Geom 9/3/16

9.0.7 (b) + 9.0.8 ✓

9.1.1. $V = \mathbb{R}_{\leq 1}[t]$

$$f(p(t),q(t)) = 5\,(p(1)-2p(-2))\cdot(q(1)-2q(-2)) + 3\,(p(2)-7p(-1))(q(2)+7q(-1))$$

bilineare: fissato $q(t)$ è una combin. lin. di valutaz. di $p(t)$ in punti; stesso per $q(t)$. ✓

simmetrico: ✓

def. pos.: $f(p(t),p(t)) = 5(p(1)-2p(-2))^2 + 3(p(2)-7p(-1))^2$

sempre ≥ 0 ✓

nullo solo se $\begin{cases} p(1) - 2p(-2) = 0 \\ p(2) - 7p(-1) = 0 \end{cases}$

Se $p(t) = a_0 + a_1 t$ ho

$$\begin{cases} a_0 + a_1 - 2(a_0 - 2a_1) = 0 \\ a_0 + 2a_1 - 7(a_0 - a_1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -a_0 + 5a_1 = 0 \\ -6a_0 + 9a_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_0 = a_1 = 0$. ✓

(b) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

$f(x,y) = -x_2 y_1 - 2x_3 y_1 - 3x_1 y_1 - 3x_1 y_3 + 5x_1 y_2 + 5x_3 y_2$

bil: fissato x è lineare nelle coord di y e vic ✓

(è bil. anche su $\mathbb{R}^3$ ma non simm.)

simm su V: $x_2 = x_1 + x_3$ su V ho

$f(x,y) = -(x_1 + x_3)y_1 - 2x_3 y_1 - 3x_1 y_1 - 3x_1 y_3 + 5x_1(y_1 + y_3)$

$+5x_3(y_1+y_3)$

$= x_1y_1 + 5x_3y_3 + 2x_3y_1 + 2x_1y_3$ ✓

def. pos: $f(x,x) = x_1^2 + 4x_1x_3 + 5x_3^2 = (x_1+2x_3)^2 + x_3^2$

dunque $f(x,x) \geq 0$

nulla solo se $\begin{matrix} x_1+2x_3=0 \\ x_3=0 \end{matrix}$ cioè $x=0$.

✓

9.1.2 $C^0([0,1],\mathbb{R})$

$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt$

$S(t) = \sin(2\pi t)$ $\quad C(t) = \cos(2\pi t)$

$\langle S|C\rangle = \int_0^1 \sin(2\pi t)\cdot\cos(2\pi t)\,dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(4\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4\pi}\cdot\cos(4\pi t)\right)\Big|_0^1 = 0$$

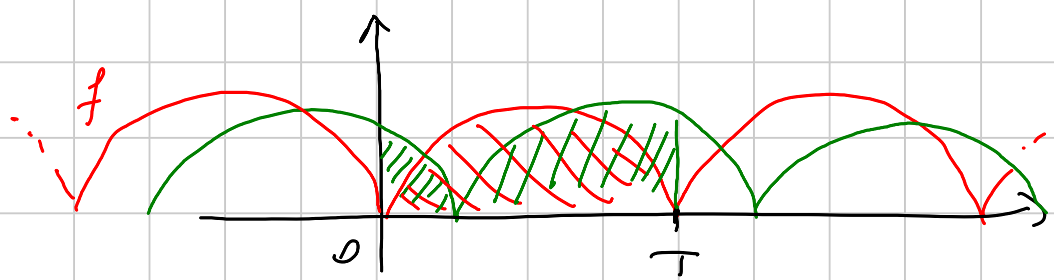
$$\|S\|^2 = \int_0^1 \sin^2(2\pi t)\,dt$$

$$\|C\|^2 = \int_0^1 \cos^2(2\pi t)\,dt$$

S, C periodiche di periodo 1 una ottenuta dall'altra per traslazione di $\frac{1}{4}$

