Geom 6/4/16

Finora: criterio generale per vedere se una $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile (può esserlo o no) — qualsiasi

Ora: matrici particolari sono diag. (in modo particolare).

Teo (spettrale): $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica

$\Longrightarrow$ A si diagonalizza tramite una matrice ortogonale, cioè $\exists M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ortogonale (ovvero ${}^tM \cdot M = I_n$, ovvero le colonne sono base ortonormale)

t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

cioè esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di A (le colonne di B).

Oss: vale anche "$\Longleftarrow$"; infatti

se $M^{-1} \cdot A \cdot M = D$ (diag), M ortog

$\Longrightarrow A = M \cdot D \cdot M^{-1} = M \cdot D \cdot {}^tM$

$\Longrightarrow {}^tA = {}^t({}^tM) \cdot {}^tD \cdot {}^tM = M \cdot D \cdot {}^tM$

$\Longrightarrow {}^tA = A$.

Per viceversa:

Lem: Se A è reale simm e $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore, allora $\lambda \in \mathbb{R}$.

__Dim__: $\exists v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$ t.c. $A \cdot v = \lambda \cdot v$. Ora:

$$\langle v | A \cdot v \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle v | \lambda \cdot v \rangle_{\mathbb{C}^n} = \overline{\lambda} \cdot \langle v | v \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\lambda} \cdot \|v\|^2_{\mathbb{C}^n}$$

$$\overline{{}^t(A \cdot v)} \cdot v = {}^t\overline{v} \cdot {}^t\overline{A} \cdot v = {}^t\overline{v} \cdot A \cdot v$$

$${}^t\overline{A} = {}^t A = A$$

$$= \langle A \cdot v | v \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$= \langle \lambda \cdot v | v \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$= \lambda \cdot \|v\|^2_{\mathbb{C}^n}$$

$$v \neq 0 \Rightarrow \|v\|_{\mathbb{C}^n} \neq 0 \Rightarrow \overline{\lambda} = \lambda.$$

$\blacksquare$

Dim (Teo): Hp A simmetrica.

Devo trovare $v_1, \dots, v_n$ base ortonormale che la diagonalizza.

Prendo $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ autovalore di A (ne basta uno solo).

Sia $v_1 \in \mathbb{R}^n$ autovettore; posso supporre $\|v_1\| = 1$.

Lo completo a una base $(v_1, w_2, \dots, w_n) = M_1$ ortonormale, quindi M_1 è ortogonale. Per costruz. ho

$$B_1 = M_1^{-1} \cdot A \cdot M_1 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right).$$

Ora ${}^{t}B_1 = {}^{t}(M_1^{-1} \cdot A \cdot M_1) = {}^{t}({}^{t}M_1 \cdot A \cdot M_1)$

$= {}^{t}M_1 \cdot {}^{t}A \cdot {}^{t}({}^{t}M_1) = {}^{t}M_1 \cdot A \cdot M_1 = M_1^{-1} \cdot A \cdot M_1$

$\Rightarrow B_1$ è simmetrica $\Rightarrow b = 0$ e ${}^{t}A_1 = A_1$.

$\Rightarrow M_1^{-1} \cdot A \cdot M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ con A_1 simm

Mi sono ridotto a $A_1 \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$ simmetrica - Per induzione (passo base ok)

trovo $M_2 \in M_{(n-1)\times(n-1)}$ ortog t.c.

$$M_2^{-1} \cdot A_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_2^{-1} \end{pmatrix} M_1^{-1}}_{M^{-1}} \cdot A \cdot \underbrace{M_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}}_{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $M = (v_1, \dots, v_n)$ è la matrice ortog che diagonalizza A. $\blacksquare$

Dimostra geometricamente e analiticamente che ogni $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simm. ha almeno due autovalori reali.

<u>Ricordo</u>: $\underbrace{f : [a,b]}_{}\longrightarrow \mathbb{R}$ continua ha max e min

insieme limitato e chiuso (un punto arbitrariamente vicino a lui gli appartiene)

<u>Fatto</u>: se $X \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso e limitato (c.s.)
e $f : X \to \mathbb{R}$ è continua, allora f ha max e min.

