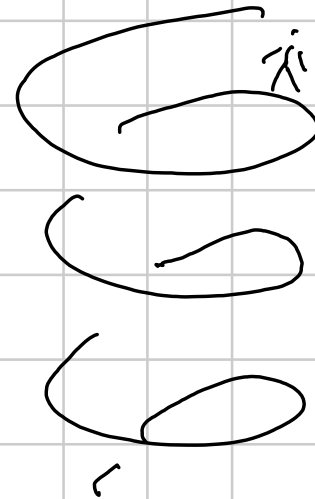
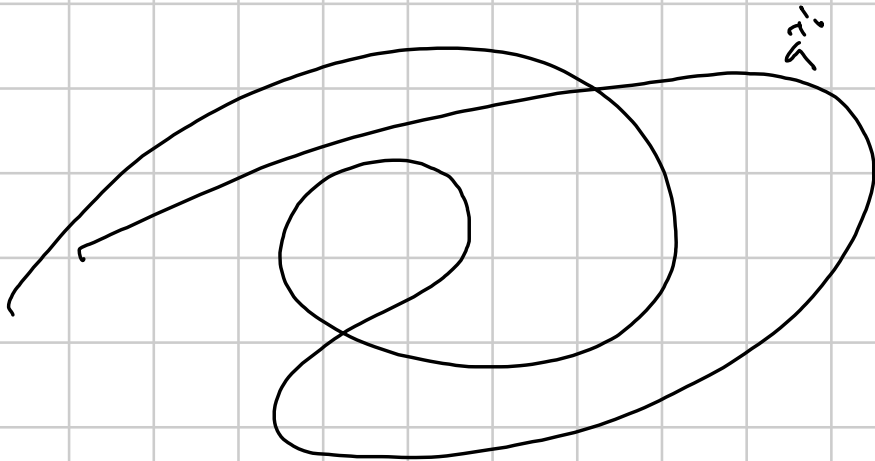


Geom 11/5/16

io: 13/5(1) 18/5(2) 19/5(1)

Pacini 12/5(2), 19/5(1), 20/5(1)
ultime sett (6, recupero giorn. 12:30)

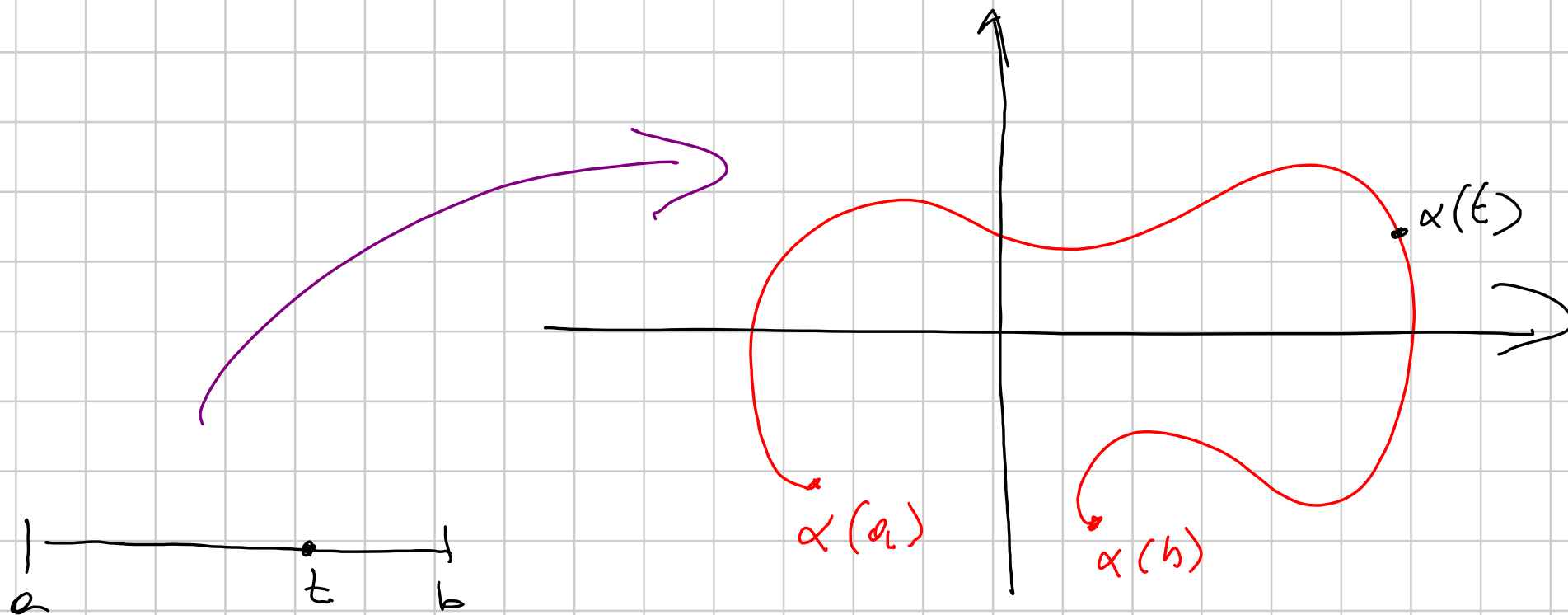
curva : percorso che si può seguire



oggetto 1-dim. ma non dritto (curvo).

Def: chiamo curva parametrizzata una

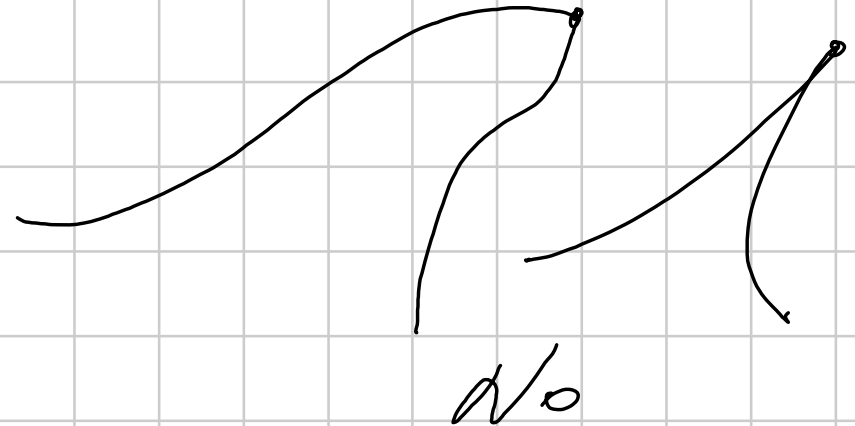
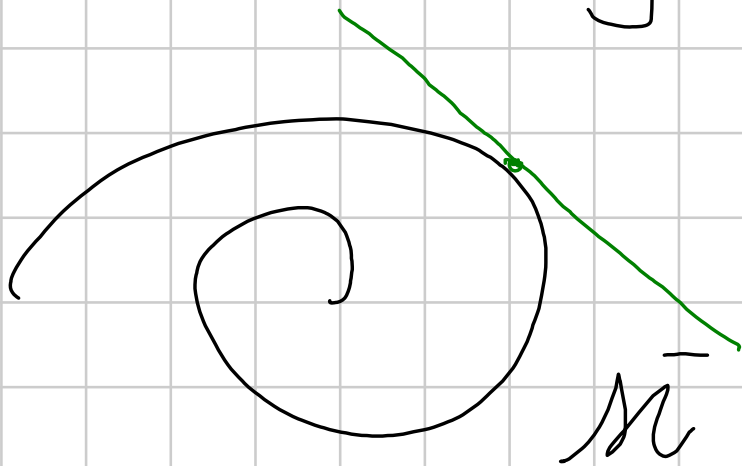
$$\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$



(dovremo ricordarci che ciò che conta è il

percorso, non è legge di percorso) -

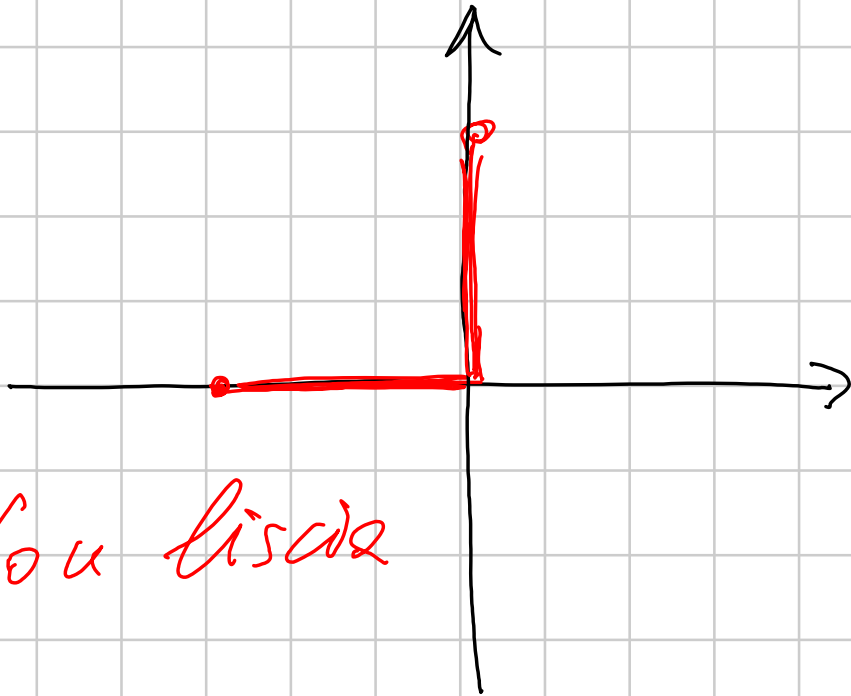
Vogliamo considerare curve lisce, cioè dotate
di rette tangente



Se $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ richiediamo che esista
 $\alpha' = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{pmatrix}$.

