

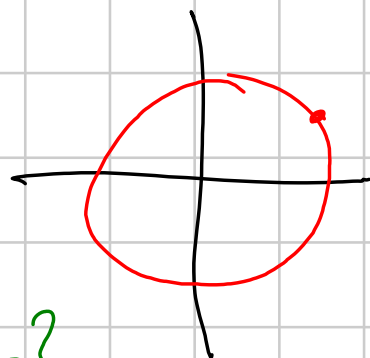
Geom 13/5/16

Equazioni che definiscono (o no)
una curva in $\mathbb{R}^2$:

- $x^2 + y^2 = 1$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$L = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$$

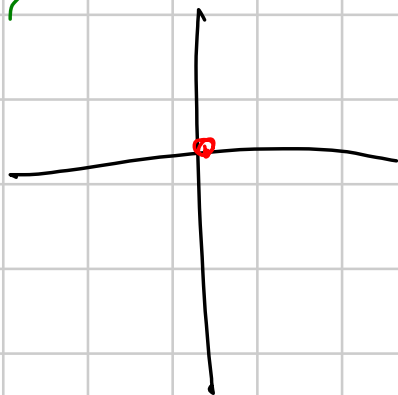


Sì

$$\text{grad} F(x, y) = (2x, 2y)$$

Su L ho $\text{grad} F \neq 0$

- $x^2 + y^2 = 0$



No

$$\text{grad} F = (2x, 2y)$$

Su L ho $\text{grad} F = (0, 0)$

$$\bullet x^2 - y^2 = 1$$

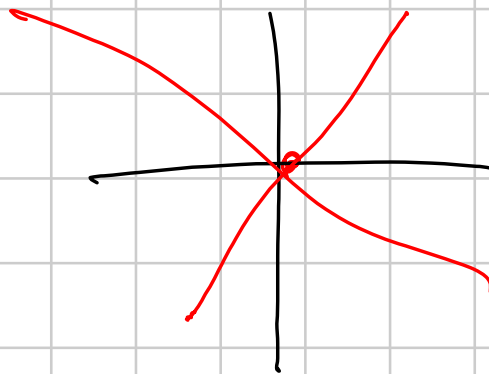


Si

$$\text{grad}(F) = (2x, -2y)$$

Se $\nabla F \neq 0$

$$\bullet x^2 - y^2 = 0$$

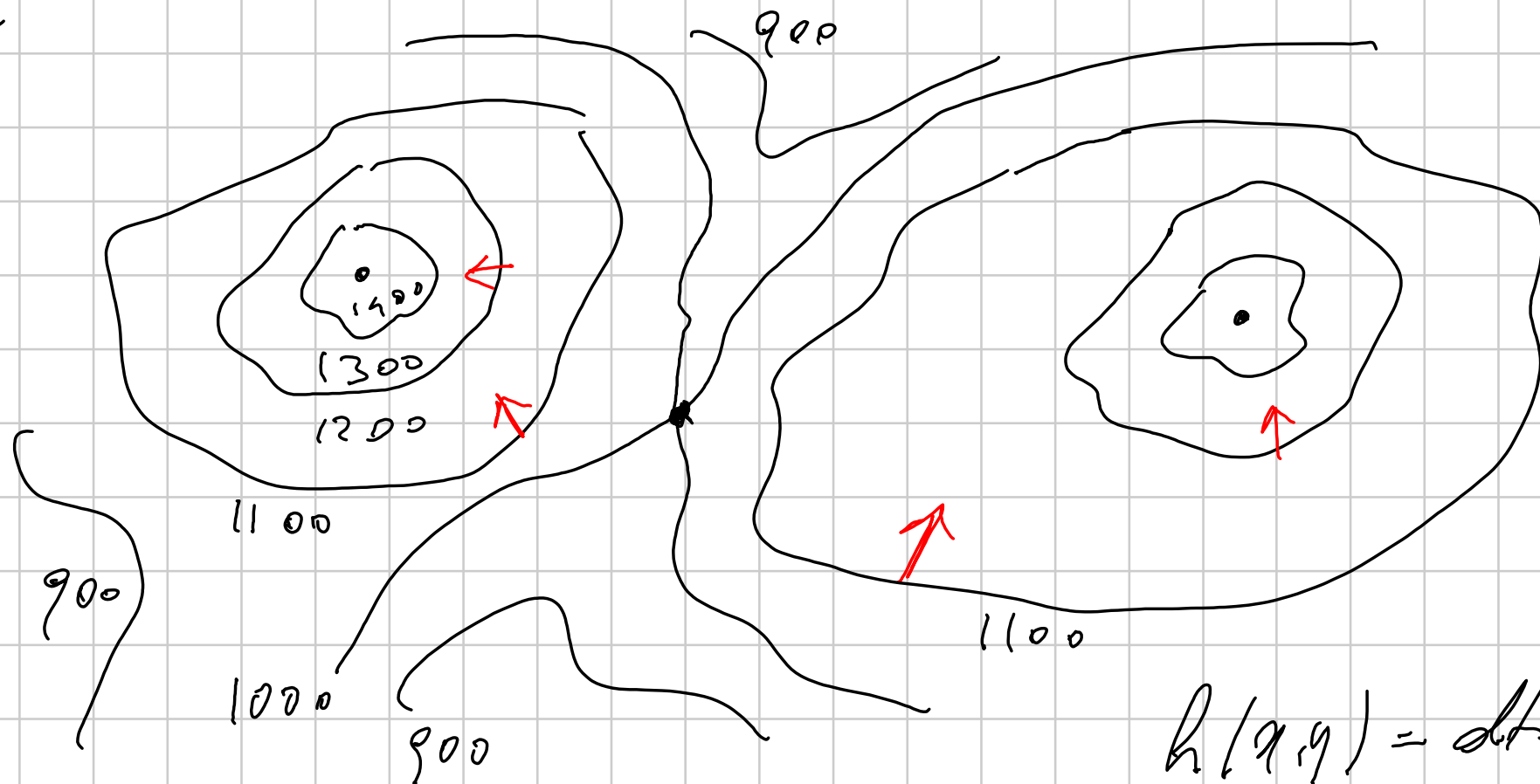


No
(in 0)

