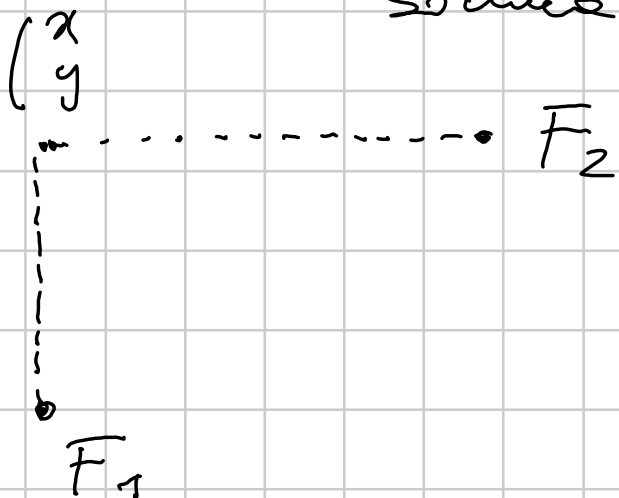


Geom 14/4/16

Modelli metrici in $\mathbb{R}^2$

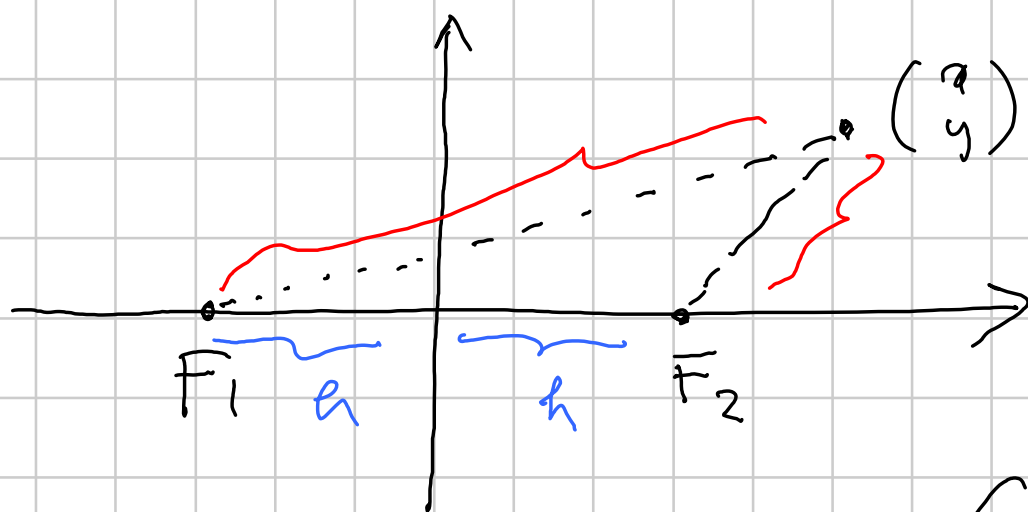
Ellisse: luogo dei punti aventi fissata
somma delle distanze da due punti fissati.



Applicando

* una traslazione, otteniamo
che il punto medio del segmento
 $F_1 F_2$ sia O

* una rotazione, otteniamo
 $F_1 F_2$ orizzontale



Ore $F_1 = (-h, 0)$
 $F_2 = (h, 0)$

$(h > 0)$

Chiamo $2k$ la costante
 somma delle dist. da F_1 e F_2

$\boxed{K > h}$

L'ellisse ha equaz:

$$\sqrt{(x+h)^2 + y^2} + \sqrt{(x-h)^2 + y^2} = 2k$$

$$\sqrt{(x+h)^2 + y^2} = 2k - \sqrt{(x-h)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + 2xh + \cancel{h^2} + \cancel{y^2} = 4k^2 - 4k\sqrt{(x-h)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2xh + \cancel{h^2} + \cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow 4ah - 4k^2 = -4k \sqrt{(a-h)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \underline{a^2 h^2} - 2ahk^2 + \underline{k^4} = \underline{k^2 a^2} - 2ahk^2 + \underline{h^2 k^2} + \underline{k^2 y^2}$$

$$\Rightarrow (k^2 - h^2)x^2 + k^2 y^2 = k^2(k^2 - h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{aligned} a^2 &= k^2 \\ b^2 &= k^2 - h^2 \end{aligned}$$

equazione canonica dell'ellisse e centro di simmetria

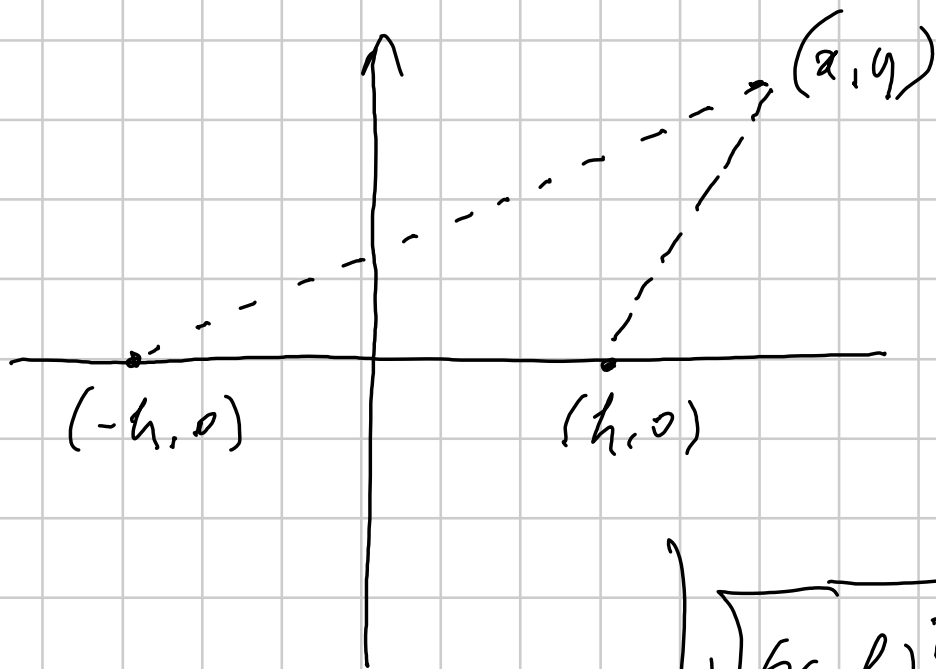
A centro di simmetria $X = \frac{x}{a}$ $Y = \frac{y}{b}$

$$\Rightarrow X^2 + Y^2 = 1$$

equaz. canonica
origini dell'ellisse

Iperbole : luogo dei punti che hanno costante differenza delle distanze da due pt. detti.