Ciò non basta;

$$\alpha(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} & t \in [-1, 0] \\ \begin{pmatrix} 0 \\ t^3 \end{pmatrix} & t \in [0, 1] \end{cases}$$



Non liscia

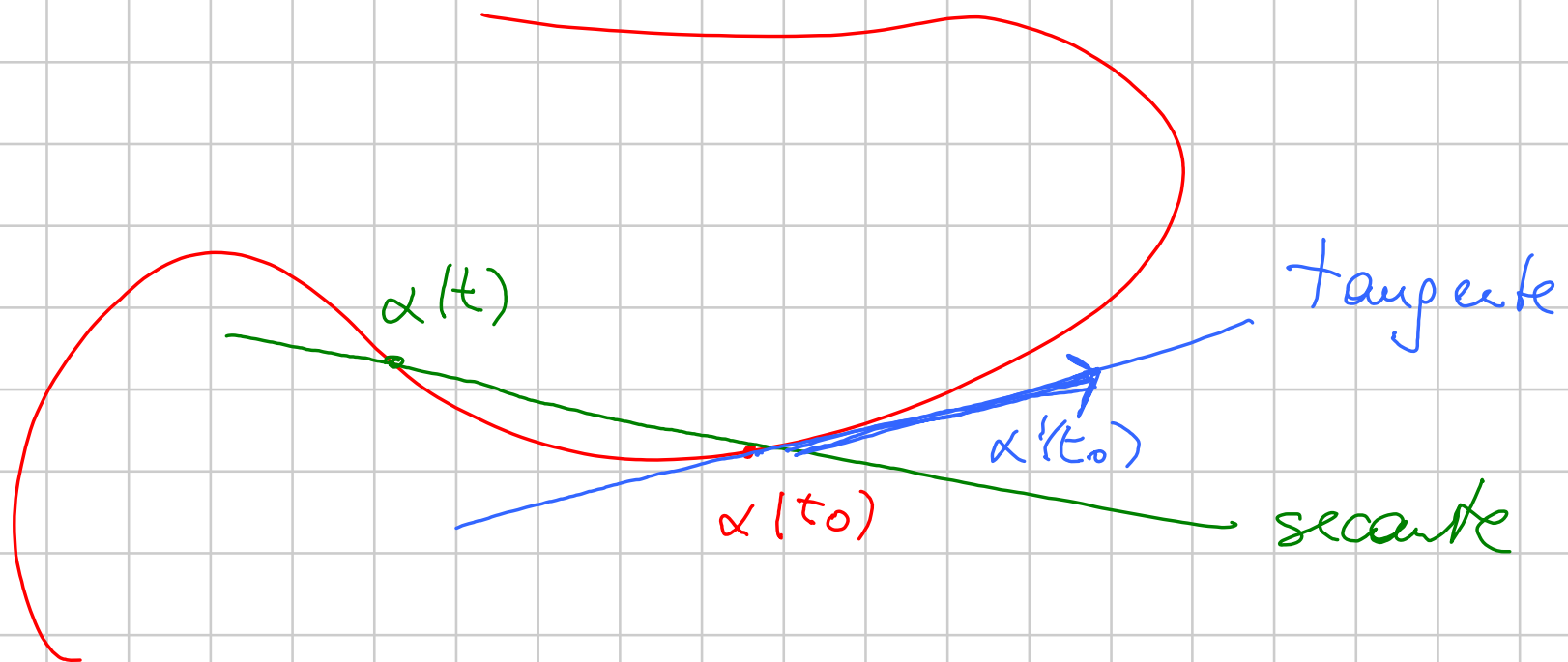
$$\alpha'(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix} & t \in [-1, 0] \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 \end{pmatrix} & t \in [0, 1] \end{cases}$$

coincidono in $t=0$
 $\Rightarrow \alpha'(t)$ esiste $\forall t$

Def: chiamiamo curva regolare una $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
t.c. $\alpha'(t)$ esiste $\forall t$ ed è $\neq 0$.

Prop: se α è regolare e $t_0 \in [a, b]$ la secante
ad α nei punti $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$ tende per $t \rightarrow t_0$
alla retta passante per $\alpha(t_0)$ con giacitura
 $\alpha'(t_0)$. Inoltre tale retta è l'unica con
contatto doppio con α .

(Essa è detta retta tangente ad α in $\alpha(t_0)$.)



Definizione: retta per $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$ è

$$\alpha(t_0) + \text{Span}(\alpha(t) - \alpha(t_0)) = \alpha(t_0) + \text{Span}\left(\frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}\right)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow t \rightarrow t_0 \\ \alpha'(t_0) \end{array}$$

Duplice contatto: se $f(t)$ è la distanza tra $\alpha(t)$ e una retta r

$f(t_0) = 0$ contatto semplice: r interseca α in $\alpha(t_0)$

$f'(t_0) = 0$ contatto doppio $\angle$ (Considero $n=2$)

$r: ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 = 1)$

$$f(t) = |ax(t) + by(t) + c| = \sqrt{(ax(t) + by(t) + c)^2}$$

$f(t_0) = 0$: condizione su c

$$f'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\dots}} 2 \underbrace{(aX'(t_0) + bY'(t_0))}_{\text{deve essere } 0} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha'(t_0) = \begin{pmatrix} X'(t_0) \\ Y'(t_0) \end{pmatrix}$$

soddisfa la parte omogenea
dell'equazione di r

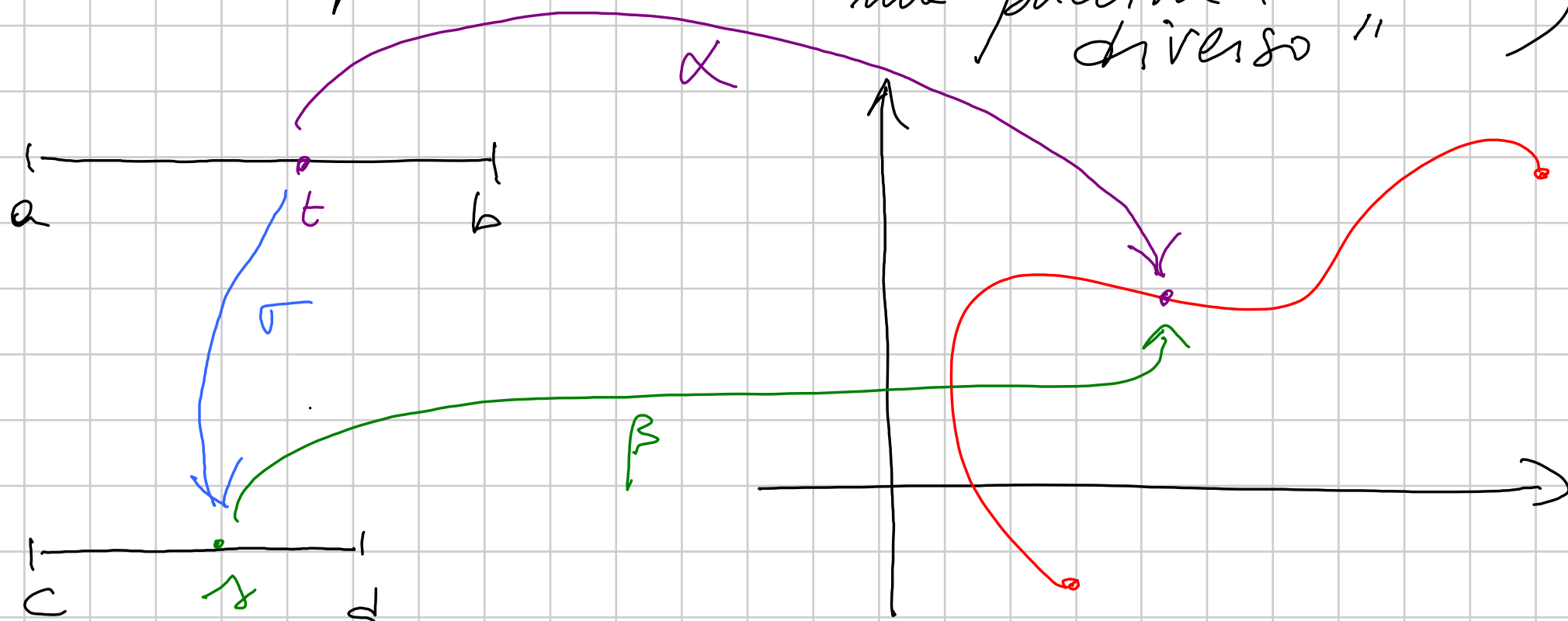
$\Rightarrow r$ ha direzione $\alpha'(t_0)$.



