Geom 13/4/16

Teo (spettrale su $\mathbb{C}$):

A normale ($AA^* = A^*A$) $\iff$ $\exists$ U unitaria ($U^* = U^{-1}$) t.c. $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Casi particolari:

- A unitaria $\iff$ $|\lambda_j| = 1$
- A antihermitiana $\iff$ $\lambda_j \in i \cdot \mathbb{R}$

Applicazioni al caso reale.

- $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ortogonale $\Rightarrow$ unitaria

$$\left(A^* = {}^tA = A^{-1}\right)$$

<u>Teo</u>: esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto a cui A è diagonale a blocchi 2×2 o 1×1 così fatti:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\cdot} & \\ 0 & & & \boxed{\cdot} \ \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

o (± 1).

Geometricamente: ogni isometria di $\mathbb{R}^n$ (lineare) è composizione di rotazioni intorno a sottosp. di dim $n-2$ e riflessioni rispetto a sottosp. di dim $n-1$, con tutti tali sottospazi ortog. tra loro.

Nel caso $n=3$ le isometrie sono queste (in una base ortonormale opportuna):

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

identità — riflessione rispetto a piano — riflessione rispetto a retta — riflessione rispetto a O

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rotaz. angolo ϑ intorno a retta — rotaz. di angolo ϑ intorno a retta l composta con riflessione rispetto a piano $l^\perp$

Idea dim.: gli autovalori hanno modulo 1

$\Rightarrow \lambda_j = e^{i\vartheta_j} = \cos\vartheta_j + i \sin\vartheta_j$

Ho base ortonormale $v_1, \dots, v_n$ di autovett. in $\mathbb{C}$.

Siccome A è reale, $p_A(t)$ è reale

$\Rightarrow$ i λ_j sono o ± 1 oppure

sono a coppie coniugate tra loro

$\left(p(t) \in \mathbb{R}[t],\ z_0 \in \mathbb{C},\ p(z_0) = 0 \right.$

$\left. \Rightarrow p(\overline{z_0}) = \overline{p(z_0)} = 0 \right)$

Gli autovalori ± 1 danno i blocchi ± 1

(da osservare: il relativo v_j posso prenderlo in $\mathbb{R}^4$);

provo che $e^{iu} = \cos u + i \sin u$

$e^{-iu} = \cos u - i \sin u$

dato un blocco 2x2: ho autovettore $v = x - iy$

$$\Rightarrow A \cdot v = e^{iv} \cdot v$$

$$\Rightarrow A(x - iy) = (\cos v + i \sin v)(x - iy)$$

$$\Rightarrow Ax - iAy = \cos v \, x + \sin v \, y - i(-\sin v \cdot x + \cos v \cdot y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax = \cos v \cdot x + \sin v \cdot y \\ Ay = -\sin v \, x + \cos v \cdot y \end{cases}$$

Sul piano $\mathrm{Span}(x,y)$ rispetto a (x,y) la A agisce come

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Devo provare che $x \perp y$ e che posso prenderli unitari (basta vedere che $\|x\| = \|y\|$): da sopra segue che $x + iy$ è autovett. relativo a $e^{-i\theta}$

$$\Rightarrow \langle x+iy \mid x-iy \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$$

$$\Rightarrow {}^t\overline{(x-iy)}\,(x+iy) = 0$$

$$\Rightarrow ({}^tx + i\,{}^ty)(x+iy) = 0$$

$$\Rightarrow {}^tx\cdot x - {}^ty\cdot y + i\,{}^tx\cdot y + i\,{}^ty\cdot x = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \|x\|^2_{\mathbb{R}^4} - \|y\|^2_{\mathbb{R}^4} + 2i\,\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^4} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \|x\| = \|y\| \,, \quad \langle x|y\rangle = 0 \,.$$

"$\blacksquare$"

- A antisimmetrica $\Longrightarrow$ antihermitiana
  $\Longrightarrow$ autoval immag. puri.