A meno di isoclinie : $F_1 = (-h, 0)$, $F_2 = (h, 0)$.



Chiamo $2k$ tale
differenza

$$\boxed{h > k}$$

$$\left| \sqrt{(x-h)^2 + y^2} - \sqrt{(x+h)^2 + y^2} \right| = 2k$$
$$\sqrt{\dots} - \sqrt{\dots} = \pm 2k$$

Come sopra devo due volte al quadrato
ottenendo alla fine

$$(h^2 - k^2)x^2 - k^2y^2 = (h^2 - k^2)/h^2 \quad (\text{come prima})$$

$$\text{pongo } a^2 = k^2 \quad b^2 = h^2 - k^2$$

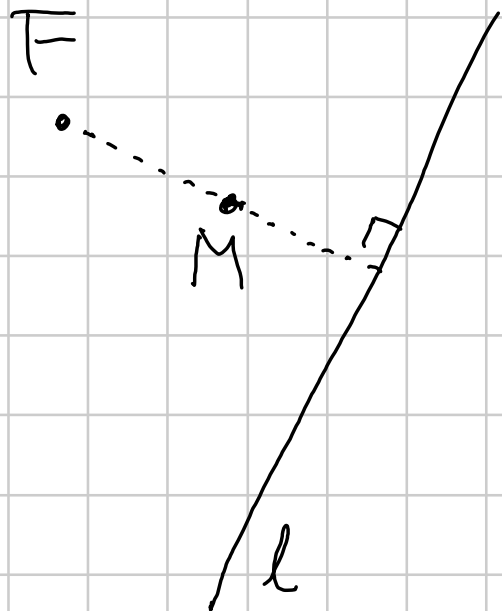
eq. 7. canonica
matrice dell'ipbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

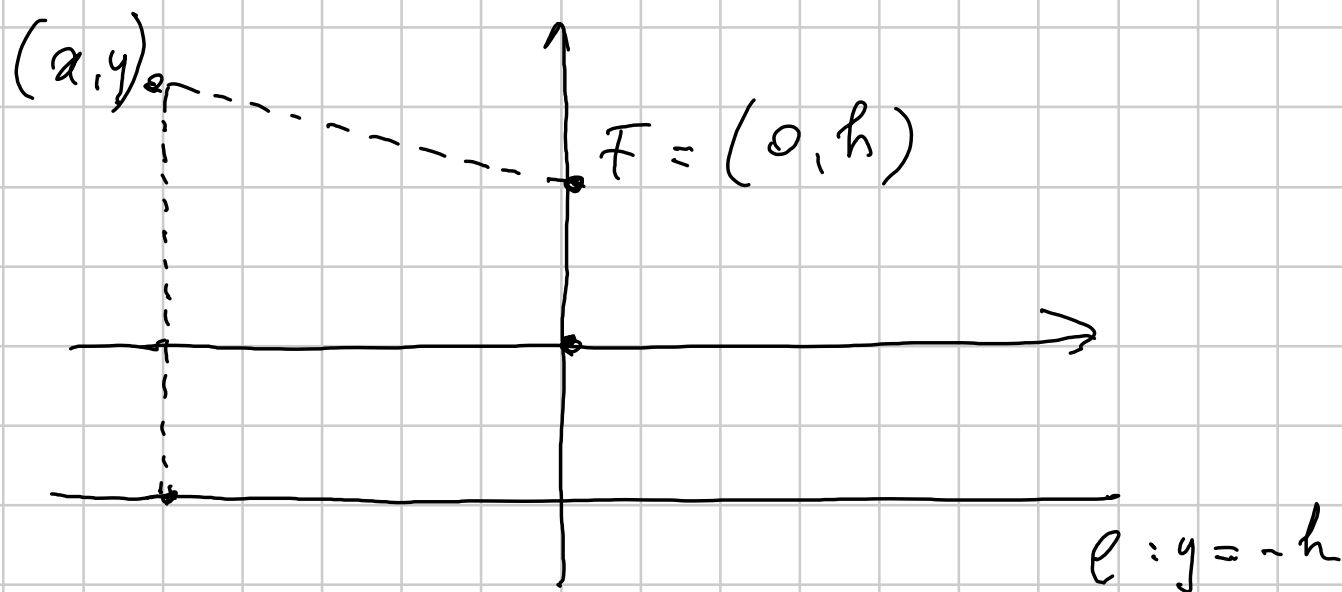
eq. canonica
ipbole

Panchola: luogo dei punti aventi la stessa distanza
 da una retta l e un pto $F \notin l$.



* Traslo in modo che Π sia O

* ruoto in modo che l sia orizz.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{parabola se } \sqrt{x^2 + (y-h)^2} = |y+h|$$

$$x^2 + y^2 - 2hy + h^2 = y^2 + 2hy + h^2$$

$$y = \frac{1}{4h} x^2$$

$$y = ax^2$$

eq. canonica
matrice dello per.

$$X = x \quad Y = y/a$$

$$Y = x^2$$

eq. canonica affine
della parabola

Trovate equazioni:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{ellisse}$$

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{iperbole}$$

$$y = x^2 \quad \text{parabola}$$

Oss: l'equazione $x^2 + y^2 + 1 = 0$ definisce $\emptyset$.

Teorema (classificazione affine delle coniche non degeneri):

Sia C definito da equaz. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

con A simmetrica e $\det(A) \neq 0$
(non degeneri);

siano $d_j = \det \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_j \right) \neq 0$; allora C
ha tipo affine

- Se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0$, ellisse
- Se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$, $\emptyset$
- Se $d_2 < 0$, iperbole
- Se $d_2 = 0$ parabola.

Oss: se $d_2 > 0$ ho $d_1 \neq 0$

altrimenti $d_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \leq 0$.

Perché la conica $\bar{c}$ completa.