Def: dico che $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$

dico che sono entrambe l'una dell'altra con

cambio di parametro ("sono le stesse curve
ma percorse in modo
diverso")



se esiste $\sigma: [a, b] \rightarrow [c, d]$ bijective
t.c. $\alpha(t) = \beta(\sigma(t))$

(ovvero $\beta(t) = \alpha(\sigma^{-1}(t))$).

QSS: una funzione bijective $[a, b] \rightarrow [c, d]$
può essere solo

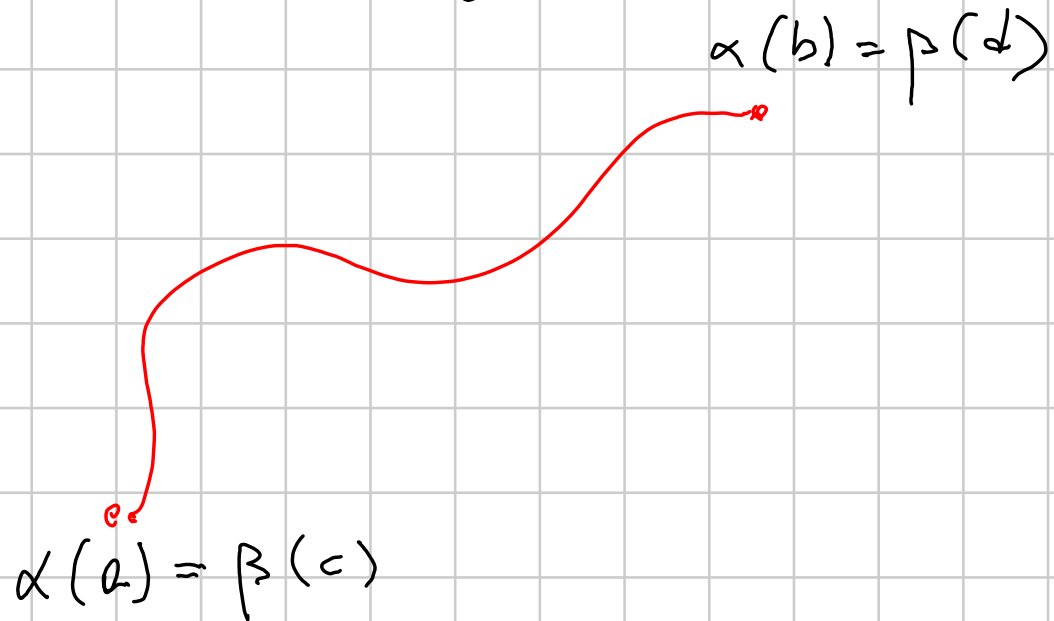
crescente



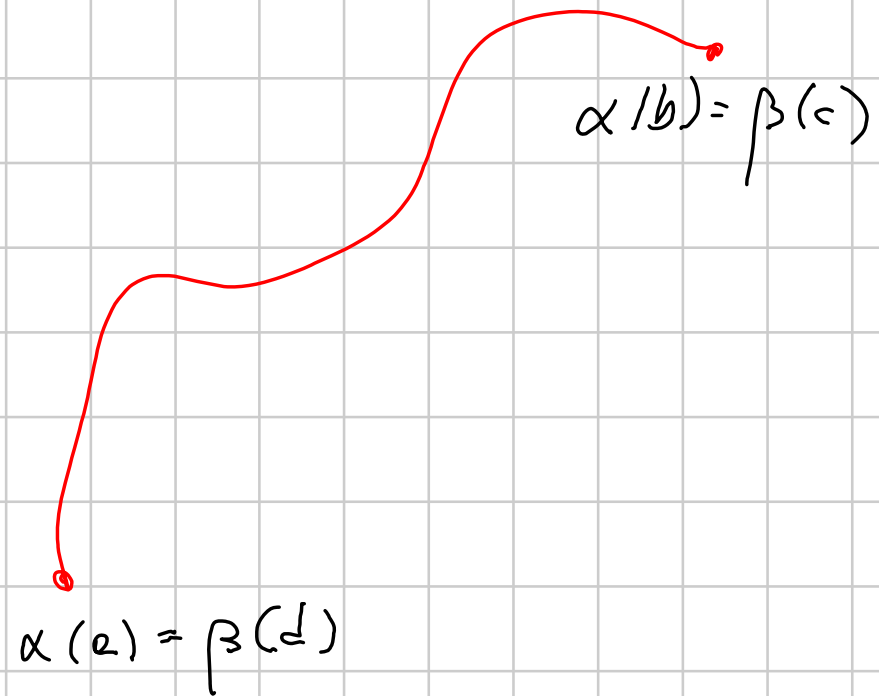
decrecente



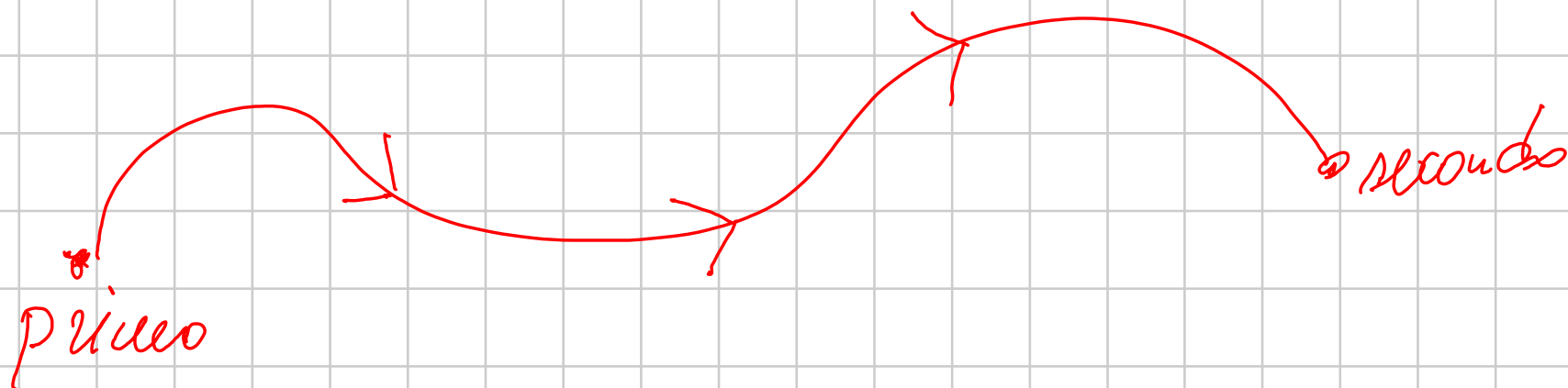
σ crescente:



σ decrescente



Def: chiamiamo curve orientate una curve
con un fissato verso di percorrenza (cioè:
specifico quale estremo è il primo e
quale il secondo).



σ crescente $\longleftrightarrow \alpha$ e β sono "uguali" come curve orientate

σ decrescente $\longleftrightarrow \beta$ e α con l'orientazione opposta.

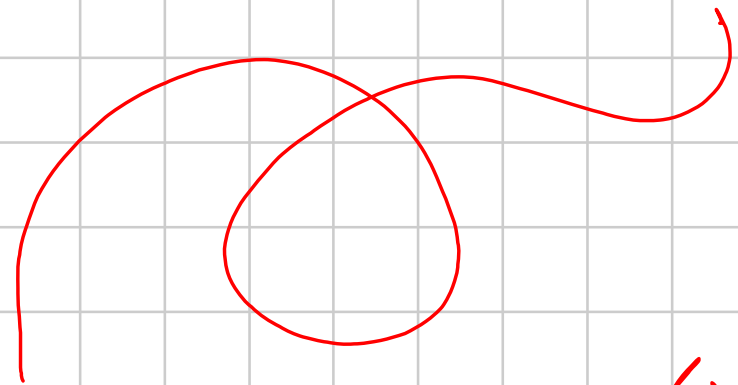


Def: dico che $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è

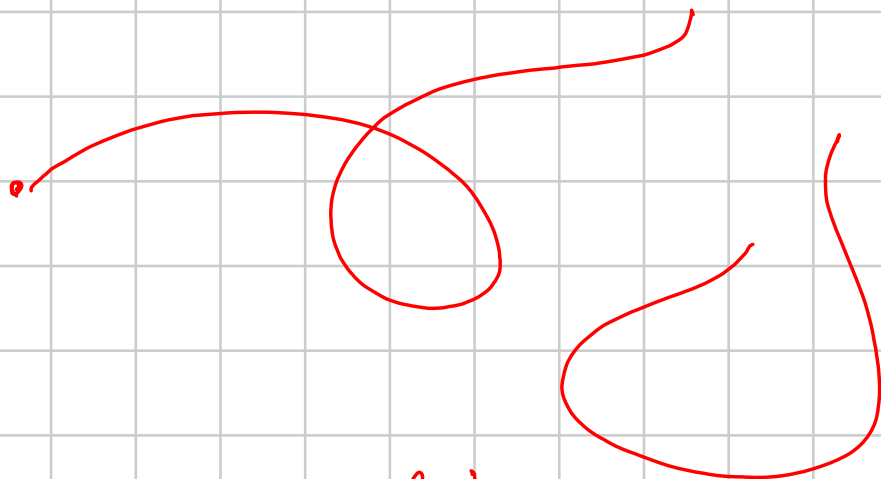
- semplice se α è iniettiva
- chiusa se $\alpha(a) = \alpha(b)$
- semplice e chiusa se $\alpha(a) = \alpha(b)$ e
ristretta ad $[a, b)$ α è iniettiva.



