1, \dots, v_m) \right)_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\Leftrightarrow v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\Leftrightarrow v_1, \dots, v_m \text{ base ortonormale di } \mathbb{R}^m$$

$$\mathcal{L}_5: M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -4/3\sqrt{5} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 5/3\sqrt{5} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} & 2/3\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \bar{e} \text{ orton.}$$

$$\text{cioè} \quad \langle Mx | My \rangle = \langle x | y \rangle \quad \forall x, y \quad \text{ovvero}$$

$${}^t M \cdot M = I_3.$$

Ese 9.1.7 (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ da cui mod. sol?

simmm $\checkmark$ def. pos. ?

cond. nec. * sulla diago princ. > 0 $\checkmark$

* i let 2×2 simmm. risp. e diago princ. > 0 $\checkmark$

cont'i: $x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 4xy - 2yz$

$$= (x+2y)^2 + (y-z)^2 + 2z^2$$

$\bar{e}$ sempre ≥ 0 ; nullo solo per $z=0, y=0, x=0$.

Si

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

def pos? simm ✓

cond. nec. ✓

cont: $x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz - 2yz$ —

Cerco vett. su cui abbia valore negativo:

prova $\begin{pmatrix} x \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ con $x > 0$ grande.

$$x^2 + 5 + 3 - 4x - 2x - 2$$

$$= x^2 - 6x + 6$$

$$\Delta/4 = 9 - 6 > 0$$

assume valori negativi ($x=3$)

No

9.2.1 Dato $\langle v|v \rangle$ trovare $\langle v|w \rangle$

$$(b) \mathbb{R}^3 \quad -2x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 - x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 3/2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\langle x|y \rangle_A = -2x_1y_1 + 2x_2y_2 - 5x_3y_3$$

$$- \frac{1}{2} (x_1y_2 + x_2y_1) + \frac{3}{2} (x_1y_3 + x_3y_1) + (x_2y_3 + x_3y_2)$$

$$(c) \quad M_{2 \times 2} \quad q(A) = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$f(A, B) = \frac{1}{2}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11}) - \frac{1}{2}(a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12})$$

$$(f \text{ symm} \text{ e } f(A, A) = q(A)).$$

$$(e) \quad \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \quad q(p(t)) = p(1) \cdot p(-2)$$

$$f(p(t), r(t)) = \frac{1}{2}(p(1) \cdot r(-2) + p(-2) \cdot r(1))$$

9.2.2. $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]; \langle p(t) | q(t) \rangle = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2)$

Trovare $p(t) \in (1+t, 1+t^2)^\perp$, $\|p(t)\| = \sqrt{5}$ _

($\mathcal{E}$ prod. sol. su $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ ma non su $\mathbb{R}_{\leq d}[t]$ con $d \geq 3$ _)

Cerchiamo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ t.c.

$\langle p(t) | 1+t \rangle = 0 \quad \langle p(t) | 1+t^2 \rangle = 0$

(poi aggiunto le norme) _

$$\begin{cases} a_0 \cdot 1 + (a_0 + a_1 + a_2) \cdot 2 + (a_0 + 2a_1 + 4a_2) \cdot 3 = 0 \\ a_0 \cdot 1 + (a_0 + a_1 + a_2) \cdot 2 + (a_0 + 2a_1 + 4a_2) \cdot 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p(t) = 2 - 5t + 2t^2$$

$$\begin{aligned} \|p(t)\|^2 &= p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 \\ &= 4 + 1 + 0 = 5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ è il polinomio cercato