Dimo: Operazioni lecite sull'equazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

non cambiano il tipo affine

Cioè:
esiste una
Trasf. affine
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.c.
 $f(C)$ è definita
da uno delle equaz.
uno dello

- trasf. affini $A \leadsto {}^t S \cdot A \cdot S$
 $Q \leadsto {}^t N \cdot Q \cdot N$

- moltiplicare l'equazione per cost. $\neq 0$.

Noto che tali operazioni non modificano i segni di d_2 e di $d_1 \cdot d_3$ -

$$d_2 : \det({}^t N \cdot Q \cdot N) = \det(N)^2 \cdot \det(Q)$$

$$\det(h \cdot Q) = h^2 \cdot \det(Q)$$

$$\begin{array}{ll} d_1 \cdot d_3 & : \quad d_1 \text{ segno del "primo" autovel. di } A \\ \text{(nel caso)} & d_3 \text{ prodotto dei segni di tutti e tutti} \\ d_2 > 0 & \text{autovel. di } A \end{array}$$

$$\Rightarrow d_1 \cdot d_3 = \text{prodotto dei segni degli autovel. di } A \text{ di cui il primo compare due volte}$$

$\Rightarrow$ non cambia moltiplicando per $h \in \mathbb{R}$
né sostituendo A con $S.A.S.$

Per concludere provare che tramite le operaz. lecite
posso ricondurre a una delle equazioni modello.

Teo spaltale: $\exists B \in M_{2 \times 2}$ ortog., t.c. ${}^t B \cdot Q \cdot B$
è diagonale - Cambio coord. co.

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad (\text{lin. via } B, \text{ no trasl.})$$

e ottengo $Q = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$

Oss: non posso avere $A_1 = A_2 = 0$ altrimenti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

he $\det = 0$
(invece $d_3 \neq 0$).

Dunque suppongo $\lambda_1 \neq 0$.

cioè $d_2 \neq 0$

Se $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ ← applico cambio coord.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/\sqrt{|\lambda_1|} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{|\lambda_2|} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

aplico sulle
parte di $\mathbb{R}$
quadrato

allora

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1/|\lambda_1| & 0 & \vdots \\ 0 & \lambda_2/|\lambda_2| & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \pm 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

A meno di cambiare segno a tutto ottengo

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & b_1 \\ 0 & \pm 1 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix}$$

Applico una trasformazione $\begin{pmatrix} I & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} & {}^t \begin{pmatrix} I & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ {}^t w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & Qw+b \\ {}^t b & {}^t bw+c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q & Qw+b \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Q non cambia; scegliendo $w = -Q^{-1} \cdot b$

mi riconduco a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$(c \neq 0)$

Cambio coord con

$$\begin{pmatrix} \sqrt{|c|} & & \\ & \sqrt{|c|} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

e divido per $|c|$ ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \pm 1 & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

In tutti questi casi non è cambiato il tipo
affine né i segni di d_2 e $d_1 \cdot d_3$:

$$d_2 > 0 \quad d_1 \cdot d_3 > 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{cioè } x^2 + y^2 + 1 = 0 \\ \text{cioè } \emptyset \end{array}$$

$$d_2 > 0 \quad d_1 \cdot d_3 < 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{cioè } x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \text{cioè ellisse} \end{array}$$

$$d_2 < 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{cioè } x^2 - y^2 \pm 1 = 0 \\ \text{cioè } y^2 - x^2 = 1 \text{ o } x^2 - y^2 = 1 \\ \text{cioè iperbole.} \end{array}$$

Se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ (cioè $d_2 = 0$)

con equazione obliqua $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$;

con trazione ottengo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$$

Per $d_3 = -b^2 \Rightarrow b \neq 0$.

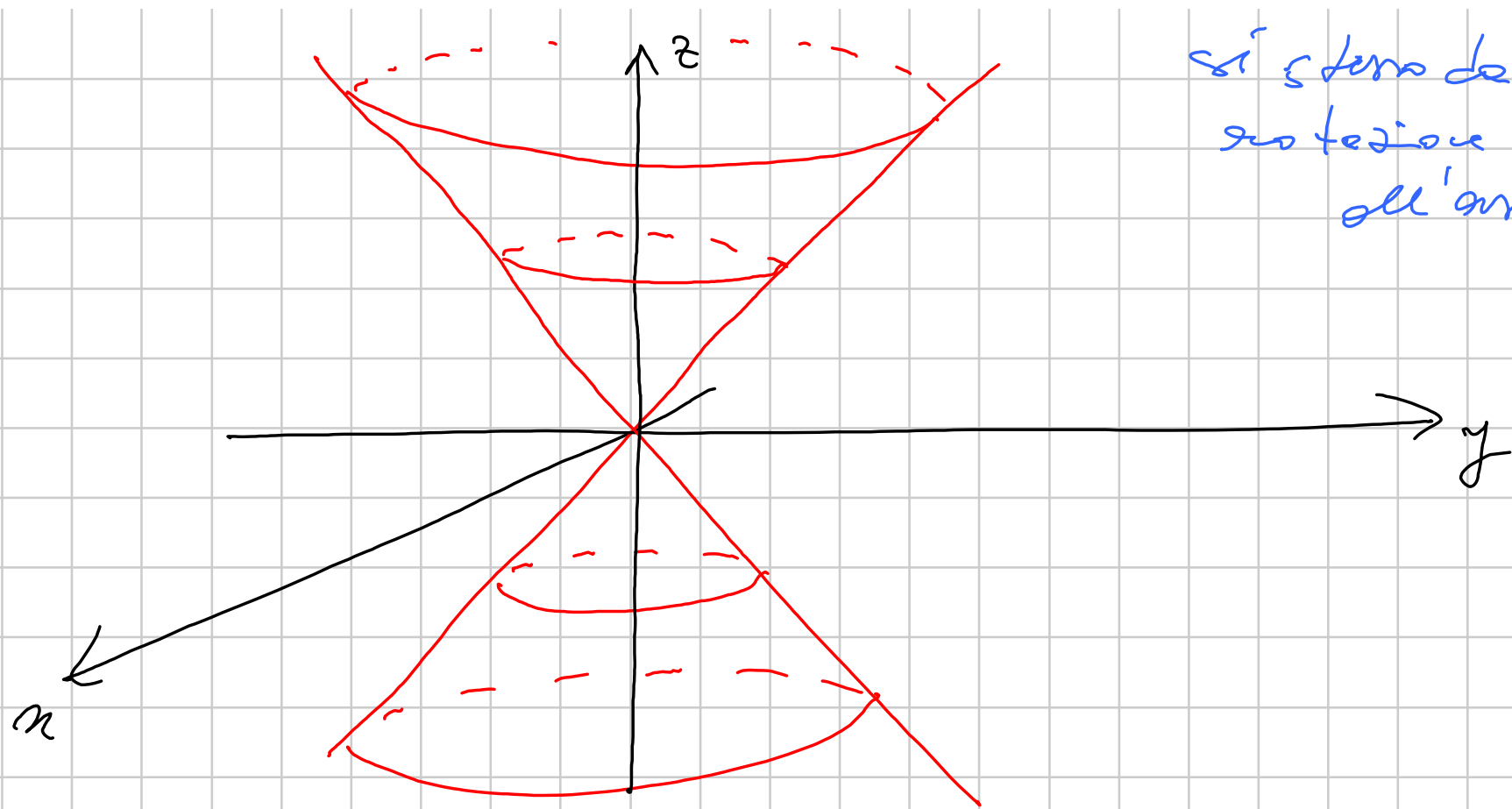
$$x^2 + 2by + c = 0 \quad b \neq 0$$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -2by - c \end{cases} \Rightarrow Y = X^2 \quad \text{parabola}$$