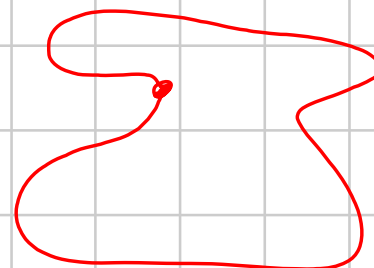
semplice



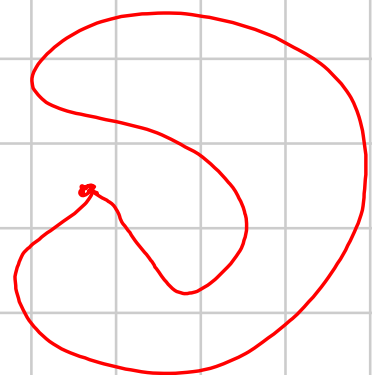
non semplice



non dense



chiara

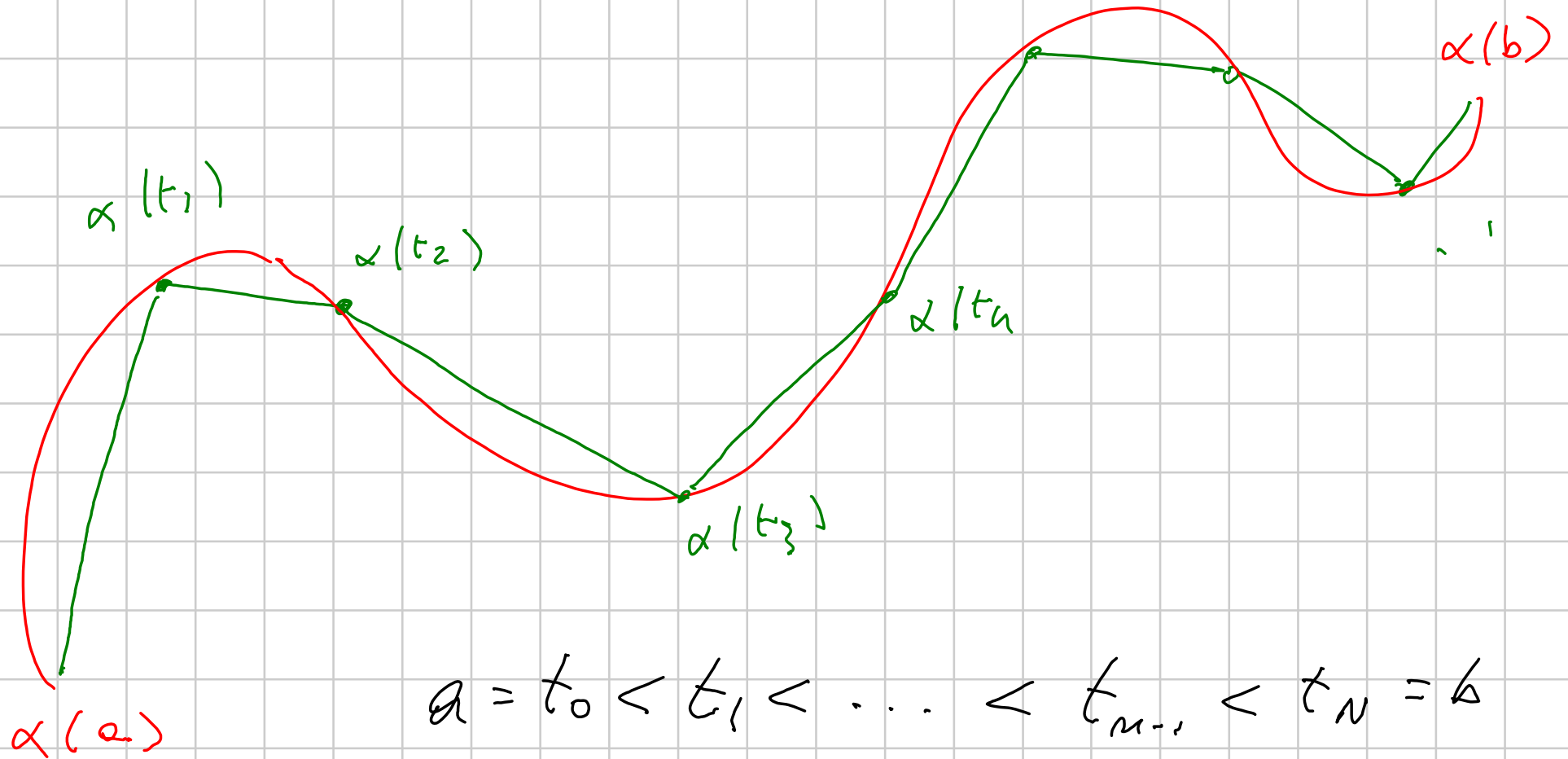


sapida e
chiara



uso

Lunghezza di $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$



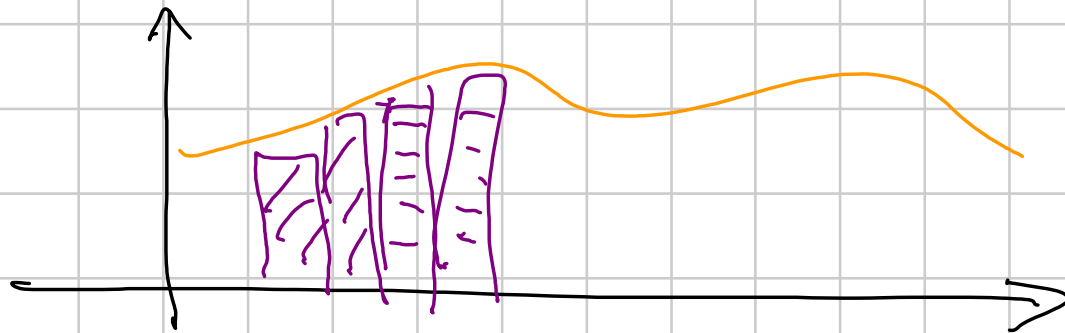
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

Length approx $\approx \sum_{j=1}^{n-1} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|$

limph772 : prendere limite per $N \rightarrow +\infty$
 $t_j - t_{j-1} \rightarrow 0$

Ona $\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) \simeq \alpha'(t_{j-1}) \cdot (t_j - t_{j-1})$
 $\uparrow$
approx di f ordine

$$L(\alpha) \simeq \sum_{j=1}^N \|\alpha'(t_{j-1})\| \cdot (t_j - t_{j-1})$$



Donc d'après la définition de α

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Prop: $L(\alpha)$ ne change si on paramétrise :

$$\alpha(t) = \beta(\sigma(t))$$

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

$$L(\beta) = \int_c^d \|\beta'(\tau)\| d\tau$$

pour $\Delta = \sigma(t)$

$$d\sigma = |\sigma'(t)| dt$$

$$[c, d] \rightarrow [a, b]$$

$$\Rightarrow L(\beta) = \int_a^b \|\beta'(\sigma(t))\| \cdot |\sigma'(t)| dt$$

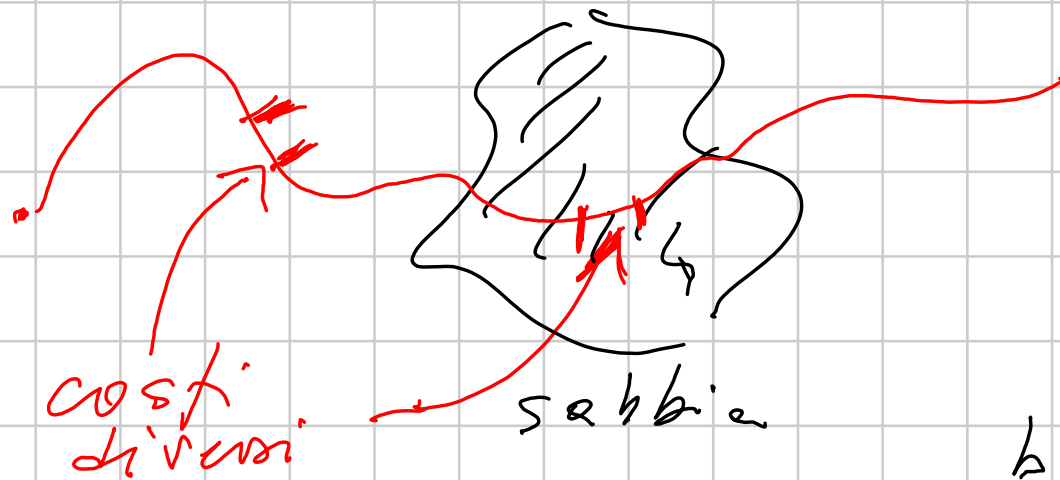
$$\text{Ma } \alpha(t) = \beta(\sigma(t))$$

