Geometria 10/3/16

9.1.8 $\quad A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \quad B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$

Provare che $\langle . | . \rangle_B$ è prod scal $\Longleftrightarrow$ $\langle . | . \rangle_A$ è prod scal.

- B simm $\Longleftrightarrow$ A simm

  Facile da $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$

- B def pos $\Longleftrightarrow$ A def. pos.

$$\langle x | x \rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (A \cdot x)_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i x_j$$

$$\langle x | x \rangle_A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & \cdots \boxed{x_j} \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ \boxed{x_i} \\ \vdots \\ x_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \boxed{a_{ij}} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\langle x | x \rangle_B = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i} \cdot x_i \cdot (-1)^{j} x_j$$

Posto $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$(Tx)_i = (-1)^i x_i$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Visto: $\langle x|x\rangle_B = \langle Tx|Tx\rangle_A$.

Siccome T è invertibile ($T^{-1} = T$) ho

$\langle x|x\rangle_B > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\langle x|x\rangle_A > 0 \quad \forall x \neq 0$.

9.1.9 $\quad v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n \qquad a_{ij} = \langle v_i|v_j\rangle_{\mathbb{R}^n}$

Quando accade che $\langle \cdot|\cdot\rangle_A$ è prod. scal.?

Simm: $a_{ji} = \langle v_j | v_i \rangle = \langle v_i | v_j \rangle = a_{ij}$ <u>Sempre</u>.

Def. pos: $\langle x | x \rangle_A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \langle v_i | v_j \rangle x_i x_j$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \right\rangle$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right\|_{\mathbb{R}^n}^2$$

È sempre ≥ 0 –

Def pos se l'unico $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\|\sum x_i v_i\|^2 = 0$ è $x = 0$, cioè se l'unico $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\sum x_i v_i = 0$ è $x = 0$, cioè se $v_1, \dots, v_m$ sono lin. indip.

o

Disuguaglianza di Bessel: (V su $\mathbb{R}$ con $\langle . | \rangle$)

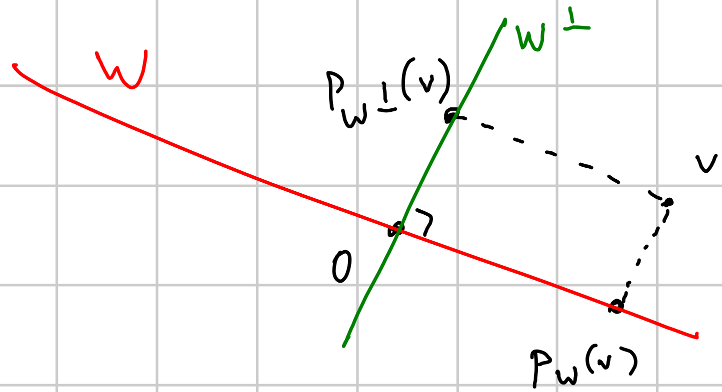
Prop: Se $w_1, \dots, w_k$ sono ortog. non nulli allora

$$\|v\|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{|\langle v | w_i \rangle|^2}{\|w_i\|^2}.$$

Dim. Se $W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$ ho $V = W \oplus W^\perp$

$\Rightarrow v = P_W(v) + P_{W^\perp}(v)$

$$\Rightarrow \|v\|^2 = \|P_W(v)\|^2 + \cancel{2\langle P_W(v) | P_{W^\perp}(v)\rangle} + \|P_{W^\perp}(v)\|^2$$



$$\leq \|P_W(v)\|^2$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i \right\|^2$$

= somma delle norme al quadrato + somma dei doppi prodotti scalari

tutti 0

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{|\langle v | w_i \rangle|^2}{\|w_i\|^4} \cdot \|w_i\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{|\langle v | w_i \rangle|^2}{\|w_i\|^2} . \qquad \blacksquare$$

———— o ————

(Anticipo di analisi in più variabili)

In una variabile:

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \qquad \text{derivata}$$

$$f''(x) = \text{derivata di } f'(x)$$

Taylor: $f(x+t) = f(x) + f'(x) \cdot t + \frac{1}{2} f''(x) \cdot t^2 + o(t^2)$

In più variabili:

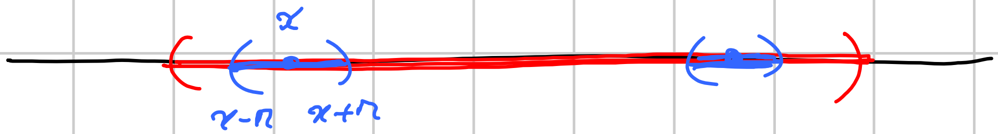
Prendo $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, cioè

$\forall x \in \Omega \quad \exists r > 0$ t.c.

$\{ y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r \}$ è contenuto in Ω

disco di centro x e raggio r

Per $n = 1$:



Per $n = 2$

Cioè: Ω è aperto se preso $x \in \Omega$ qualsiasi, ci si può spostare da x in ogni direzione almeno di poco restando dentro Ω

Derivata parziale:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_n) - f(x)}{t}$$

= derivata di f rispetto a x_j fatta considerando tutte le altre variabili come fisse.

Es: $f(x,y,z) = x^7 \cdot \cos(yz^3) \cdot e^{3x^5 z - 2xy^2 z^9}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 7x^6 \cdot \cos(yz^3) \cdot e^{3x^5 z - 2xy^2 z^9} +$$

$$+ x^7 \cdot \cos(yz^3) \cdot e^{3x^5 z - 2xy^2z^9}(15x^4 z - 2y^2 z^9)$$

Derivazione della funzione composta:

$n = 1$ $$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$n > 1$

$$\Omega \xrightarrow{f=(f_1,\dots,f_k)} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial g(f_1(x),\dots,f_k(x))}{\partial x_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

incremento di g rispetto alla sua i-esima coordinata

incremento della i-esima coord. di f rispetto a x_1

Per $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\Omega}} \to \mathbb{R}$ chiamo gradiente di f in x.

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

Per $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\Omega}} \to \mathbb{R}^k$ chiamo matrice jacobiana di f in x

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{i=1\dots k \\ j=1\dots n}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$$

<u>Prop:</u> $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$

$$J(g \circ f)(x) = (Jg)(f(x)) \cdot (Jf)(x)$$

prodotto
righe $\times$ colonne

Infatti:

$$\left(J(g \circ f)(x)\right)_{ij} = \frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(x)$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \underbrace{\frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(x))}_{Jg(f(x))_{il}} \cdot \underbrace{\frac{\partial f_l}{\partial x_j}(x)}_{(Jf(x))_{lj}} \qquad \blacksquare$$

Derivate seconde: $\displaystyle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x)$

Notazione: $\displaystyle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

$\underline{\text{Es}}$: $f(x,y) = x^3 \cdot y^2 \cdot \sin(x^4 \cdot e^{7y})$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 \cdot \sin(x^4e^{7y}) + x^3y^2\cos(x^4e^{7y}) \cdot 4x^3e^{7y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 2y \sin(x^4e^{7y}) + x^3y^2\cos(x^4e^{7y})\, x^4e^{7y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2\sin(.) + 3x^2y^2\cos(.) . 4x^3 +$$
$$+ 4 \cdot 6x^5y^2\cos(.)e^{7y} + 4x^6y^2 \cdot (-\sin(.)) \cdot 4x^3e^{14y}$$

...

__Es:__ $f(x,y) = x^2 \cdot y^3 e^{2x-y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x y^3 e^{2x-y} + x^2 y^3 2 e^{2x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 e^{2x-y} - x^2 y^3 e^{2x-y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \underbrace{6xy^2 e^{2x-y}}_{1} \underbrace{-2xy^3 e^{2x-y}}_{2} \underbrace{+6x^2y^2 e^{2x-y}}_{3} \underbrace{-2x^2y^3 e^{2x-y}}_{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \underbrace{6xy^2 e^{2x-y}}_{1} + \underbrace{6x^2y^2 e^{2x-y}}_{3} \underbrace{-2xy^3 e^{2x-y}}_{2} \underbrace{-2x^2y^3 e^{2x-y}}_{4}$$

__Teo__: se tutte le $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ esistono continue si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \forall i, j \, .$$

<u>D</u>ef: matrice hessiana di f

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1 \dots n}$$

Teo dice: Hf è simmetrica.