Perciò "coniche":

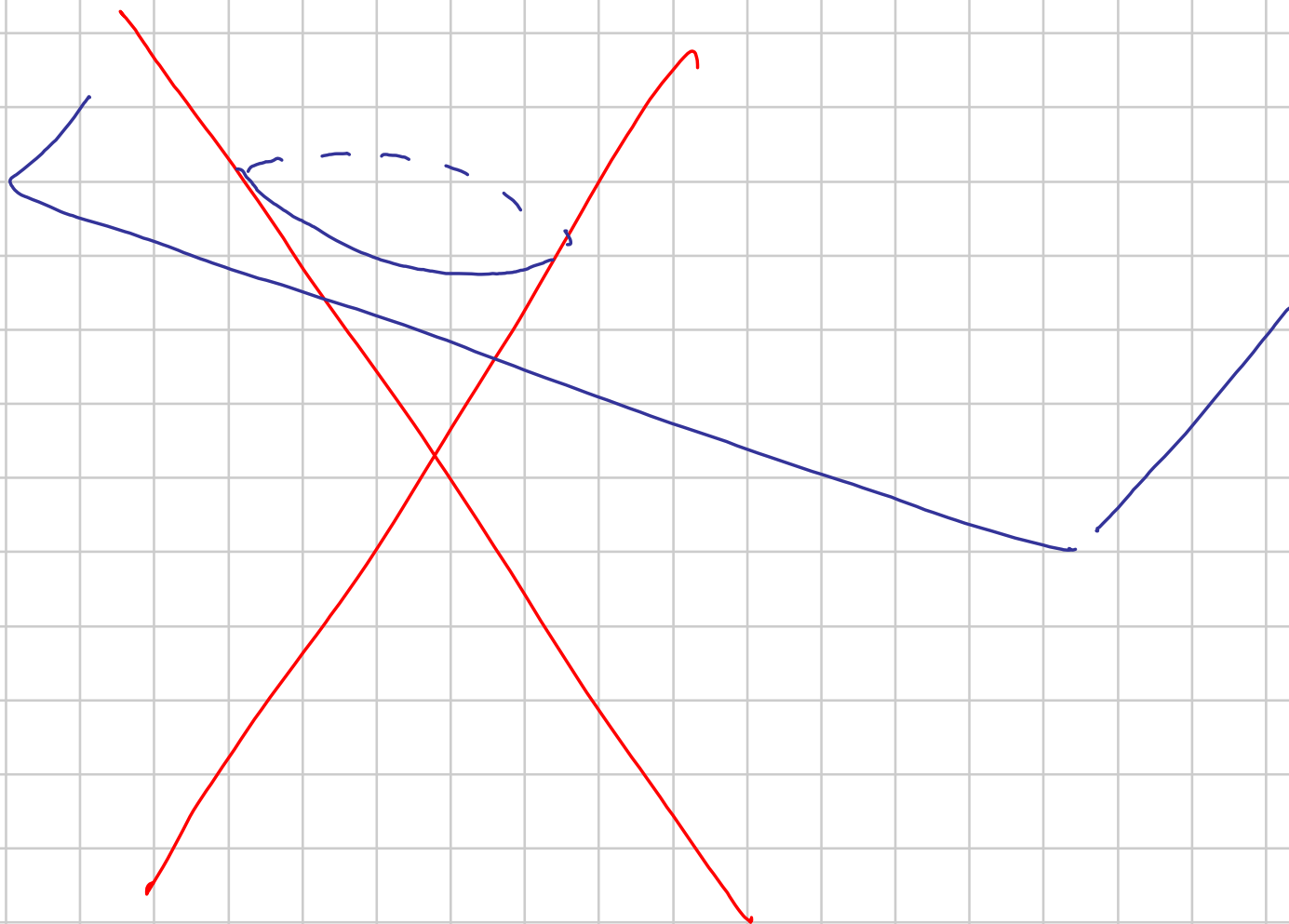
con $z^2 = x^2 + y^2$ in $\mathbb{R}^2$

il luogo viene mandato in

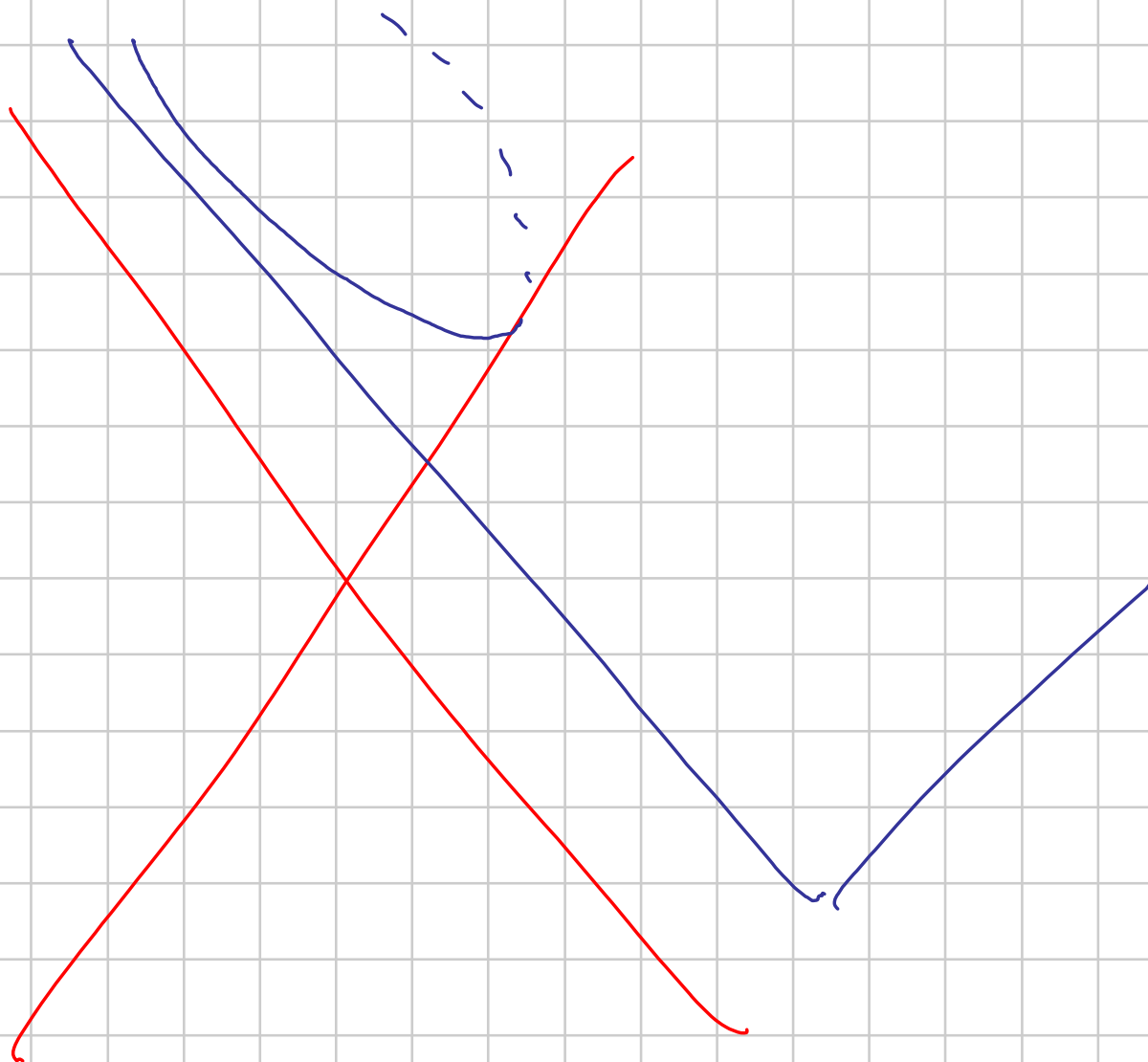


sistema di coordinate