$$\Rightarrow \alpha'(t) = \beta'(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \underbrace{\|\beta'(\sigma(t))\|}_{\|\beta'(\sigma(t))\|} \cdot |\sigma'(t)|$$

$$\Rightarrow L(\beta) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha)$$

Può accadere che il costo di percorrenza di un tratto di curva di lunghezza finita non sia costante:



$f(x,y)$ = costo unitario
nel punto (x,y) .

Costo complessivo :

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \underbrace{\|\alpha'(t)\|}_{\text{elemento di lunghezza}} dt$$

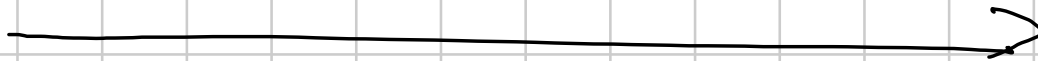
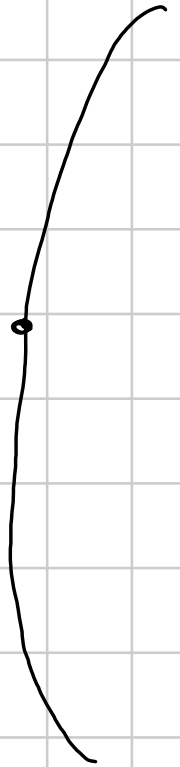
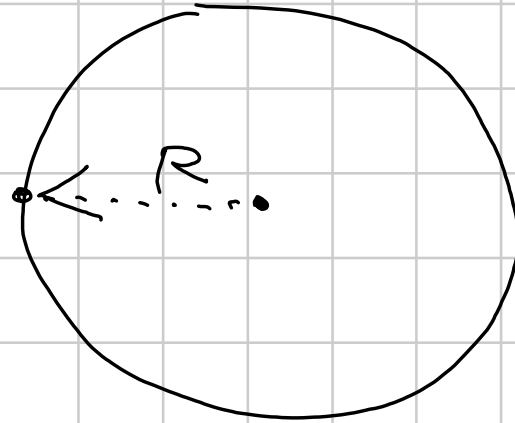
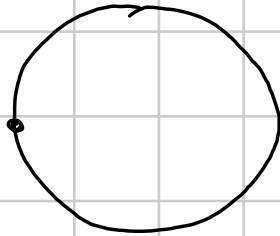
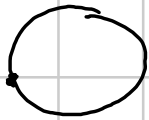
Def: se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curve

$$\int_{\alpha} f = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt.$$

Oss: non dipende dalla parametrizzazione —

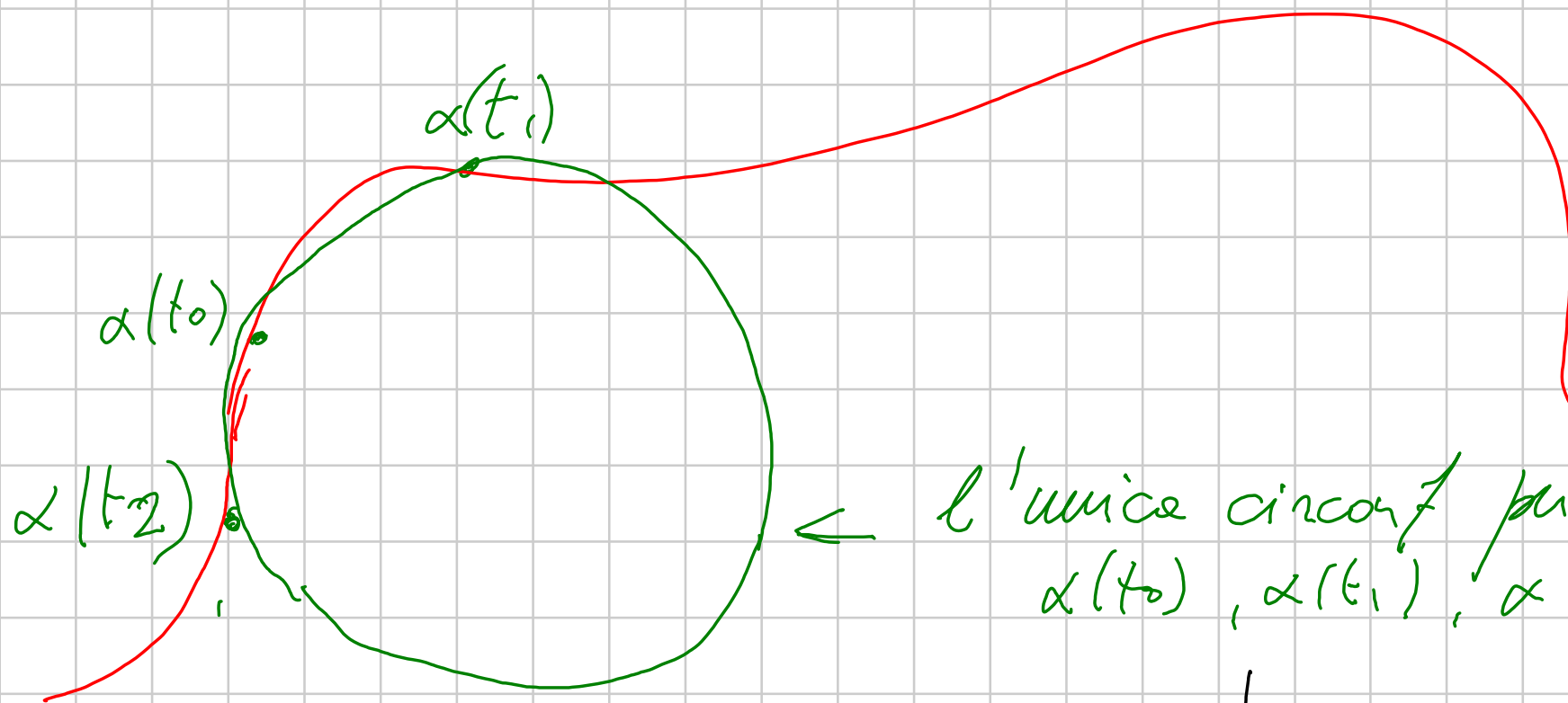
Curvatura: "misura di quanto una
curva $\neq$ tangente delle sue
dritte",

Es:



curvature circle

measure of curvature: $\frac{1}{R}$.



← l' unice circonferenza per
 $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \alpha(t_2)$

↓
 l'idea per $t_1, t_2 \rightarrow t_0$

tende a una circonferenza
 con triplice contatto con α .

della circonf. osculatrice

Curvatura di α in pto: reciproco del raggio
della circonf. osculatrice.

Come calcolarlo?

Def: α si dice in parametro d'arco se

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

(cioè se α viene percorso a velocità costante 1)

Prop: ogni curva può essere riparametrizzata
in parametro d'arco.

Def: data $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva

$$\sigma(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du = \text{spazio percorso fino al tempo } t.$$

Curva $\beta(s) = \alpha(\sigma^{-1}(s))$

$$\sigma: [a, b] \rightarrow [0, L]$$

$$(L = \text{lunghezza di } \alpha)$$

$$\sigma^{-1}: [0, L] \rightarrow [a, b]$$

$$\text{recipro} \quad \beta'(s) = \alpha'(\sigma^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(s))}$$

$$\text{we } \sigma'(t) = \|\alpha'(t)\|$$

$$\Rightarrow \beta'(s) = \frac{\alpha'(\sigma^{-1}(s))}{\|\alpha'(\sigma^{-1}(s))\|}.$$

$$\Rightarrow \|\beta'(s)\| \equiv 1.$$



Th: se α $\bar{e}$ in p.d'a, e $\alpha''(t_0) \neq 0$

la circonferenza osculatrice ad α in $\alpha(t_0)$
è quella che passa per $\alpha(t_0)$ e ha centro
 $\alpha(t_0) + \frac{\alpha''(t_0)}{\|\alpha''(t_0)\|^2}$. Dunque ha raggio

$\frac{1}{\|\alpha''(t_0)\|}$. Quindi la curvatura κ di α
in $\alpha(t_0)$ è $\|\alpha''(t_0)\|$.

