

Geom 7/4/16

1-var : $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R} \quad x \in (a,b)$

* x min loc $\Rightarrow f'(x) = 0, f''(x) \geq 0$

* $f'(x) = 0, \underline{f''(x) > 0} \Rightarrow x$ min loc

n-var

$$f(x+h) = f(x) + \langle \text{grad}(f)|_x, h \rangle + \frac{1}{2} \langle h | h \rangle_{H(f)_x} + o(\|h\|)$$

Grazie al teo. spettrale ($H(f)_x$ simm), a meno di un cambio di coordinate isometrico posso

supponiamo $\langle h | h \rangle_{H(f)_x} = \lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autoval. di $H(f)_x$ -

$$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot h_n + \\ + \lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2 + o(\|h\|^2)$$

* x min loc $\Rightarrow \text{grad}(f)_x = 0$ e $H(f)_x$ ha
autoval ≥ 0

* $\text{grad}(f)_x = 0$ e $H(f)_x$ ha autoval > 0
allora x è min loc.

Oss: per i segni degli autoval. si può
usare il criterio dei segni di d_j

Versione complessa del 1^o spettro

Def: $U \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ si dice unitaria se

- conservare $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$ ($\langle Uz | Uw \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle z | w \rangle_{\mathbb{C}^n}$)
- $U^* \cdot U = I_n$ (cioè $\exists U^{-1}$ e $U^{-1} = U^*$) $\forall z, w$
- le colonne di U sono una base ortogonale di $\mathbb{C}^n$

(fatti equivalenti): anologo su $\mathbb{C}$ di "ortogonale"

Def: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ si dice normale se

$$A^* \cdot A = A \cdot A^*$$

$$\underline{\text{Es:}} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ i & 2+i \end{pmatrix}$$

$$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1+i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ i & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ i & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1+i & 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A$ non è normale -

Es: sono normali:

- reali simmetriche $(A^* = {}^t A = A \Rightarrow A^* \cdot A = A \cdot A^* = A^2)$
- reali ortogonali $(A^* = {}^t A = A^{-1})$

$$\Rightarrow A^* \cdot A = A \cdot A^* = I_n)$$

• reali antisimmetriche $(A^* = {}^t A = -A$
 $\Rightarrow A^* \cdot A = A \cdot A^* = -A^2)$

• hermitiane $(A^* = A \Rightarrow A^* \cdot A = A \cdot A^* = A^2)$

• unitarie $(A^* = A^{-1} \Rightarrow A^* \cdot A = A \cdot A^* = I_n)$

• antihermitiane $(A^* = -A \Rightarrow A^* A = A \cdot A^* = -A^2)$

(ce ne sono altre) -

Teo: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$

normale $\Leftrightarrow$ si diagonalizza tramite unitarie

$$(cio\grave{e} \exists U \text{ t.c. } U^* = U^{-1} \text{ e } U^* \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix})$$

(cio\grave{e} esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ fatta da autovettori di A).

Dim:  (poco intuitivo)

$$U^* \cdot A \cdot U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = U \cdot D \cdot U^* \quad , \quad A^* = U \cdot \overline{D} \cdot U^*$$

$$A^* \cdot A = U \cdot \overline{D} \cdot \underbrace{U^* \cdot U}_{I_n} \cdot D \cdot U^* = U \cdot \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} \cdot U^*$$

$$A \cdot A^* = U \cdot D \cdot \underbrace{U^* \cdot U}_{I_n} \cdot \overline{D} \cdot U^* = U \cdot \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} \cdot U^* \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Prendo $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ autovalore di A e v_1 autovettore relativo; posso prendere $\|v_1\| = 1$.

Completando v_1 a base ortonormale $(v_1, w_2, \dots, w_n) = U_1$ di $\mathbb{C}^n$ ($\Rightarrow U_1$ unitaria) -

Per costruzione $B_1 = U_1^* \cdot A \cdot U_1 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right)$.