 ortogonale x, y, z
 all'asse z

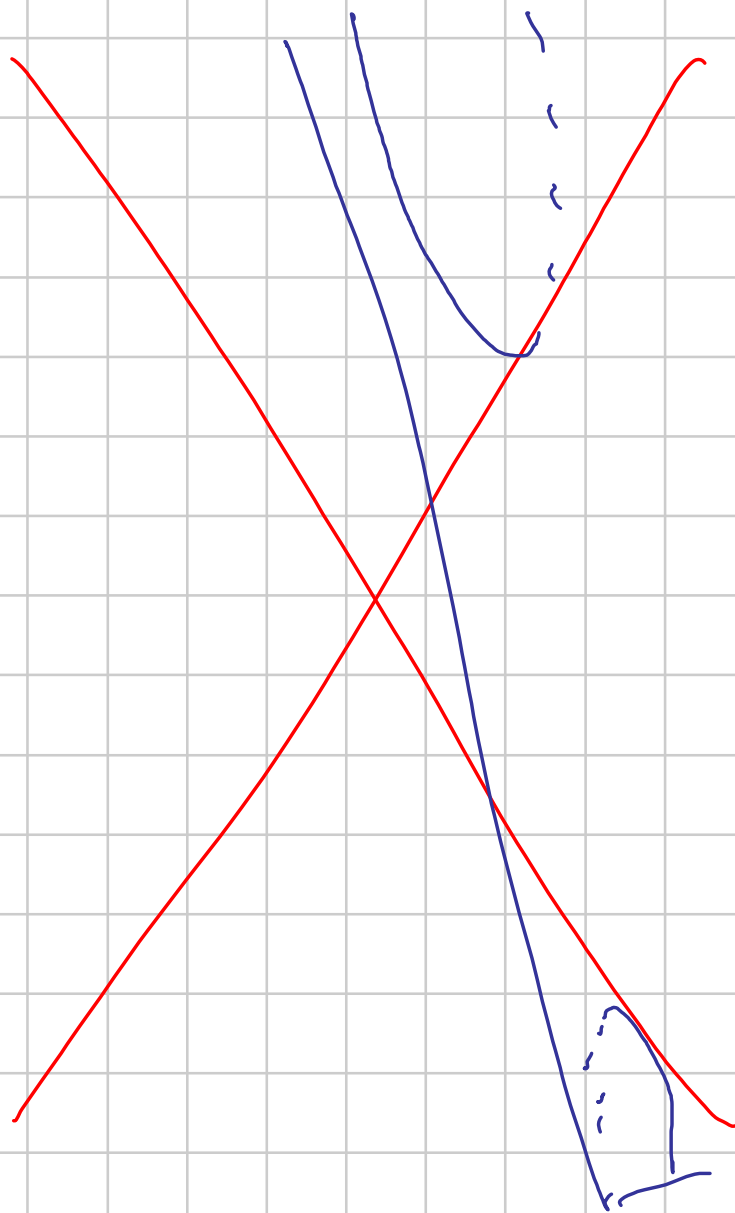
Prendendo intersezioni di un piano con tale
 cono otterremo ellissi, parabole, iperboli;
 non passante per O