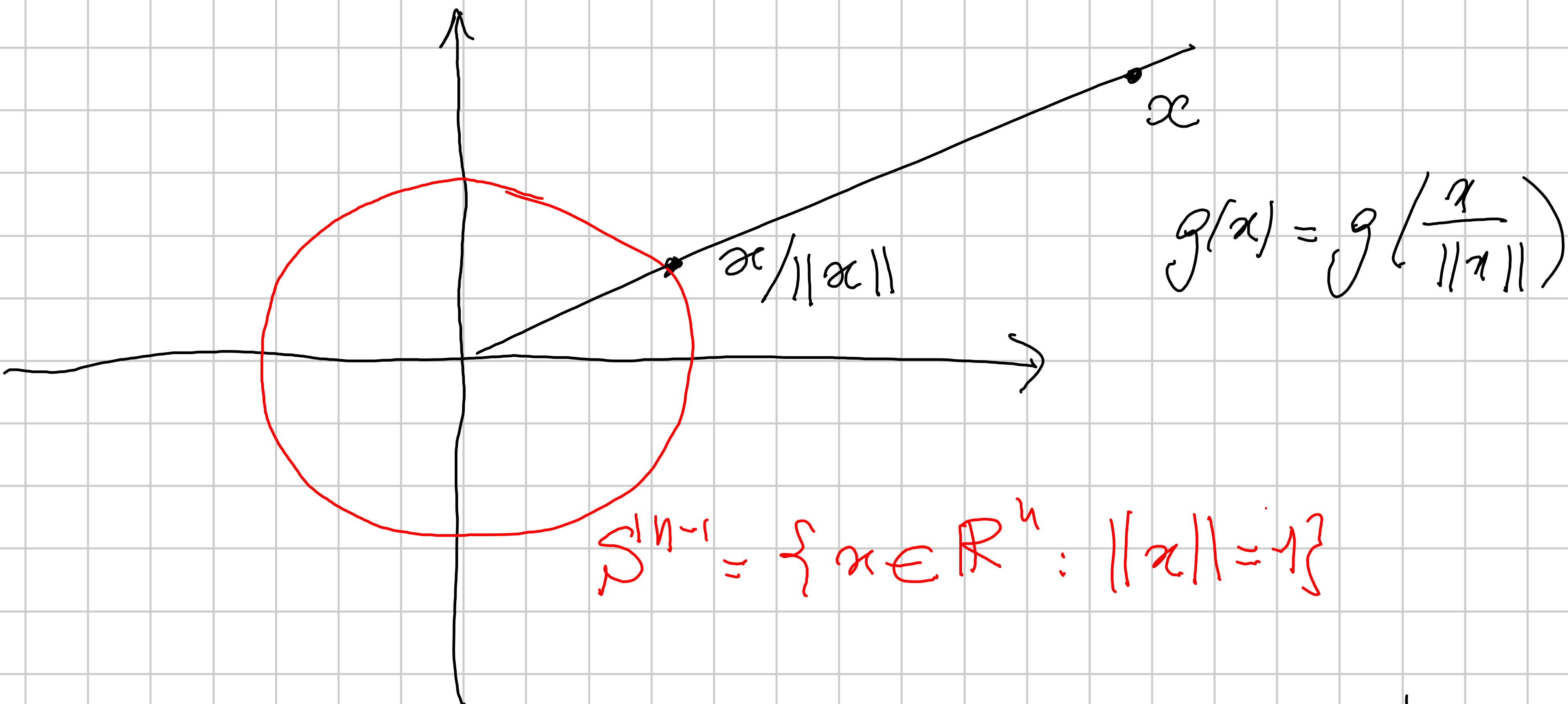
<u>Prop</u>: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simm. ha almeno 2 autoval. reali.

<u>Dim</u>: considero $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{\langle x | x \rangle_A}{\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n}}.$$

Noto che

$$g(k \cdot x) = \frac{\langle k \cdot x \mid kx \rangle_A}{\langle kx \mid kx \rangle_{\mathbb{R}^n}} = \frac{k^2}{k^2} \cdot g(x) = g(x).$$



$\Rightarrow$ g assume gli stessi valori di $f = g|_{S^{n-1}}$.

Ora S^{n-1} è chiuso e limitato e f è continua

$\Rightarrow$ f ha max e min

$\Rightarrow$ g ha max k_{max} e minimo k_{min}
assunti in x_{max} e $x_{min} \in S^{n-1}$

Affermo che k_{max} è autoval. con autovett. x_{max}
k_{min} " " " " x_{min}

(se $k_{max} > k_{min}$ ok. se $k_{max} = k_{min} = k$
ottengo che $A = \begin{pmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix}$)

Lo vedo per k_{max}: so che nel pto di max
x_{max} $\quad \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(x_{max}) = 0 \quad l = 1 \dots n$.

$$g(x) = \frac{\langle x \mid x \rangle_A}{\langle x \mid x \rangle_{\mathbb{R}^n}} = \frac{{}^t x \cdot A \cdot x}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i (Ax)_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i \, a_{ij} \, x_j}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_\ell}(x) = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m} a_{\ell j} x_j + \sum_{i=1}^{m} \overset{a_{\ell i}}{a_{i\ell}} \, x_i \right) \cdot \|x\|^2 - 2 x_\ell \cdot \langle x \mid x \rangle_A}{\|x\|_{\mathbb{R}}^4}$$

$$\left(\text{se } \|x\| = 1 \right) = 2 \sum_{j=1}^{M} a_{\ell j} x_j - 2 x_\ell \cdot g(x)$$

$$= 2\left((A\cdot x)_\ell - g(x)\cdot x_\ell \right)$$

Se $\dfrac{\partial g}{\partial x_\ell}(x) = 0 \ \forall \ell$ allora $Ax = g(x)\cdot x$. $\blacksquare$

Q: per quali A simmetriche si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def pos.