$$\text{grad}(F) = (2x, -2y)$$

$\forall u \in L$
no $\text{grad} F = 0$

ES: Contorno con linee altimetriche



$h(x, y) = \text{altitudine}$

$$L_c = \{(x, y) : h(x, y) = c\}$$

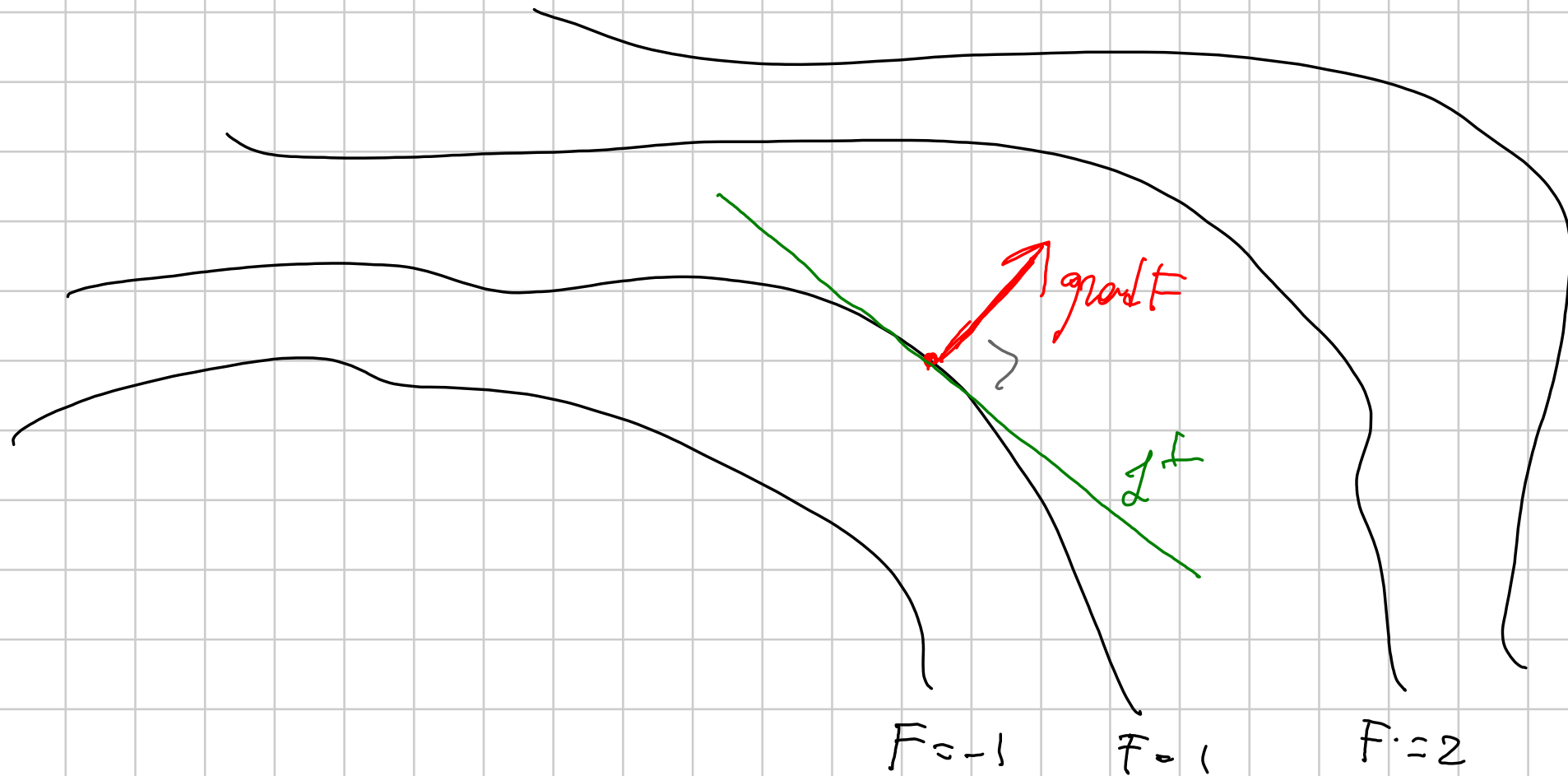
$$\text{grad}(h) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

è la direzione di massima
crescita dell'altitudine

Fatto: $\text{grad}(h)$ è nullo nelle cime,
nei passi, nelle depressioni

Sono proprio gli L_c che non sono
curve.