ellipse



parabole



ipubole

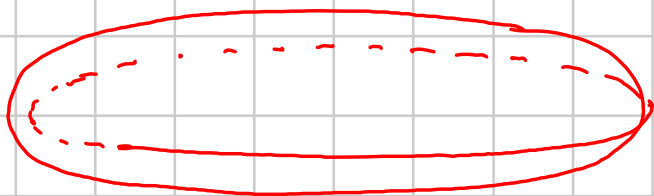
Modelli affini in dimensione 3

$$\emptyset : x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

$$\text{ellissoide} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

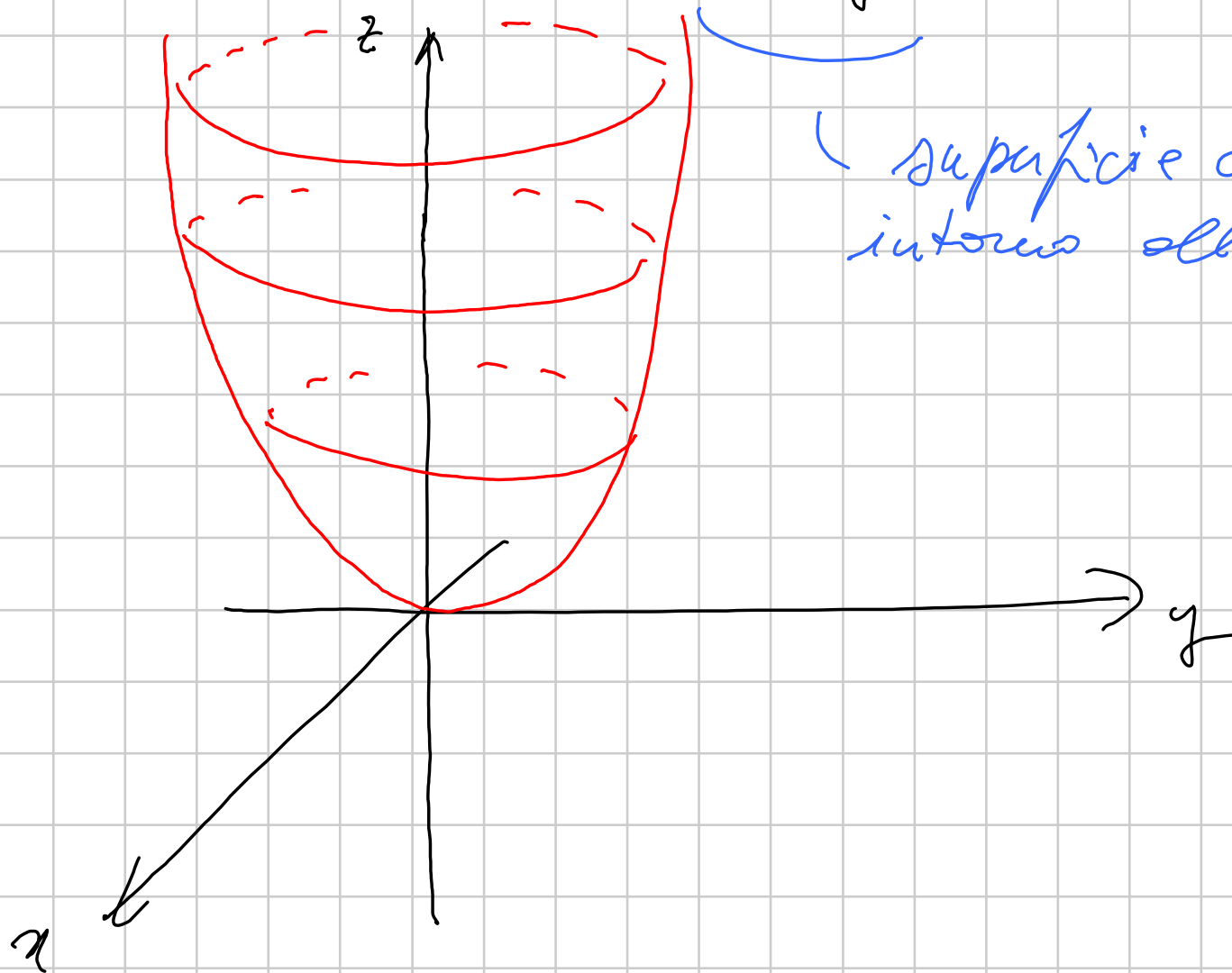
(metricamente $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ è sfera unita );

$$\text{e ellissoide metrico } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