Per due funzioni f di periodo T

$$g(t) = g(t+t_0)$$



$$\Rightarrow \int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_b^{b+T} g(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \|S\|^2 = \|C\|^2$$

$$2\|S\|^2 = 2\|C\|^2 = \|S\|^2 + \|C\|^2 = \int_0^1 \sin^2(2\pi t)\,dt + \int_0^1 \cos^2(2\pi t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)\right) dt = \int_0^1 1 = 1$$

$$\Rightarrow \|S\| = \|C\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

9.14 (a) $\mathbb{R}^2$ $\quad 7x_1y_2 + 8y_1y_2 - 5x_2y_1$ $\quad$ non bil

(b) $\mathbb{R}^2$ $\quad \underline{-3x_1y_1} + 2x_1y_2 + 8x_2y_1 + \underline{7x_2y_2}$ $\quad$ bil, non simm

(c) $7x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - 4x_2y_2$ $\quad$ bil, simm, non def pos $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

(d) $3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$ $\quad$ bil, simm $\quad \begin{pmatrix}3 & 4\\4 & 5\end{pmatrix}$

non def pos

$3x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$ $\quad$ nullo su $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

su $\begin{pmatrix}1+\varepsilon\\-1\end{pmatrix}$ fa $\quad 3 + 6\varepsilon + 3\varepsilon^2 - 8 - 8\varepsilon + 5 = 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon$

negativo per $0 < \varepsilon \ll 1$

(e) $4x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$ $\quad$ bil, simm

$\begin{pmatrix}4 & -3\\-3 & 5\end{pmatrix}$ $\quad$ def pos

$$4x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2=\left(2x_1-\frac{3}{2}x_2\right)^2+\frac{11}{4}x_2^2$$

sempre ≥ 0 ; nullo solo per $x=0$.

9.1.6. (a) $V=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ $\quad f(A,B)=\sum_{i,j=1}^{2}\left(1+(-2)^{i+j}\right)(AB)_{ij}$

bil: fissato B rispetto ad A ho:

- molt. a sx per B (<u>lin</u>)
- estrazione di alcuni coeff (<u>lin</u>)
- comb. lin. di tali coeff

$\Longrightarrow$ ✓

viceversa: analogo.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$f(A,B) = \sum_{i,j=1}^{2} \left(1+(-2)^{i+j}\right)(A\cdot B)_{ij}$$

non simm.: scrivo f esplicitamente

$$f(A,B) = 5\cdot(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) - 7(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})$$
$$- 7\cdot(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) + 17(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})$$

No

(b) $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$

$$f(p(t),q(t)) = p(1)\cdot q'(-1) + q(1)\cdot p'(-1)$$

bil: fissato q ho:

— valutazione di p in 1 (lin)

— derivazione (lin)

— valutazione di p' in -1 (lin)

– comb lin. di tali valori

viceversa analogo ✓

simm ✓

def pos? $f(p(t),p(t)) = 2\,p(1)\cdot p'(-1)$

nullo per $p(t) = 1$

negativo per $p(t) = -t+2$

V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con $\langle\cdot|\cdot\rangle$

Provato: se $\dim V < +\infty$ un sistema di vett. ortog. non nulli si completa a una base ortog (in part: esistono basi ortog).