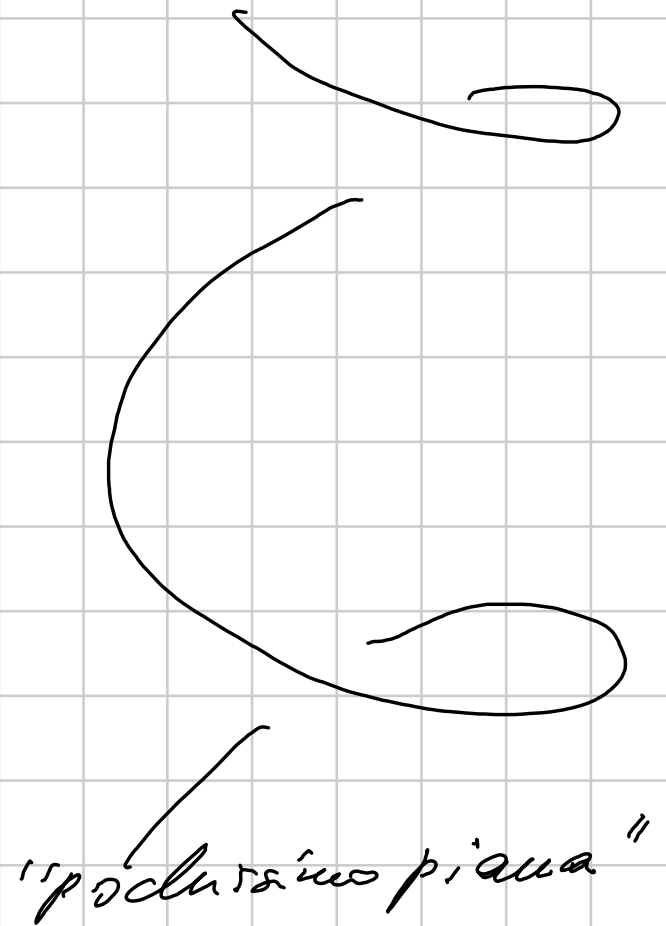
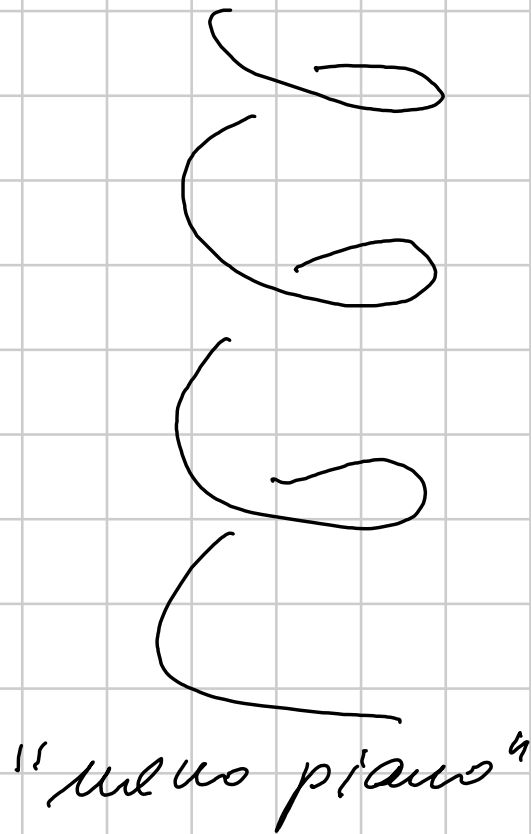
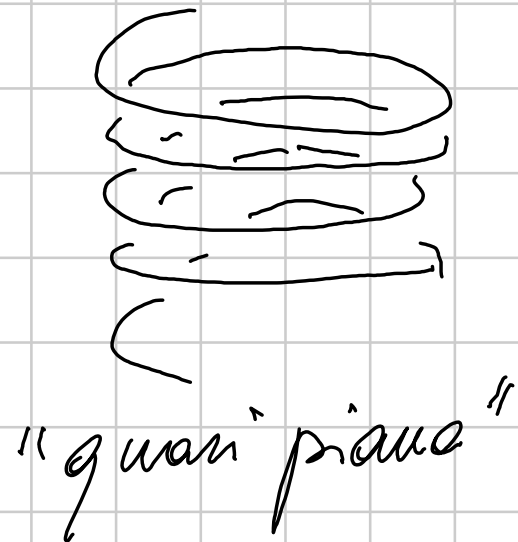
Teo: sia $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0 \right\}$,
se $\text{grad}(F)_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \neq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L$ allora L è
una curva. Inoltre la direzione tangente
a L in $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è quella ortop. a $\text{grad}(F)_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$.



$$\text{grad}(F|_x) = \begin{pmatrix} \partial F / \partial x(x, y) \\ \partial F / \partial y(x, y) \end{pmatrix}$$

Curve nello spazio. Le curve hanno ancora senso.