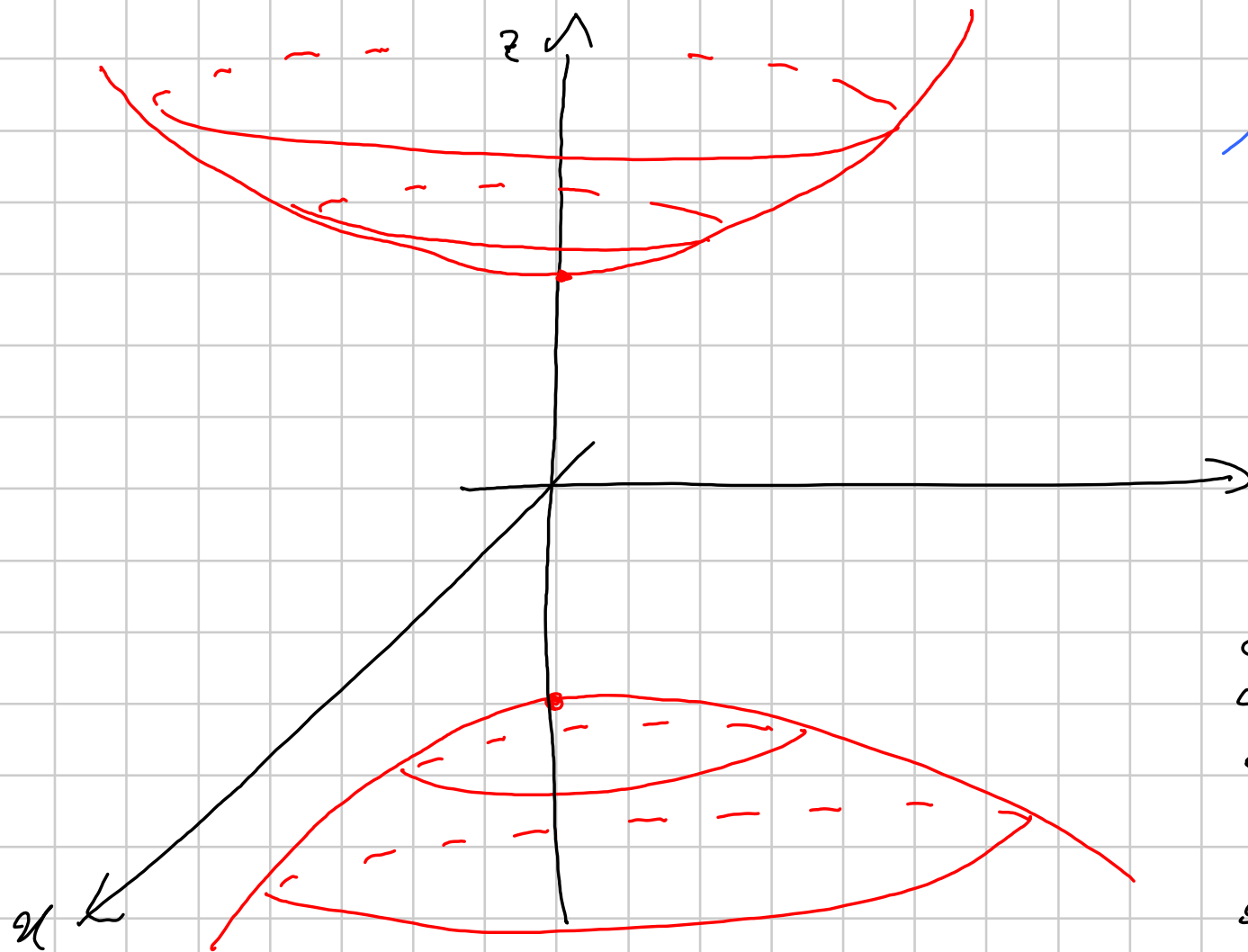
)

paraboloido ellittico: $z = x^2 + y^2$



superficie di rotazione
intorno all'asse z

iperboloide ellittico (a due folde) : $z^2 = x^2 + y^2 + 1$

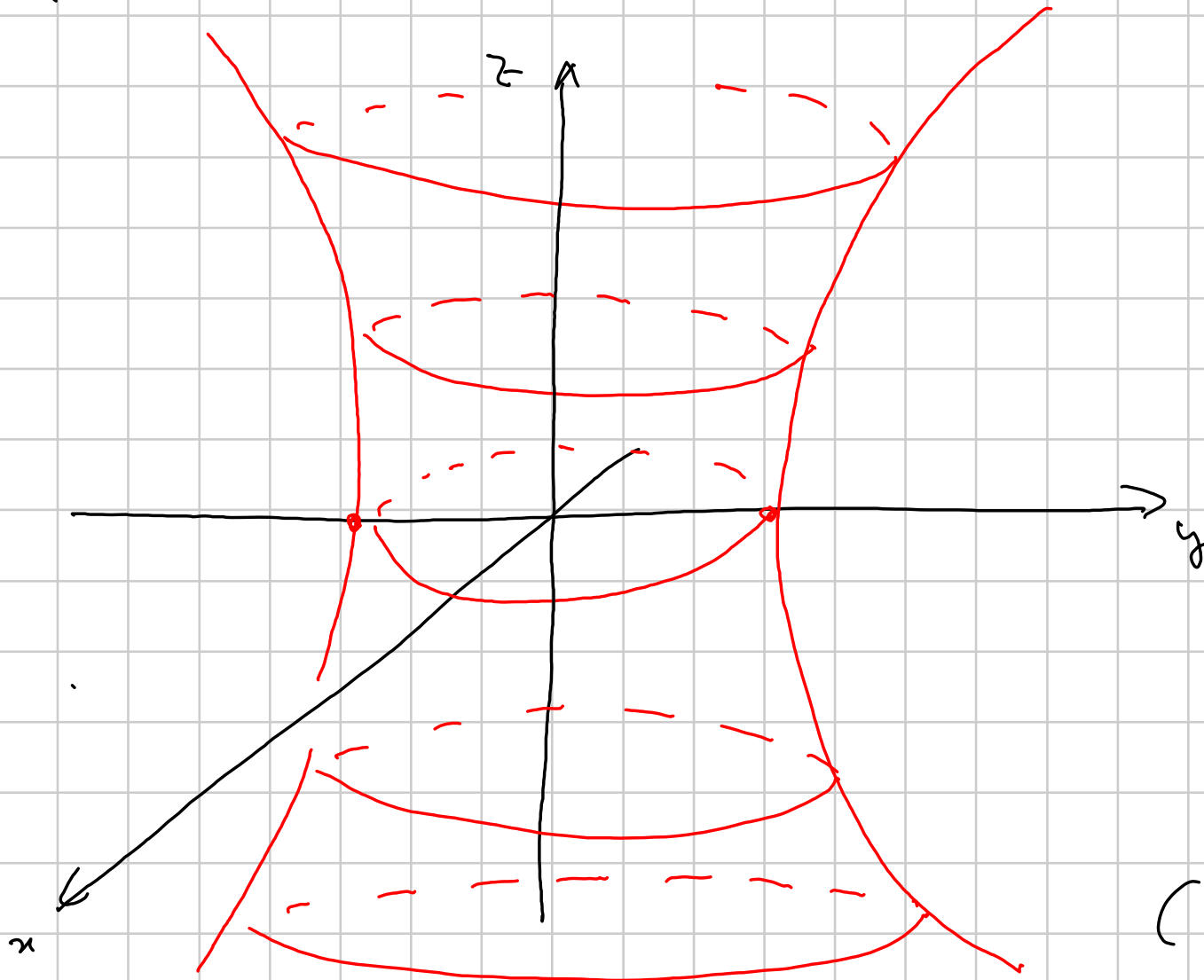


Superf. di rotazione
intorno all'asse z

due "folle"
= due pezzi
separati

Superficie ottenuta
da iperbole per
rotazione intorno
alla retta che
unisce i vertici

iperboloide iperbolico (a una foglia) : $z^2 = x^2 + y^2 - 1$



sup. rotaz.
ax z

una "foglia"
= un pezzo solo

Superficie ottenuta
da una iperbole
per rotazione
intorno al suo
asse secondario
(le rette che
separano i due rami)