<u>Teo</u>: $\exists$ base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui A è diagonale a blocchi

$$\begin{pmatrix} \boxed{\vdots} & & & 0 \\ & \boxed{\vdots} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\cdot} \; \boxed{\cdot} \; \ddots \end{pmatrix}$$

con blocchi

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad (0)$$

Caso particolare $n=3$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ oppure $\exists M$ ortogonale t.c.

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dunque per n dispari una antisimmetrica $n \times n$ ha sempre autovalore 0).

Idea dimo: da $\lambda = i \cdot \alpha$ autovalore e $v = x + iy$ autovettore voglio ricavare blocco 2×2:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow A \cdot (x+iy) = i\alpha(x+iy)$$

$$\Rightarrow A \cdot x + i\, A y = -\alpha y + i \alpha x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \cdot x = -\alpha y \\ A \cdot y = \alpha x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ su $\mathrm{Span}(x, y)$ ho $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$

(conclusione come sopra) — $\boxed{\ }$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -2 & -3 \\ 2 & t & -1 \\ 3 & 1 & t \end{pmatrix} = t^3 + 6 - 6 + 9t + 4t + t$$

$$= t^3 + 14t = t\,(t^2 + 14)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{14} \qquad \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \exists\ (w_1\ w_2\ w_3) = M \quad \text{ortonormale t.c.}$$

$$^tM \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{14} & 0 \\ -\sqrt{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per trovare: $w_1 + i w_2$ è autovet. rel. a $i\sqrt{14}$

w_3 " " " " 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = i\sqrt{14} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -i\sqrt{14}\,x + 2y + 3z = 0 \\ +2x + i\sqrt{14}\,y - z = 0 \\ 3x + y + i\sqrt{14}\,z = 0 \end{cases}$$

Provo che sono lin. dip. $\det\begin{pmatrix} -i\sqrt{14} & 2 & 3 \\ 2 & i\sqrt{14} & -1 \\ 3 & 1 & i\sqrt{14} \end{pmatrix}$

$$= i\,14\sqrt{14} - 6 + 6 - 9i\sqrt{14} - 4i\sqrt{14} - i\sqrt{14}$$
$$= 0$$

$$\begin{pmatrix} -39 - 3 - 2i\sqrt{14} \\ +2i\sqrt{14} + 42 = 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione: $\begin{pmatrix} -13 \\ -3-2i\sqrt{14} \\ 2-3i\sqrt{14} \end{pmatrix}$

$$\tilde{w}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{14} \\ 3\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_1 \perp \tilde{w}_2$$

$$\|\tilde{w}_1\|^2 = 169 + 9 + 4 = 182$$
$$\|\tilde{w}_2\|^2 = 14(4+9) = 182$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{182}} \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{182}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{14} \\ 3\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

w_3 autovett. rel. a autoval. 0 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ -2x + z = 0 \\ -3x - y = 0 \end{cases} \qquad w_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\langle w_1 | w_3 \rangle = \frac{1}{\dots} (13 - 9 - 4) = 0$$

$$\langle w_2 | u_3 \rangle = 0 \, .$$

Problema: quale "tipo" di luogo è rappresentato in $\mathbb{R}^n$ da un'equazione polinomiale di secondo grado?

(Primo grado: sottosp. vett. o affine...)

Es: $x^2 - 5xy - 3y^2 + 4x + 7y - \sqrt{11} = 0$ in $\mathbb{R}^2$

$$4x^2 + y^2 - z^2 + 9xy - 11xz + 19yz + 6x - 7y + \sqrt{3}z + 41 = 0$$ in $\mathbb{R}^3$.

"tipo": forniremo dei modelli di oggetto

e provengono da ogni luogo c.s.
si trasforma in uno dei modelli
tramite una trasformazione di $\mathbb{R}^n$
di tipo prefissato.