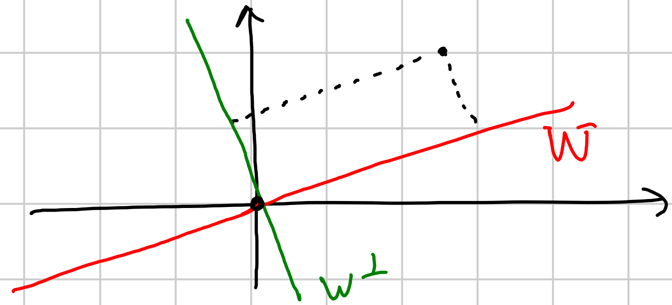
Def: se $S \subset V$

$$S^\perp = \{ v \in V : \langle v | s \rangle = 0 \quad \forall s \in S \}.$$

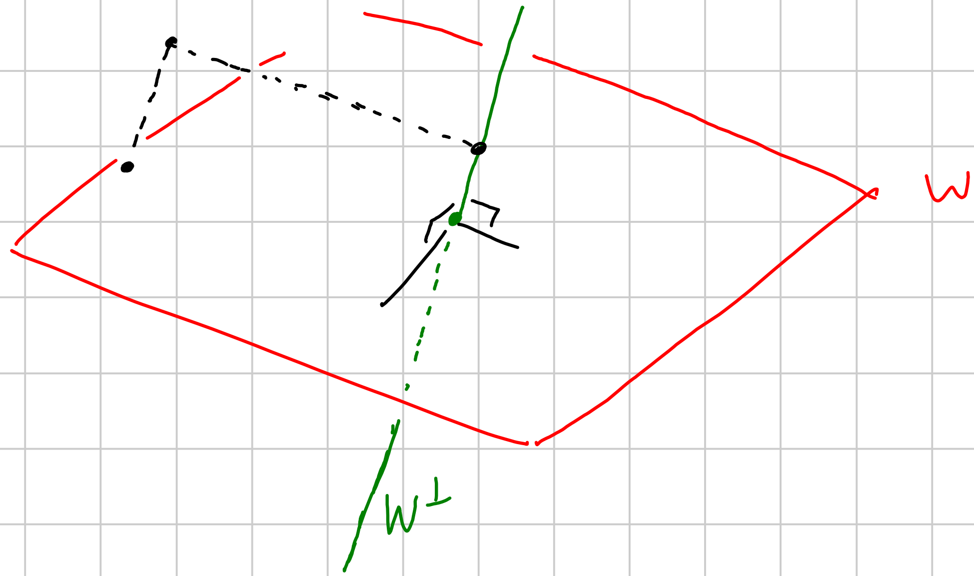
Oss: $S^\perp$ è stspazio.

Prop: Se $W \subset V$ è stsp. e $\dim V < +\infty$
allora $V = W \oplus W^\perp$. Inoltre $W^{\perp\perp} = W$.

Es:



Es:



<u>Dim</u>: $\circledast$ sia $w_1, \dots, w_k$ base ortogonale di W;
posso completarla a una base $w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n$
base ortogonale di V. Pongo $Z = \mathrm{Span}(w_{k+1}, \dots, w_n)$.

⊛ Verifico che $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ (qui **non** uso $\dim V < +\infty$)

Se $w \in W \cap W^{\perp}$ ho

$$\|w\|^2 = \langle \underset{W^{\perp}}{\underset{\cap}{w}} \mid \underset{W}{\underset{\cap}{w}} \rangle = 0 \Rightarrow w = 0 .$$

Noto che per $j > k$ e $i \leq k$ ho

$$\langle w_j \mid w_i \rangle = 0$$

$\Rightarrow w_j \perp w_1, \dots, w_k$

$\Rightarrow w_j \perp W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$

$\Rightarrow w_j \in W^{\perp}$

$\Rightarrow Z \subset W^{\perp}$

Ora ho $V = W \oplus Z$; per Grassmann, se fosse $W^\perp \supsetneqq Z$ avrei $W \cap W^\perp \neq \{0\}$: falso.

Ho provato che $W^\perp = Z \Longrightarrow V = W \oplus W^\perp$.

Provo ora che $W^{\perp\perp} = W$. Infatti:

$$\langle z | w \rangle = 0 \quad \forall z \in W^\perp \ \forall w \in W$$

$\Longrightarrow \forall w \in W$ ho $w \in W^{\perp\perp}$

$\Longrightarrow W \subset W^{\perp\perp}$.

Ora può

$$\underset{n}{V} = \underset{k}{W} \oplus \underset{n-k}{W^\perp}$$

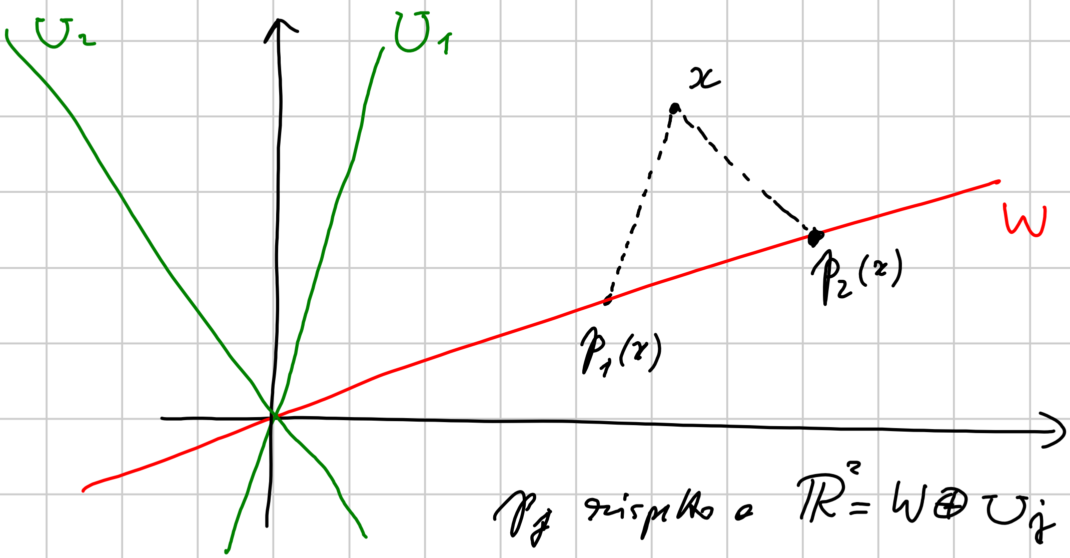
$$\underset{n}{V} = \underset{n-k}{W^\perp} \oplus \underset{k}{W^{\perp\perp}}$$