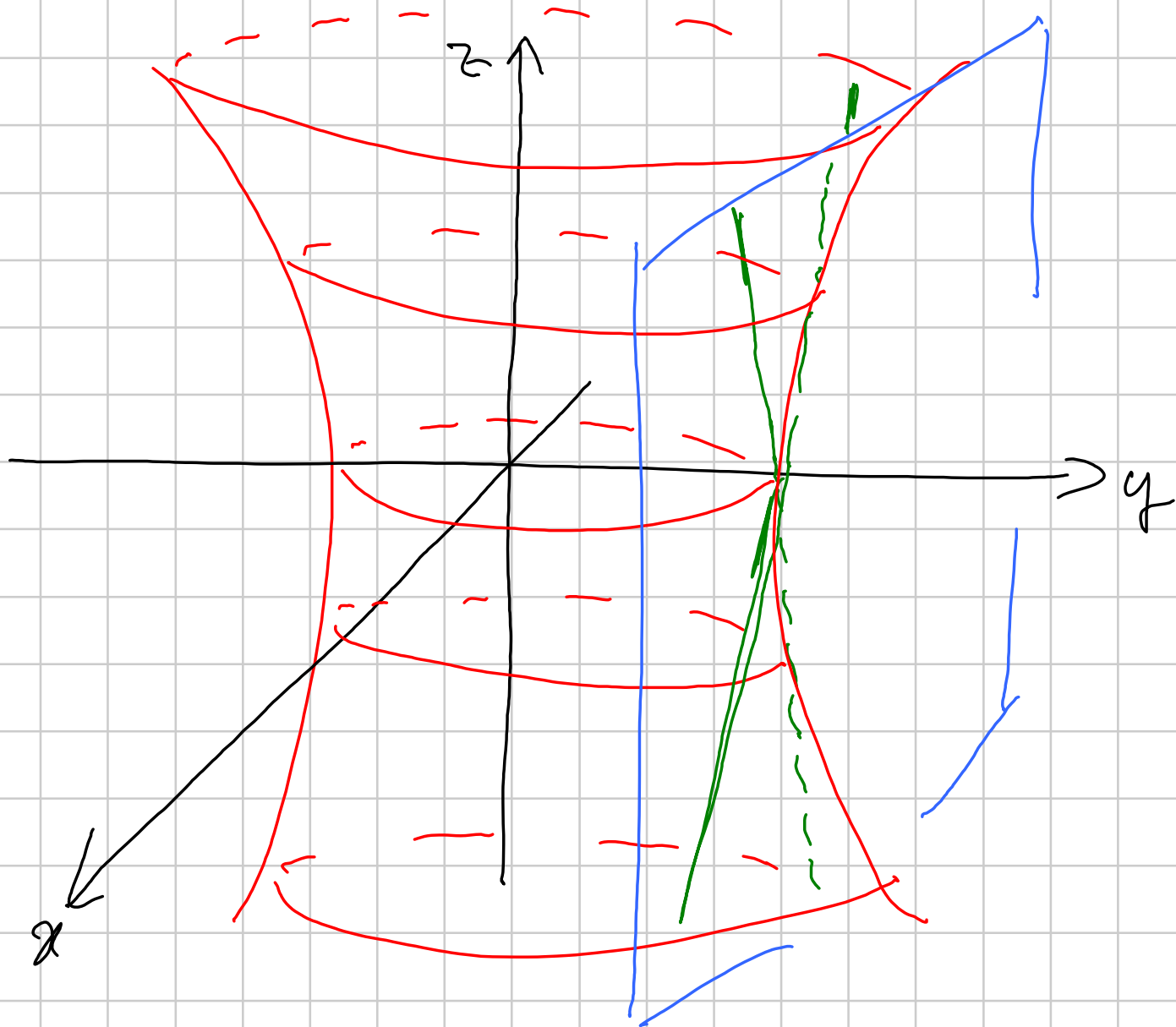
$$z^2 = x^2 + y^2 - 1$$

Osservo che se interseco con il
piano $x = 1$ o l'asse

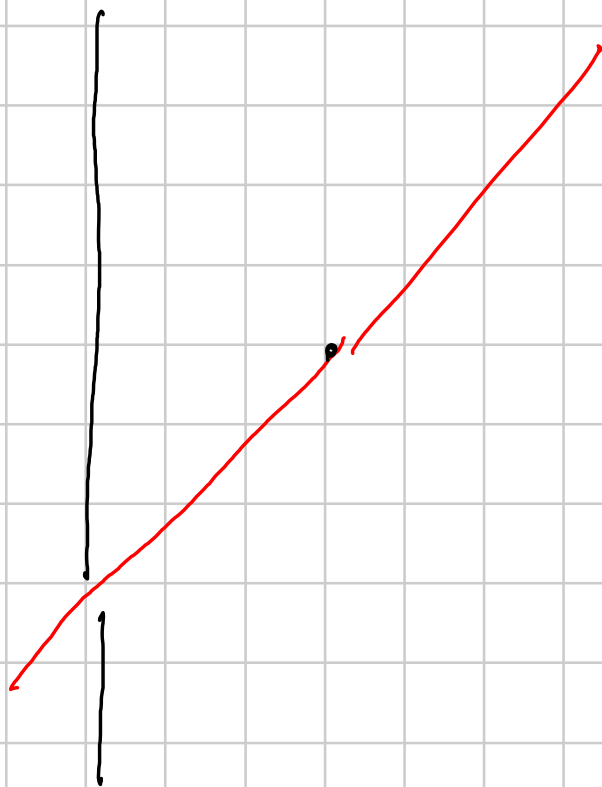
$$z^2 = 1 + y^2 - 1 \quad z^2 = y^2$$

$$z = \pm y \quad \text{due rette}$$

Stesso con $y = 1$: rette $z = \pm x$



Poi d'ora è superf. di rotazione per tutti i punti
 passano due rette, anzi l'iperboloide
 iperbolico può essere costruito per
 rotazione di una pendenza di queste rette
 intorno all'asse z !



Intuitivamente:
 Sup. generate per
 rotazione di una
 retta intorno a
 un'asse ad essa
 sghemba —