Ma oltre è naturale cercare di misurare la differenza fra queste curve:



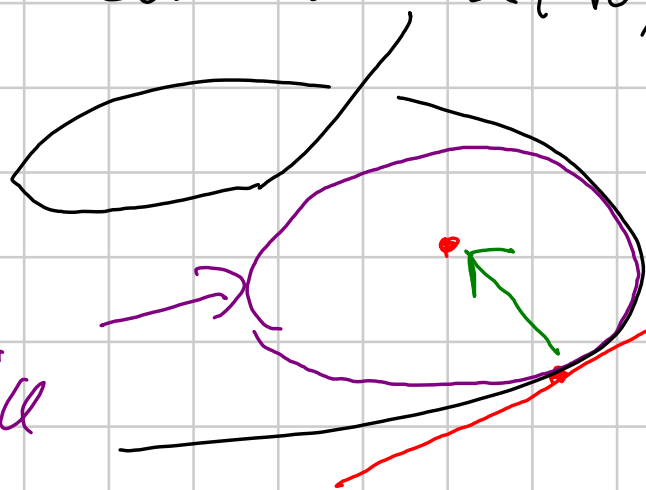
Introduciamo: torsione = misura della
non-planarità -

$\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ in p.d'a. $\|\alpha'\| \equiv 1$.

C'è una circonferenza osculatrice (con triplice contatto)

che ha centro $\alpha(t_0) + \frac{\alpha''(t_0)}{\|\alpha''(t_0)\|^2}$

circonf.
osculatrice



$\alpha'(t_0) + \text{Span}(\alpha''(t_0))$

Il piano su cui giace la circonf. osculatrice

$$\bar{c} \quad \alpha(t_0) + \underbrace{\text{Span}(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0))}_{\text{piano osculatore}}$$

piano osculatore

l'unico con triplice contatto con α

= "il piano su cui α tocca di più e
giace nel pto $\alpha(t_0)$ "

$\Rightarrow$ tangente = insieme delle variet. del piano osculatore.

Per calcolarlo:

Rifinimento L. Frenet
per α in p.d'a.

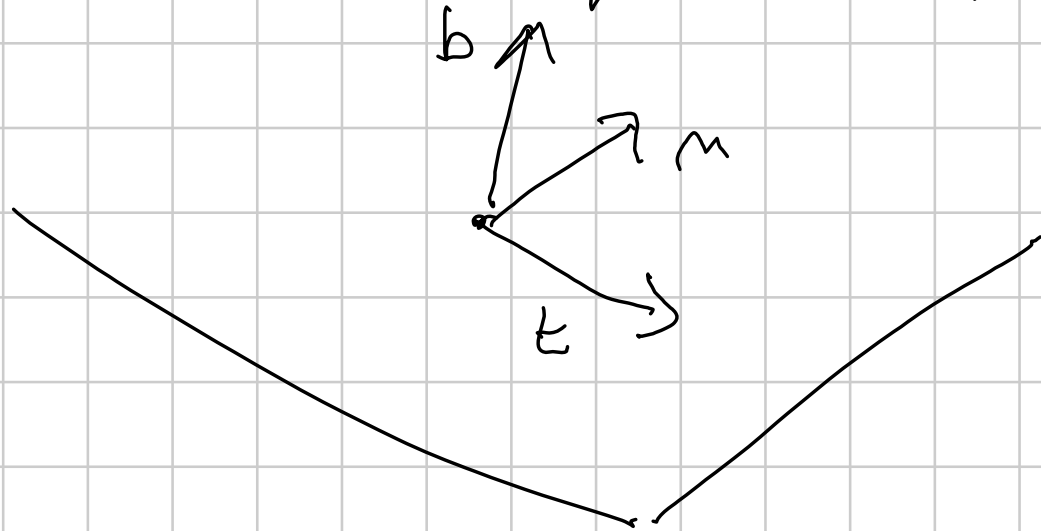
$$\begin{cases} t(s) = \alpha'(s) & \text{tangente} \\ n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} & \text{normale} \\ b(s) = t(s) \wedge n(s) & \text{binormale} \end{cases}$$