Ho provato che $W \subset W^{\perp\perp}$ e hanno la stessa dimensione k $\Longrightarrow$ sono uguali. $\blacksquare$

Def: la proiezione su W associata alla decomposizione $V = W \oplus W^\perp$ è detta proiezione ortogonale su W.

Oss: Per decomposizioni qualsiasi $V = W \oplus U$

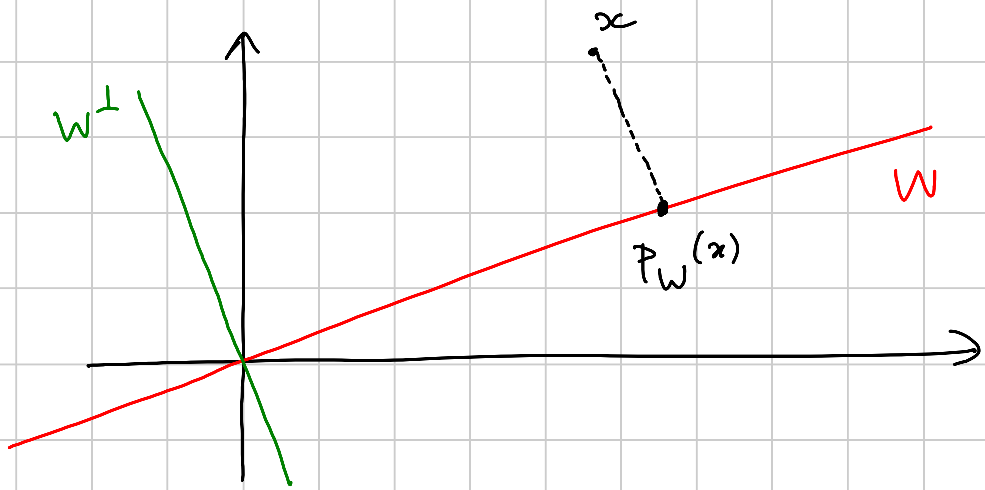
La proiez. su W dipende anche da U:



p_j rispetto a $\mathbb{R}^2 = W \oplus U_j$

Invece per $V = W \oplus W^\perp$ uso solo W

($\Rightarrow$ dipende solo da W).



Prop: Se $w_1, \dots, w_k$ è una base ortog. di W ho

$$P_W(v) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j$$

Dim: Se completo a $w_1, \dots, w_n$ base ortog. di V ho

$$v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j}_{\in W} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j}_{\in W^{\perp}}$$

$\Longrightarrow$ il primo addendo è $P_W(v)$. $\blacksquare$

<u>Es</u>: $W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

base ortog

$$P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{3x+y+7z}{59} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{2x+y-z}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$
= \frac{1}{59\cdot 6}\begin{pmatrix} (54+236)x + (18+118)y + (126-118)z \\ (18+118)x + (6+59)y + (42-59)z \\ (126-118)x + (42-59)y + (49\cdot 6+6\cdot 59)z \end{pmatrix}
$$

$$
= \underbrace{\frac{1}{59\cdot 6}\begin{pmatrix} * & 136 & 8 \\ 136 & * & -17 \\ 8 & -17 & * \end{pmatrix}}_{\text{matrice simmetrica}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$