Tipi di trasformazione di $\mathbb{R}^n$:

* isometria (non nec. lineare)
* affini: $x' = M \cdot x + v$

  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertibile

  $v \in \mathbb{R}^n$

(composizione di traslazione e
trasf. lineare invertibile)

<u>Oss</u>: inversa di trasf. affine: $x = M^{-1} \cdot x' - M^{-1} \cdot v$

Isometria: Trasformazione che conserva le distanze (movimento rigido).

<u>Oss</u>: 0) ogni $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ortogonale è isometria

1) ogni traslazione $x' = x + v$ è isometria

2) composizione di isometrie lo è

3) ogni trasf. $x' = M \cdot x + v$ con M ortog. è isometria.

Teo: ogni isometria di $\mathbb{R}^n$ è del tipo $x' = Mx + v$
con M ortogonale.

Dimo ($n=2$ idea).

Prendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometria
$\left(d(f(x), f(y)) = d(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2 \right)$.

Voglio provare che è affine (chiaramente allora due M deve essere ortog).

Passo 1: considero $g(x) = f(x) - f(0)$
($g = f$ composta con traslaz. di vett. $-f(0)$).

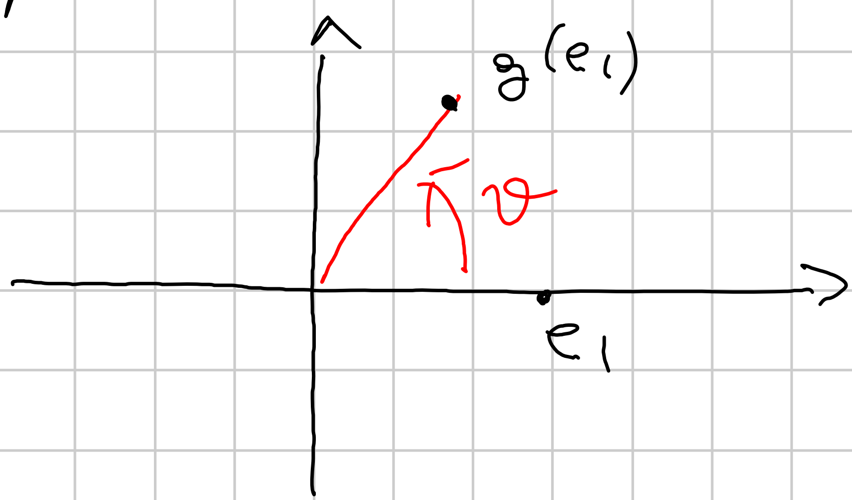
Noto che •) g è isometria

•) se poi mostro che g è lineare concludo che f è affine

•) $g(0) = 0$.

<u>Passo 2</u>: noto che $g(e_1)$ ha distanza 1 da O

poiché $d(g(e_1), 0) = d(g(e_1), g(0)) = d(e_1, 0) = 1$.