(so che $\|\alpha'\| \equiv 1$, $\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0 \Rightarrow n \perp t$)

Per costruzione (t, n, b) è una base
ortonormale positiva di $\mathbb{R}^3$

(ovvero $(t \ n \ b)$ è matrice ortog. con
 $\det = 1$).

Piano osculatore = $\text{Span}(t, n)$



Torsione: misura di cambio di b ;
sarebbe il suo opposto numero.

teo: se α è in p.d'a. esistono $\kappa = \kappa(s)$ curvatura
e $\tau = \tau(s)$ torsione t.c.

$$\begin{cases} t' = \kappa \cdot m \\ m' = -\kappa \cdot t + \tau \cdot b \\ b' = -\tau \cdot m \end{cases}$$

ovvero

$$(t \ m \ b)' = (t \ m \ b)$$

←
sua
derivata

matrice
ortop. che
cambia nel
tempo

$$\begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

matrice
antisimmetrica

sempre vero che $M = M(t)$ ortop.

$$\Rightarrow M'(t) = M(t) \cdot A(t)$$

$\underbrace{\quad}_{\text{antisimmetrica}}$

Dici: $t = \alpha'$

$$m = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \frac{\alpha''}{\kappa} = \frac{t'}{\kappa}$$

$$\Rightarrow t' = \kappa \cdot m$$

Vogliamo b' :

$$\bullet \|b\| \equiv 1 \Rightarrow b' \perp b$$

$$\bullet b = t \wedge m \Rightarrow b' = t' \wedge m + t \wedge m'$$

$$b' = -t \cdot m$$

$$\begin{aligned}
 &= (\underbrace{\tau \cdot m}_0) \wedge m + t \wedge m' \\
 &= t \wedge m'
 \end{aligned}$$

Yafiel:

(t, m, b)