Taylor in più variabili:

$f : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, allora

$$f(x+v) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot v_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot v_i \cdot v_j + o(\|v\|^2)$$

(Spiegazione tra un attimo)

Riscrivo come:

$$f(x+v) = f(x) + \left\langle {}^t\mathrm{grad} f(x) \middle| v \right\rangle_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{2} \left\langle v \middle| v \right\rangle_{Hf(x)} + o(\|v\|^2)$$

In una variabile sappiamo:

- f ha min. loc. in $x \Rightarrow f'(x) = 0,\ f''(x) \geq 0$
- $f'(x) = 0,\ f''(x) > 0 \Rightarrow f$ ha min. loc. in x

In più variabili:

- f ha min. loc. in $x \Rightarrow \operatorname{grad} f(x) = 0$

  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{Hf(x)}$ è semidef. pos.

  (cioè $\langle v | v \rangle_{Hf(x)} \geq 0 \ \forall v$)

- $\operatorname{grad} f(x) = 0$, $\langle \cdot | \cdot \rangle_{Hf(x)}$ def. pos.

  $\Rightarrow f$ ha min. loc. in x

Q: come verificare queste condiz. su $Hf(x)$?

"Spiegaz." di Taylor in più var. usando 1 var:

$f(x+v)$. Fingo che v si muova su una

sola direzione, dunque $u = \frac{v}{\|v\|}$ sia fisso;

posto

$$g(t) = f(x + t \cdot u) \qquad \text{ho} \quad f(x+v) = g(\|v\|).$$

Ora

$$g(t) = g(0) + g'(0) \cdot t + \frac{1}{2} g''(0) \cdot t^2 + o(t^2)$$

$$g(t) = f(x + t_1 u_1 + \cdots + t_n u_n)$$

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x+tu)}{\partial x_i} \cdot u_i$$

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x+tu)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot u_i u_j$$

Sostituisco in $g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2} g''(0)\, t^2 + o(t^2)$

con $t = \|v\|$

$$f(x+v) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \underbrace{\|v\| \cdot u_i}_{\|v\| \cdot \frac{v_i}{\|v\|} = v_i}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot \underbrace{\|v\|^2 u_i u_j} + o(\|v\|^2)$$

$$\underbrace{\|v\| \cdot u_i}_{v_i} \cdot \underbrace{\|v\| \cdot u_j}_{v_j}$$

$$= f(x) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j + o(\|v\|^2).$$

In $\mathbb{R}^3$; P piano $\Rightarrow P^\perp$ retta

ℓ retta $\Rightarrow \ell^\perp$ piano

$P^{\perp\perp} = P \qquad \ell^{\perp\perp} = \ell$

(Tutto è passante per O)

$\Rightarrow$ l'ortogonalità dà una bigezione tra piani e rette.

Quindi:

eq. cart. per piano P:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : ax+by+cz=0 \right\}$$

cioè $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$

cioè $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^\perp = \left(\mathrm{Span}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)^\perp$

cioè $P^\perp = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

cioè eq. parametrica per la retta $P^\perp$

Eq. cart. di retta ℓ

$$\ell = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{array} \right\}$$

cioè $\ell = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$

$\Longrightarrow \ell = \left(\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \right)^\perp$

$\Longrightarrow \ell^\perp = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right)$

cioè : eq. param. del piano $\ell^\perp$

Questo spiego (prossima sett.) perché i passaggi

piano param $\longrightarrow$ piano cart

rett cart $\longrightarrow$ rette param

sono fatti allo stesso modo (con i det 2x2)