Chiamo r la rotaz. di angolo $-\vartheta$ e pongo $h = r \circ g$

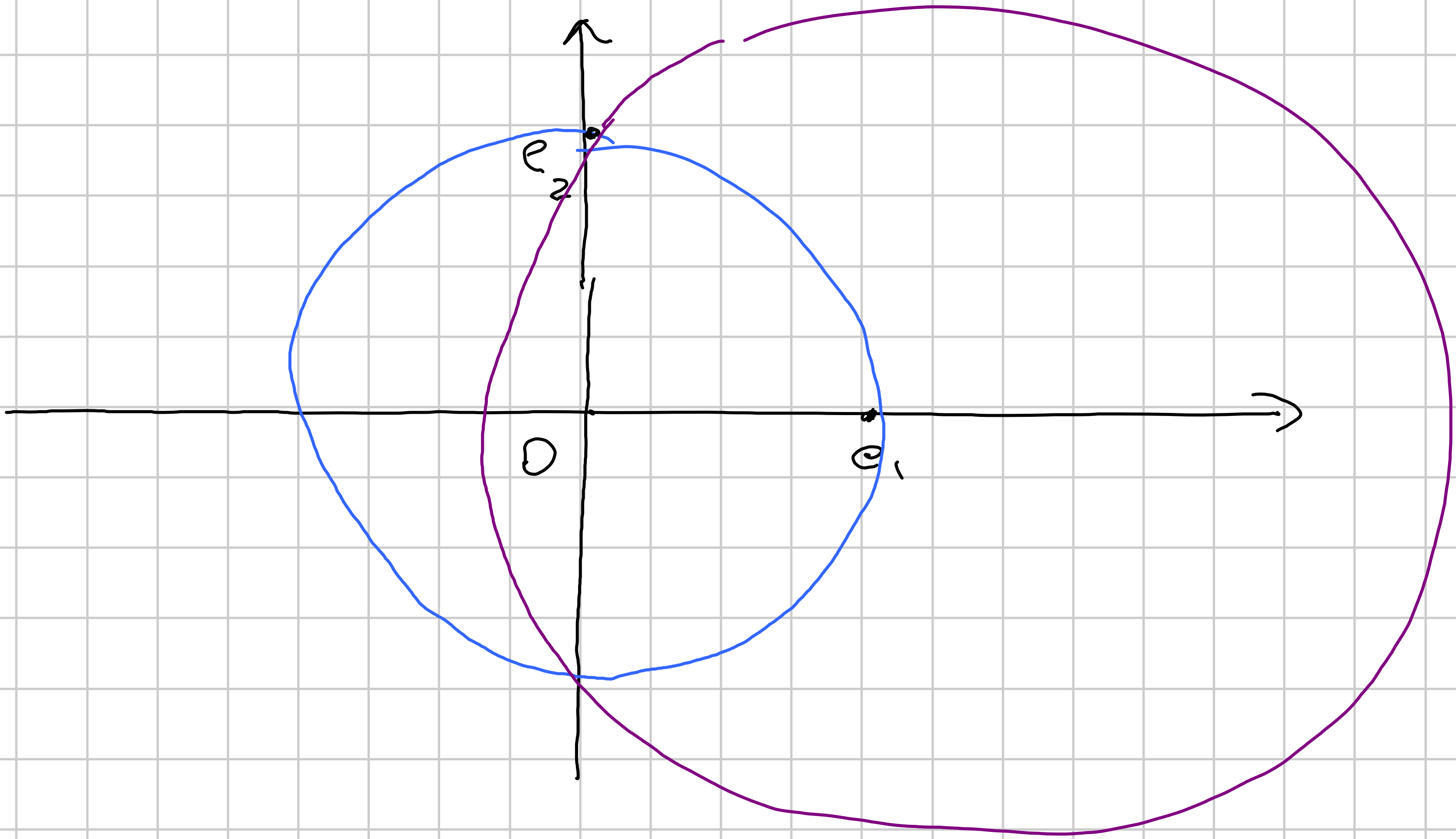
$h(x) = r(g(x))$. Noto:

- h è isometria
- se poi mostro che h è lineare concludo che g lo è
- $h(0) = 0$ e $h(e_1) = e_1$

<u>Passo 3</u>: Noto che

$$d(h(e_2), 0) = d(h(e_2), h(0)) = d(e_2, 0) = 1$$

$$d(h(e_2), e_1) = d(h(e_2), h(e_1)) = d(e_2, e_1) = \sqrt{2}$$



$\Rightarrow h(e_2) \quad \bar{e} \quad \circ \quad e_2 \quad \circ \quad -e_2 \quad -$

Nel primo caso pongo $T = h$; nel secondo caso pongo $T = \sigma \circ h$ con σ = rifl. rispetto $\mathrm{span}(e_1)$.