$$m = b \wedge t$$

$$\Rightarrow m' = b' \wedge t + b \wedge t'$$

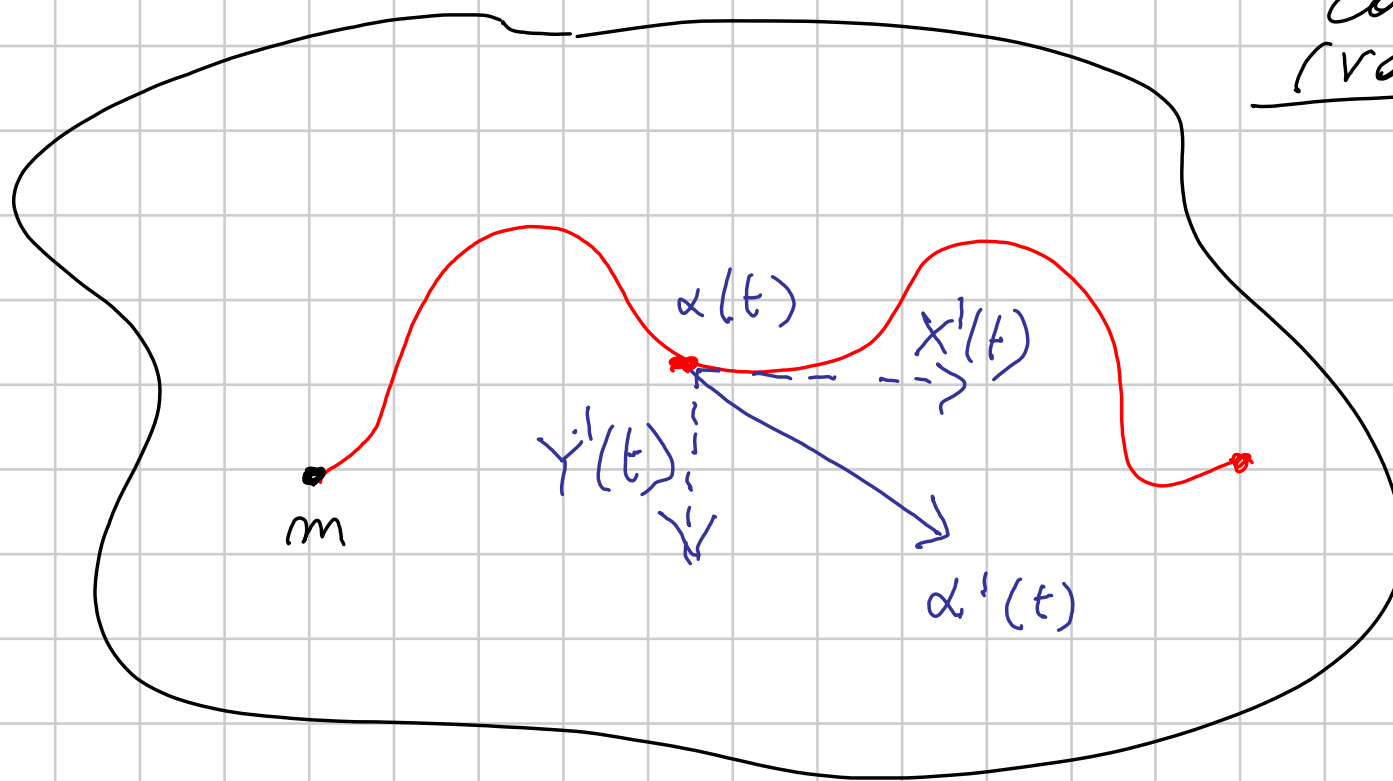
$$= (-\tau \cdot m) \wedge t + b \wedge (\tau \cdot m)$$

$$= \tau \cdot b - \tau \cdot t.$$



Interazione su curve.

campo elettrico
(variabile)



forze
dipendenti
(variabile)

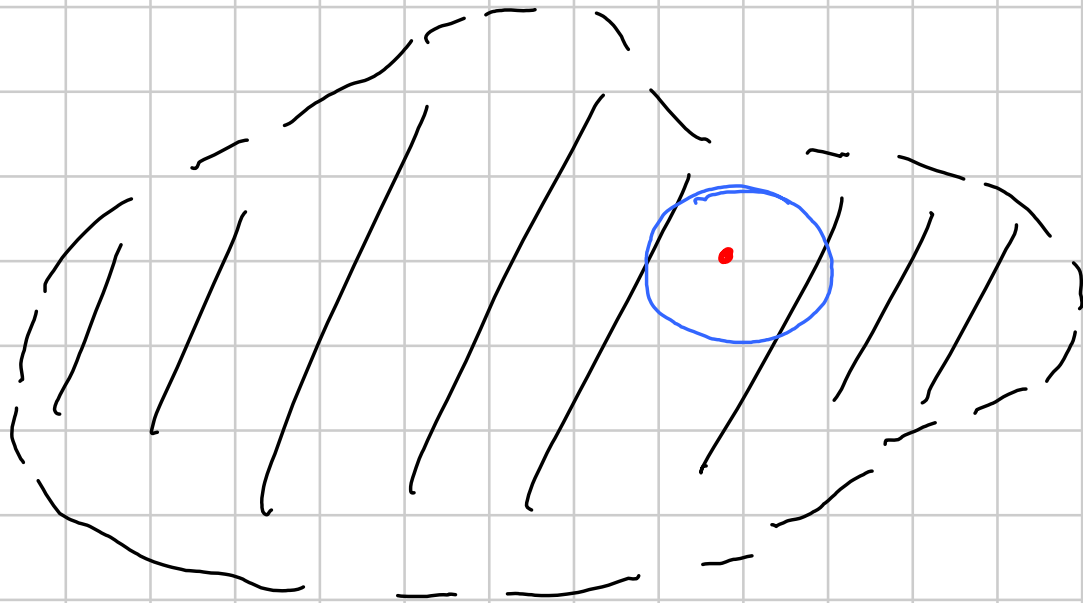
m punto materiale con carica

lavoro fatto rispetto alle due forze da un tratto infinitesimo dt nel punto $\alpha(t)$ $\vec{i}$