Dimo: Fatto generale: se $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
con $\|v(t)\| \equiv 1$ allora
 $v'(t) \perp v(t) \quad \forall t$.

Yuffelt: $v_1(t)^2 + \dots + v_n(t)^2 \equiv 1$

$$\Rightarrow 2v_1(t)v_1'(t) + \dots + 2v_n(t)v_n'(t) \equiv 0$$

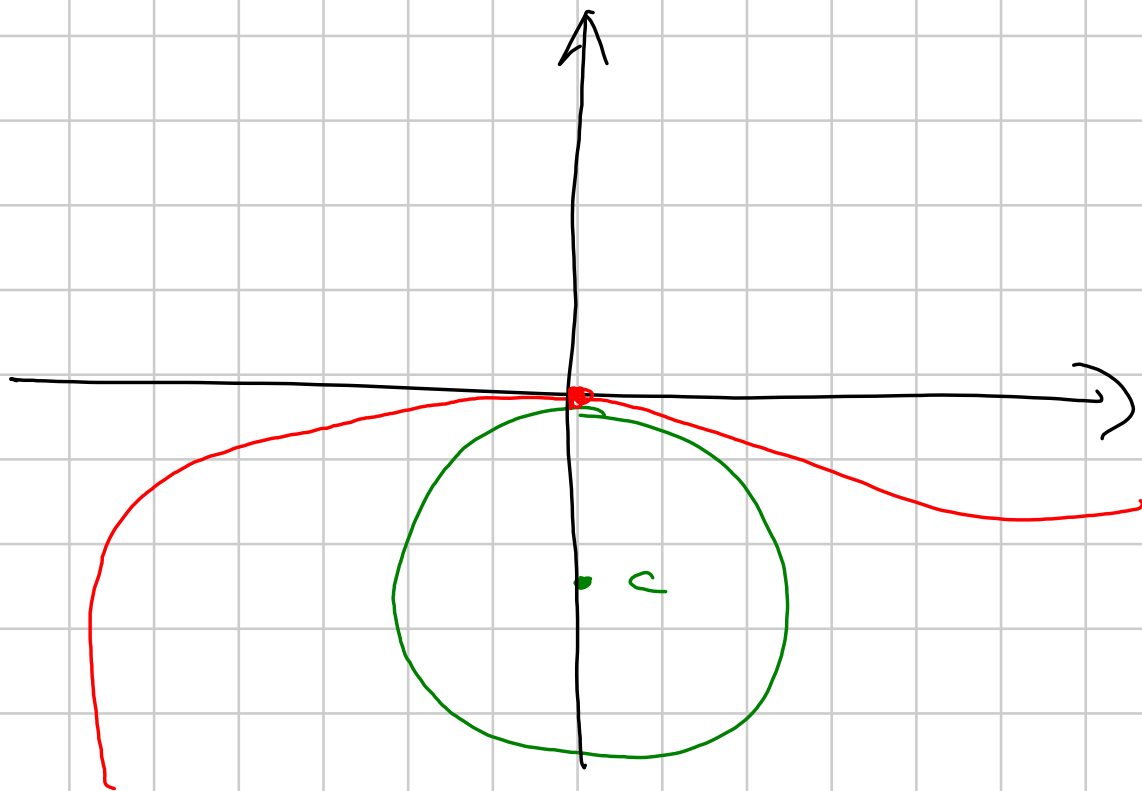
$$2 \langle v(t) | v'(t) \rangle = 0$$

Faccio le dimo per $n=2$.

Trovo gli assi supponendo $\alpha(t_0) = 0$.

Ruolo supponendo $\alpha'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per il fatto visto ho $\alpha''(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$.



Il centro della
circonf. osculatrice
 $\bar{c} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$.

Tesi: $c = \frac{4}{a}$

Tripla contatto:

$f(t)$ = distanza tra $\alpha(t)$ e la circonf.
osculatrice allora
 $f(t_0) = f'(t_0) = f''(t_0) = 0$.

$f(t)$ = distance tra $x(t)$ e il centro — il raggio

$$= \sqrt{x(t)^2 + (y(t) - c)^2} - |c| \quad \text{Nullo into:}$$

param per
steno pto ✓

$$f'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2xx' + 2(y-c) \cdot y'}{\sqrt{\quad}}$$

Nullo into:
stato taylor ✓

$$f''(t) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{\quad})^3} \left(\uparrow \right)^2 \leftarrow \text{nullo}$$
$$+ \frac{xx'' + x'^2 + (y-c)y'' + y'^2}{\sqrt{\quad}}$$

deve essere nullo into: ✓

$$\begin{array}{ccccccccc}
 X & \cdot & X'' & + & X' & + & (Y-c) & \cdot & Y'' & + & Y'^2 & = & 0 \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 0 & & 1 & & -c & & a & & 0 & & & &
 \end{array}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{c}.$$

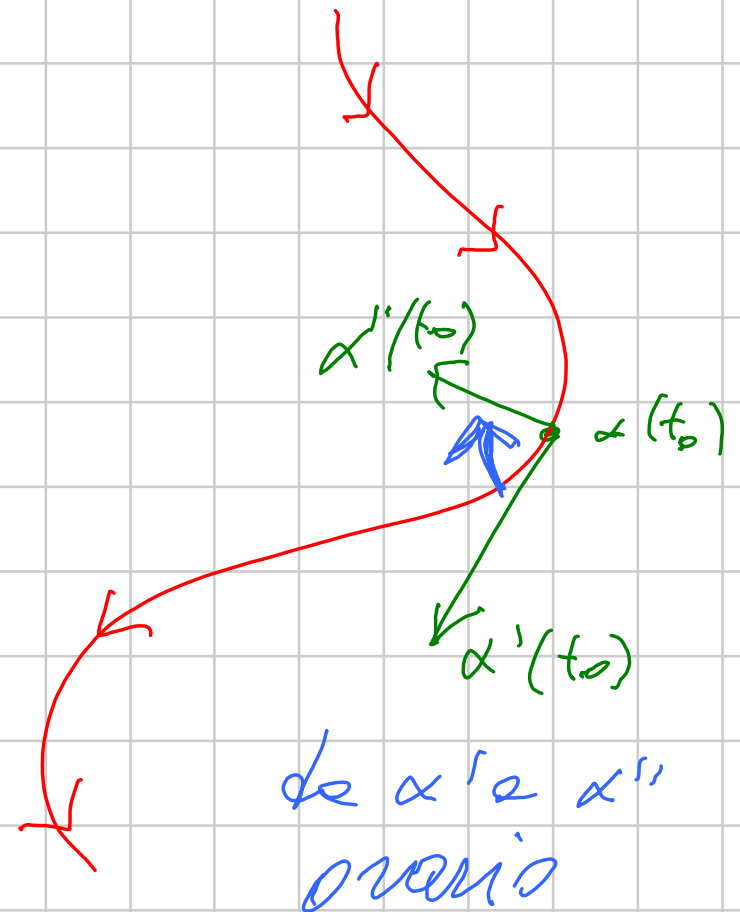
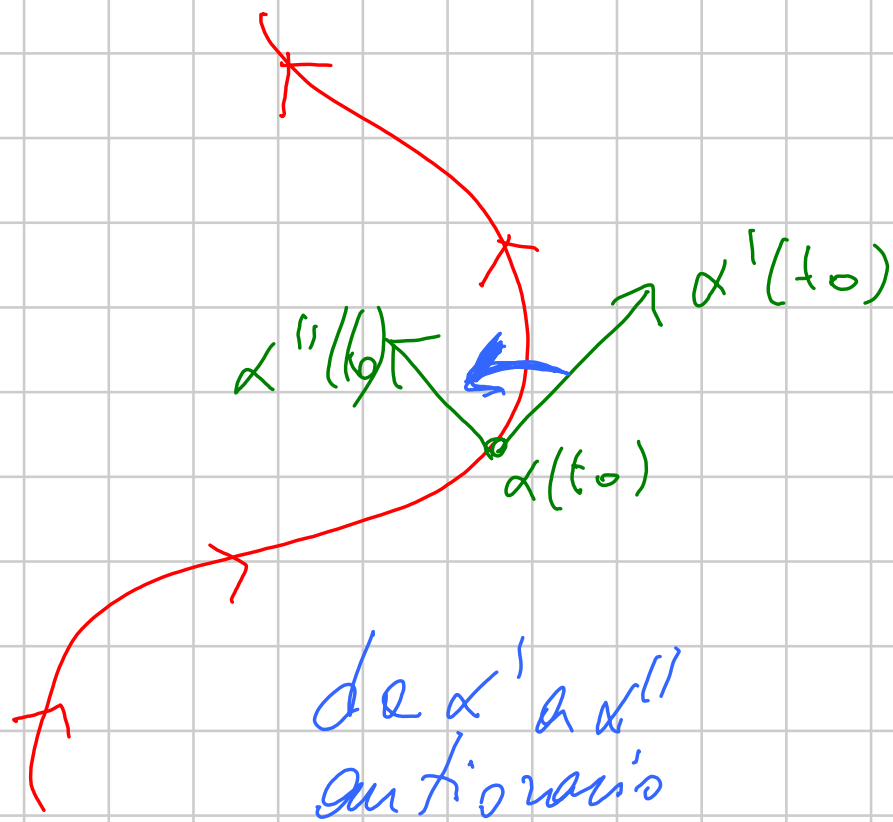


Come calcolarlo per una α qualsiasi?