Noto che: •) T è isometria

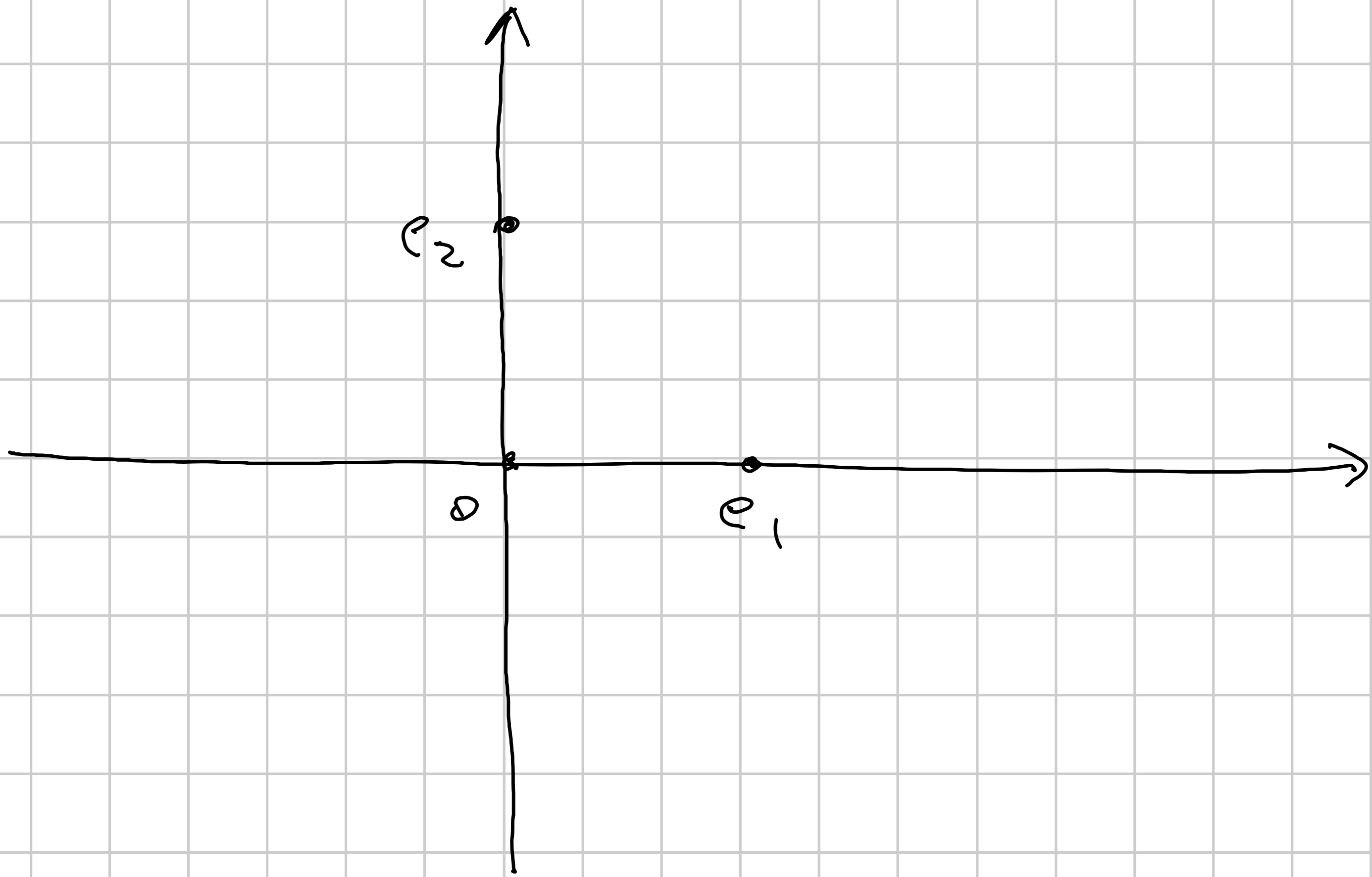
•) Se poi mostro che T è lineare concludo che h è lineare

•) T fissa O, e_1, e_2

<u>Conclusione</u>: affermo che T è l'identità.

Poiché T fissa O, e_1, e_2 ed è isometria

$T(x)$ ha la stessa distanza di x da O, da e_1 e da e_2.


e_2
0
e_1