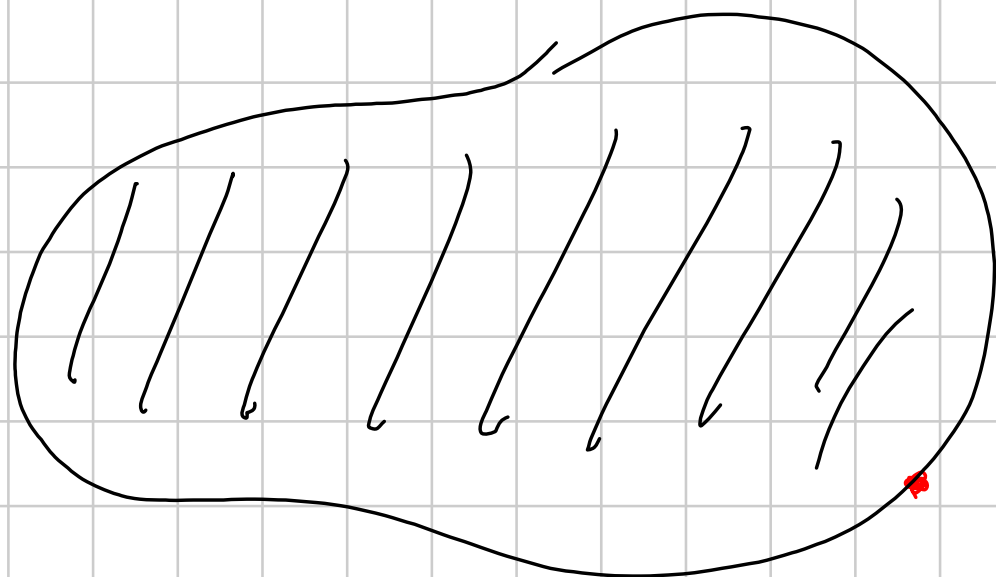
$$\begin{array}{ccccccc}
 f(\alpha(t)) \cdot \underbrace{X'(t) dt}_{\substack{\uparrow \\ \text{spost.} \\ \text{infinitesimo} \\ \text{orizzontale}}} & + & g(\alpha(t)) \cdot \underbrace{Y'(t) dt}_{\substack{\uparrow \\ \text{spostamento} \\ \text{infinitesimo} \\ \text{verticale}}} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{intensità} & & & & \text{intensità} & & \\
 \text{di } \vec{F} & & & & \text{gravitazionale} & & \\
 \text{in } \alpha(t) & & & & \text{in } \alpha(t) & &
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ lavoro totale $\int_a^b (f(\alpha(t)) X'(t) + g(\alpha(t)) Y'(t)) dt$

Def: chiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto se $\forall P \in \Omega$
 $\exists r > 0$ t.c. il disco di centro P e
raggio r è contenuto in Ω .



Ω



No



No

Def: se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è aperto chiamo
1-forme su Ω l'oggetto

$$\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$$

$$(\omega(x,y) = f(x,y) \cdot dx + g(x,y) \cdot dy).$$

Se $\alpha: [a,b] \rightarrow \Omega$ è curva $\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

definisco
integrale di
 ω su α

$$\int_{\alpha} \omega = \int_a^b (f(\alpha(t)) \cdot X'(t) + g(\alpha(t)) \cdot Y'(t)) dt.$$