Affermo che B_1 è normale: $B_1^* = U_1^* \cdot A^* \cdot U_1$

$$B_1^* \cdot B_1 = U_1^* A^* \underbrace{U_1 U_1^*}_{I_n} A \cdot U_1 = U_1^* \underbrace{A^* A}_{I_n} U_1$$

$$B_1 \cdot B_1^* = U_1^* A \underbrace{U_1 U_1^*}_{I_n} A^* U_1 = U_1^* \underbrace{A A^*}_{I_n} U_1 \quad \checkmark$$

Ora:

$\pm n$

$$B_1^* B_1 = B_1 \cdot B_1^* \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline b^* & A_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ b^* & A_1^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \dots \\ \dots & b^* b + A_1^* A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 + \|b\|_{\mathbb{C}^{n-1}}^2 & \dots \\ \dots & A_1 A_1^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b=0, A_1 \text{ normale}$$

$$\Rightarrow U_1^* \cdot A \cdot U_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

con A_1 normale $(n-1) \times (n-1)$

condotto per induzione -



Casi particolari:

Prop: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$

A hermitiana $\Leftrightarrow$ si diagonalizza tramite
unitarie e ha autov. reali.

Dim: $\Leftarrow$ (poco interessante — esercizio)

$\Rightarrow$ A hermitiana $\Rightarrow$ normale
 $\Rightarrow$ diago. via unitaria -

Resta: autov. reali - (Come per simm.)

Prendo $\lambda \in \mathbb{C}$ autovel., $v \in \mathbb{C}^n$ autovel. $\neq 0$

$$\langle Av | v \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \lambda v | v \rangle_{\mathbb{C}^n} = \lambda \cdot \|v\|_{\mathbb{C}^n}^2$$

"

$$\langle v | Av \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle v | \lambda v \rangle_{\mathbb{C}^n} = \bar{\lambda} \cdot \|v\|_{\mathbb{C}^n}^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \quad \square$$

Prop: A unitaria $\Leftrightarrow$ si diagonalizza via unitarie
e ha autovel. con modulo 1.

Dim: ⇐ (poco interessante — facile).

Suppongo: $\exists U$ t.c. $U^* = U^{-1}$ e $U^* A U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = D$

$$D^* \cdot D = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\alpha_n|^2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{con } |\alpha_j|=1}{=} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

$\Rightarrow D$ unitaria.

Quello $A = U \cdot D \cdot U^*$ prodotto di unitarie
 $\Rightarrow A$ unitaria

$\Rightarrow$ Basta vedere che $\lambda \in \mathbb{C}$ autovel. di A unitaria ha modulo 1. Sia v autovel. $\neq 0$

$$\underbrace{\langle Av | Av \rangle}_{\|v\|^2} \stackrel{C^n}{=} \|Av\|_{C^n}^2 = \|\lambda v\|_{C^n}^2 = |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2$$

$$\Rightarrow |\lambda| = 1. \quad \square$$

Prop: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$

A antihermitiana $\iff$ diagonale numerica e
ha tutti autovel
immaginari puri.

Din: $\Leftarrow$: facile

$\Rightarrow$: $\lambda \in \mathbb{C}$ autovel : devo vedere $\lambda \in i\mathbb{R}$

Prendo $v \in \mathbb{C}^n$ autovel $\neq 0$

$$\langle Av | v \rangle = \langle \lambda v | v \rangle = \lambda \cdot \|v\|^2$$

$$\overset{''}{\langle v | A^* v \rangle} = \langle v | -Av \rangle = \langle v | -\lambda v \rangle = -\bar{\lambda} \cdot \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \underline{\bar{I} = -I} \quad \text{cioè } I \in i \cdot \mathbb{R}. \quad \square$$

Q: per quali $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ hermitiane
 si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.?

Come nel caso reale si vede che:

Teo: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ def. pos.

$\iff$ tutti gli autoval di A sono > 0

$\iff d_j > 0 \quad j = 1 \dots n$

$$d_j = \det(A_j) \quad , \quad A = \left(\underbrace{A_j}_{j} \right)_{i=1}^n$$