Raffinamento: seguo curvatura (in $\mathbb{R}^2$)

se α è orientata, nel pto $\alpha(t_0)$
 attribuisco alla curvatura segu

+ se la curva è verso sinistra
 - - - - - destra:



Teo: per qualsiasi la curva con segno
nel pto $\alpha(t_0)$ $\bar{e}$

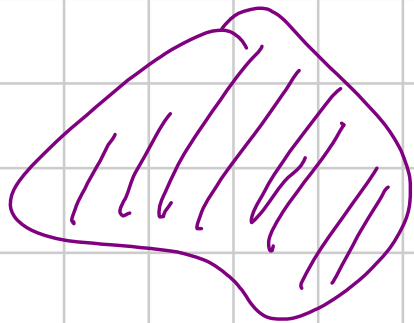
$$K(\alpha(t_0)) = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha'(t_0) & \alpha''(t_0) \end{pmatrix}}{\|\alpha'(t_0)\|^3}$$

————— 0 —————

Teo (Jordan): se $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\bar{e}$ curva semplice chiusa con immagine G

allora C_1 separa $\mathbb{R}^2$ in due porzioni
"connesse", una limitata, l'altra no -

("connesso" = un solo pezzo



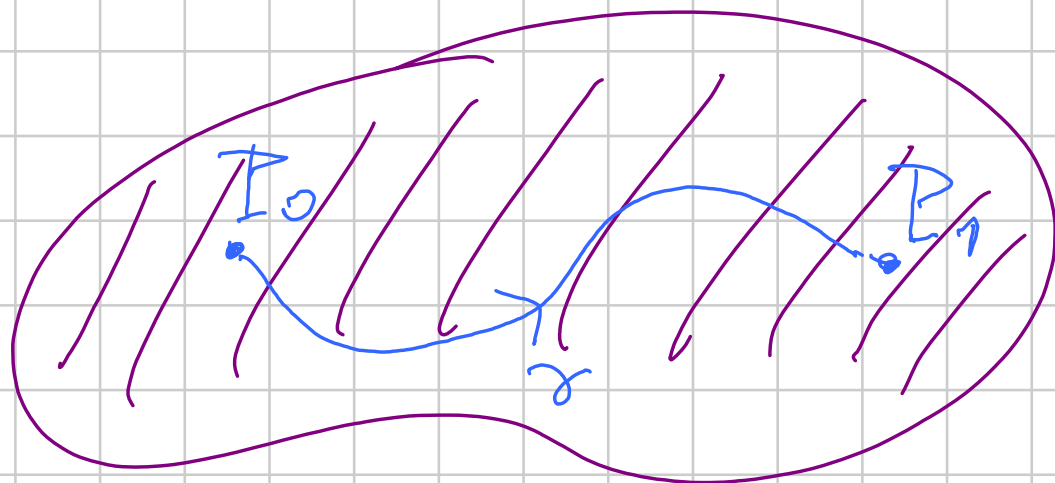
Sì



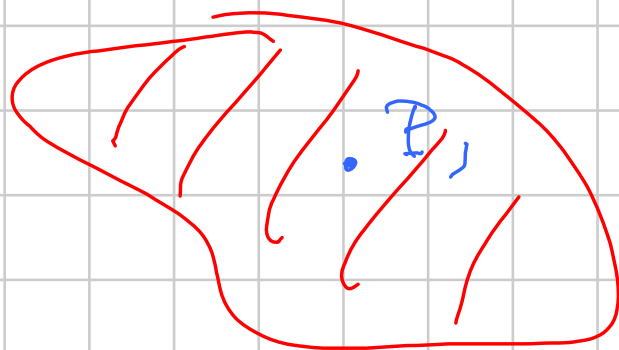
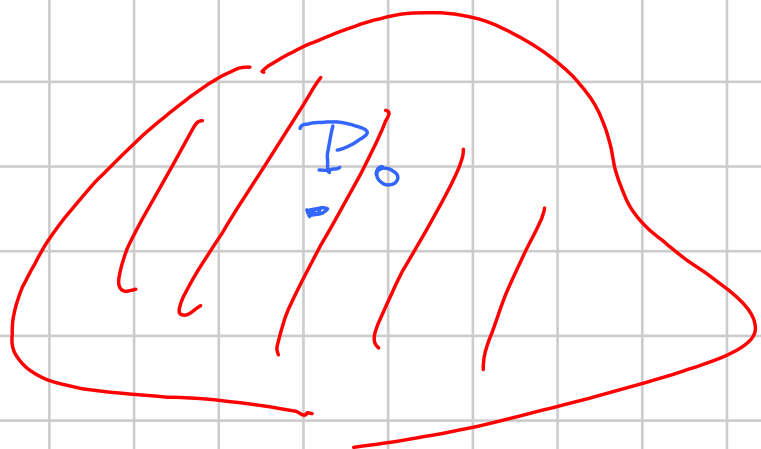
No

Formulato: Ω è connesso se $\forall P_0, P_1 \in \Omega$
esiste $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$ curva continua

t.c. $\gamma(0) = P_0$, $\gamma(1) = P_1$.

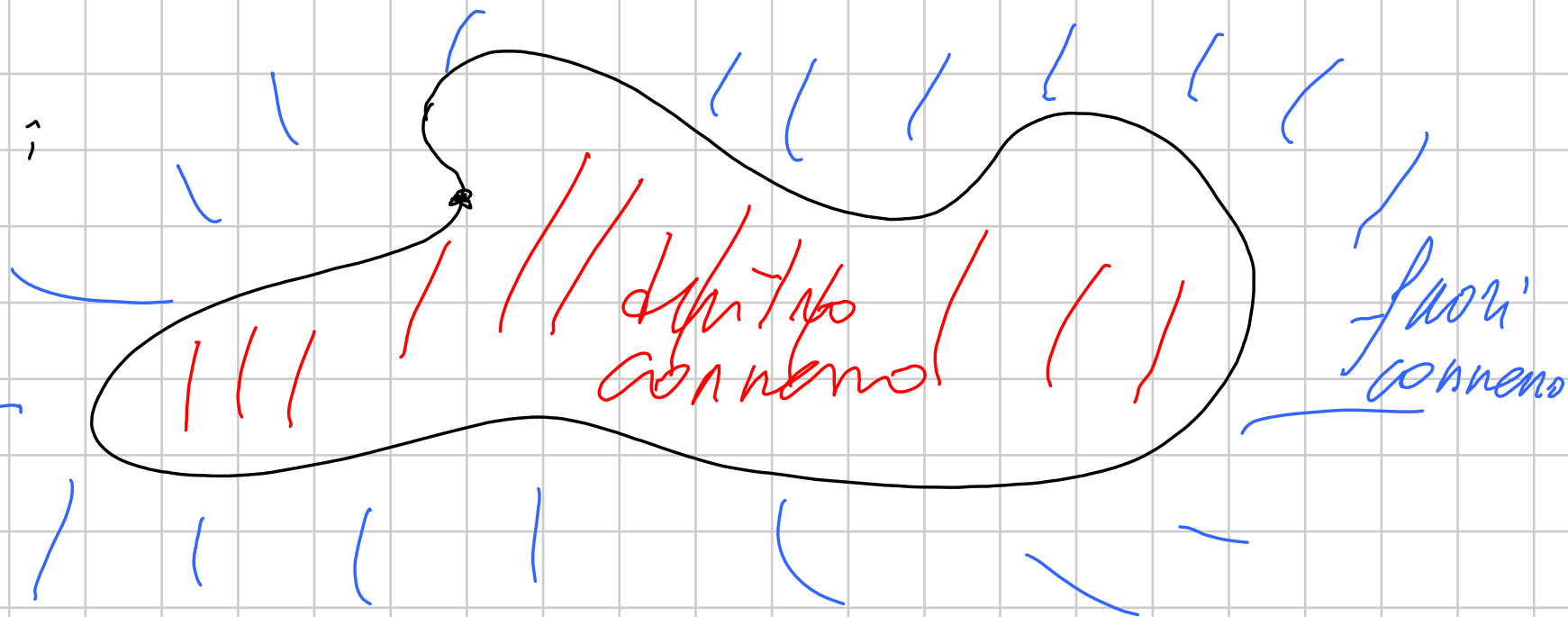


connected



non
connected

Jordan;



Intuitivo mas difficile,



Qss : il grafico di una funzione

$$y = Y(x)$$

$$Y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

oppure $x = X(y)$

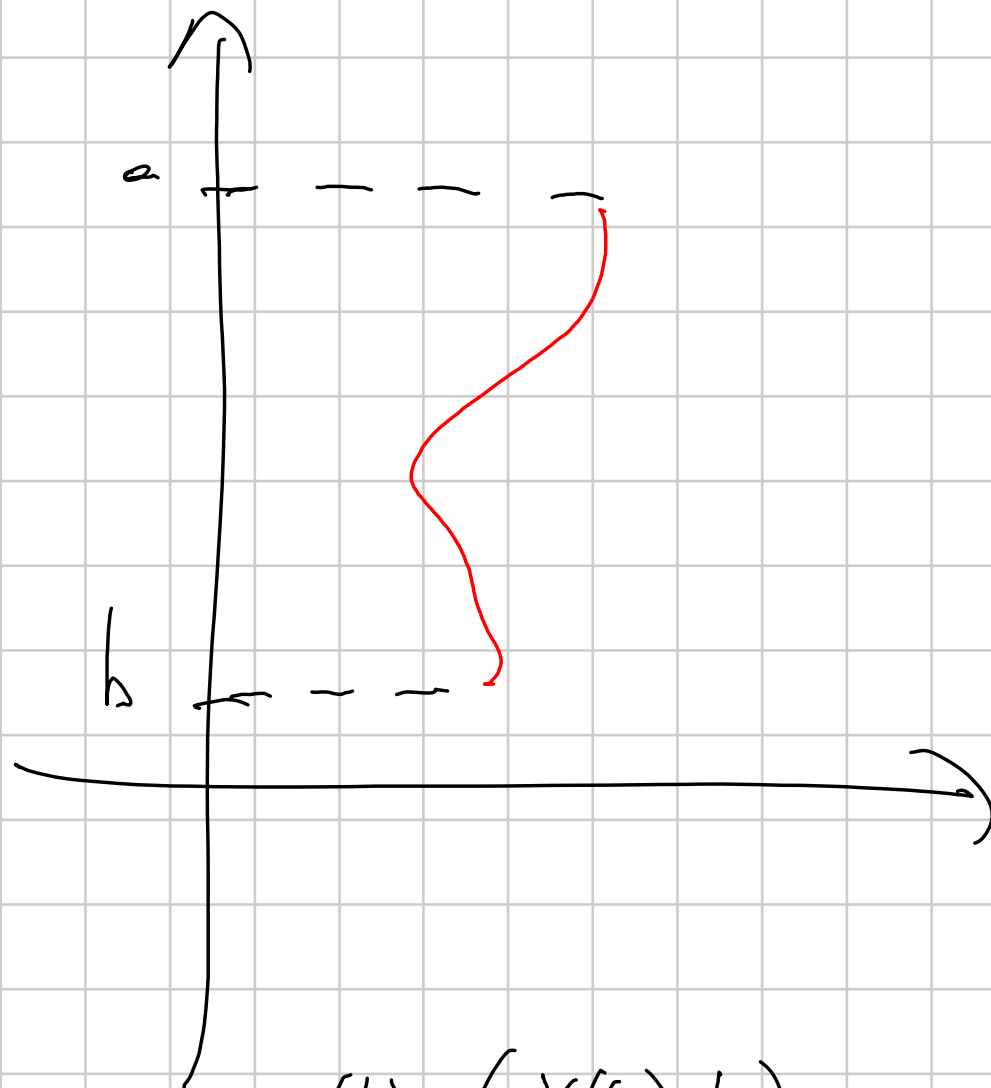
$$X: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

sono curve;



$$\alpha(t) = (t, \gamma(t))$$

$$\alpha'(t) = (1, \dots)$$

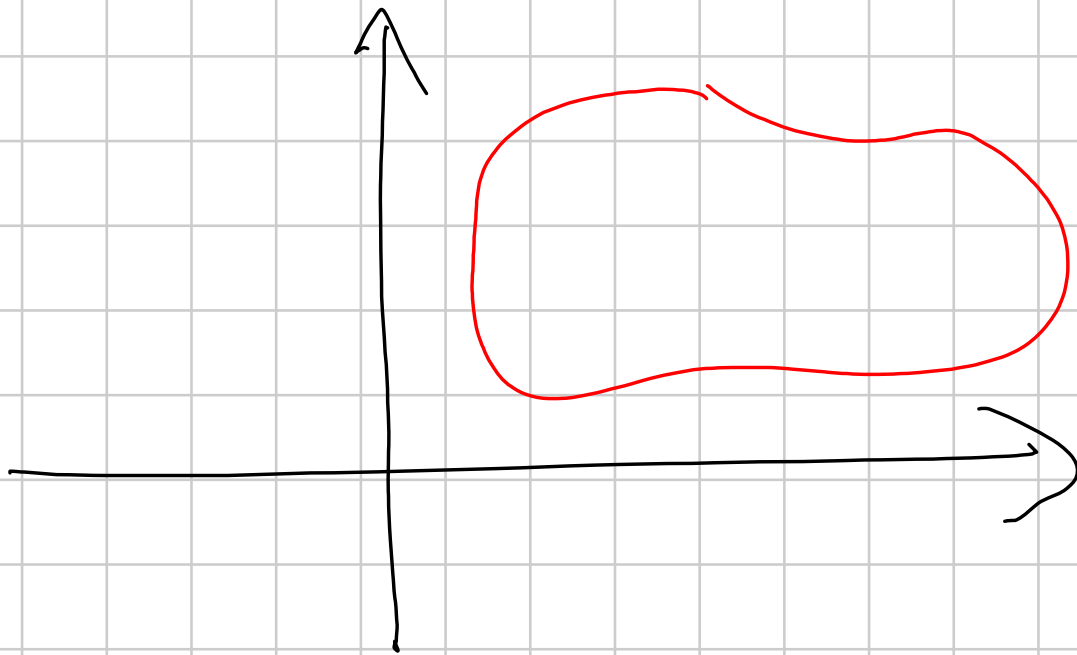


$$\beta(t) = (X(t), t)$$

$$\beta'(t) = (\dots, 1)$$

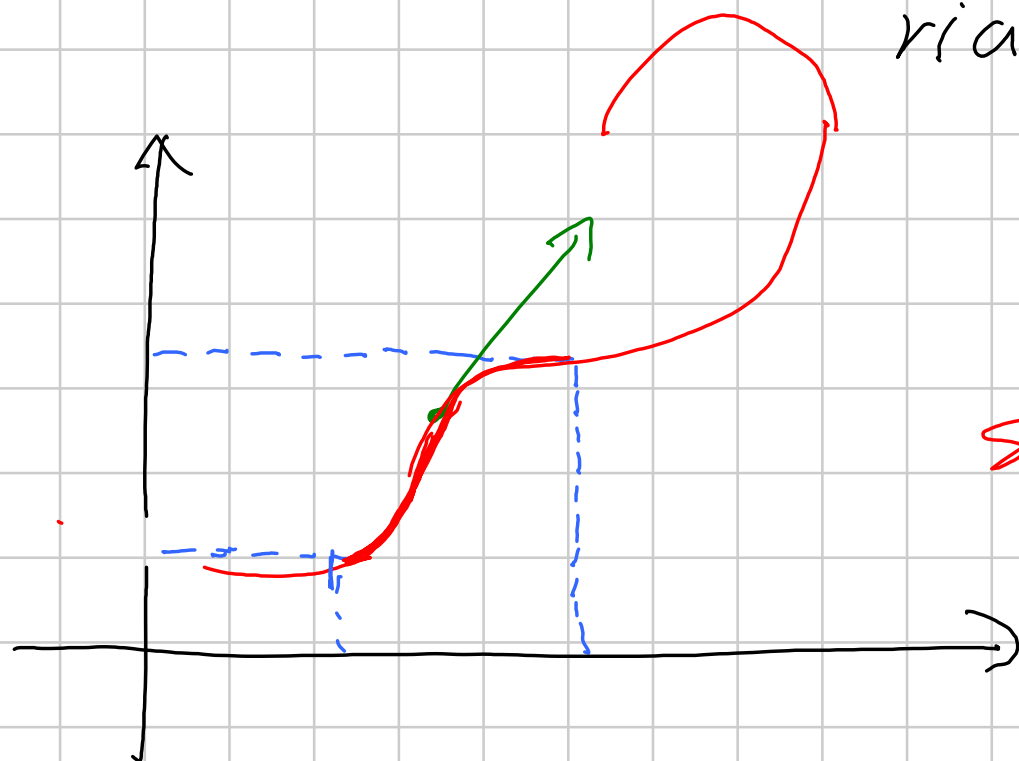
$\Rightarrow$ sono curve regolari.

Non tutte le curve sono profco:



Pero': ogni curva $\bar{c}$ "localmente" profco.
 $\uparrow$

risolvo a ogni suo punto locale



sic $y = Y(x)$ sic $x = X(y)$