<u>Prop</u>: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos. se e solo se A ha tutti gli autoval. positivi.

Dim: esiste M ortogonale t.c. ${}^tMAM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

A def pos. $\Leftrightarrow$ $\langle x | x \rangle_A > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Leftrightarrow \langle Mx | Mx \rangle_A > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad$ (M invertibile)

$\Leftrightarrow {}^t(Mx) \cdot A \cdot (Mx) > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Leftrightarrow {}^tx \cdot ({}^tM \cdot A \cdot M) \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. $\blacksquare$

<u>Fatto</u>: trovare gli autoval di A comporta risolvere $p_A(t) = 0$ ... difficile!

<u>Def</u>: data $A \in M_{n \times n}$ simm chiamo A_j

$$A = \left(\begin{array}{c:c} \underbrace{A_j}_{j} & \\ \hdashline & \end{array}\right) \Big\} j \qquad \text{e} \quad d_j = \det(A_j)$$

Teo: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.

$\iff$ $d_1, d_2, \dots, d_n > 0$.

Esercizio:

Teo: data A simm, posto $d_0 = 1$ e $d_j := \det(A_j)$, se $d_1, \dots, d_{n-1}$ sono $\neq 0$ allora i segni degli autovalori di A sono uguali ai segni di

$$d_j / d_{j-1} \qquad j = 1, \dots, n$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Seguì autoval?

- $P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+1 & -3 & 4 \\ -3 & t+2 & -1 \\ 4 & -1 & t-5 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
= \; & t^3 + 3t^2 + 2t \\
& -5t^2 - 15t - 10 \\
& +12 \\
& +12 \\
& -16t - 32 \\
& -9t + 45 \\
& -t - 1 \; = t^3 - 2t^2 - 39t + 26
\end{aligned}
$$

ha tre radici reali complicate ...

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$d_0 = 1$

$d_1 = -1$

$d_2 = -7$

$d_3 = 10 - 12 - 12 + 32 - 45 + 1 = - \dots$

i tre autoval di A hanno segni:

$d_1 / d_0 \longrightarrow$ neg

$d_2 / d_1 \longrightarrow$ pos

$d_3 / d_2 \longrightarrow$ pos

<u>Idea dimo teorema</u>;

<u>Lem</u>: se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è simm. e ho
$\to$ autoval pos, m autoval neg
($\Rightarrow z = n - p - m$ nulli) ho:

- $p = \max \{ \dim W : \langle w | w \rangle_A > 0 \ \forall w \neq 0, w \in W \}$
- $m = \max \{ \dim W : \langle w | w \rangle_A < 0 \ \forall w \neq 0, w \in W \}$

- $p + z = \max\{\dim W : \langle w|w\rangle_A \geq 0 \ \forall w \in W\}$
- $m + z = \max\{\dim W : \langle w|w\rangle_A \leq 0 \ \forall w \in W\}$.

<u>Dim</u>: so che esistono autovettori

$v_1^+, \dots, v_p^+$ rispetto agli autoval. pos.

$v_1^-, \dots, v_m^-$ " " " neg.

$v_1^0, \dots, v_z^0$ " " " nulli

(Teo spettrale). Ora pongo:

$P = \mathrm{Span}(v_1^+ \dots v_p^+)$ $\quad M = \mathrm{Span}(v_1^-, \dots, v_m^-)$

$P_0 = \mathrm{Span}(v_1^+ \dots v_p^+ v_1^0 \dots v_z^0)$ $\quad M_0 = \mathrm{Span}(v_1^- \dots v_z^0)$.

Facile:

- $\langle w|w\rangle_A > 0 \quad \forall w \in P,\ w \neq 0$
- $\langle w|w\rangle_A < 0 \quad \forall w \in M,\ w \neq 0$
- $\langle w|w\rangle_A \geq 0 \quad \forall w \in P_0$
- $\langle w|w\rangle_A \leq 0 \quad \forall w \in M_0$

$\Rightarrow$ in tutte le uguaglianze desiderate vale $\leq$.

Per provare che vale $l' =$ (argomento simile x 4):

- Sia p.a. W t.c. $\langle w|w\rangle_A > 0 \ \forall w \neq 0, w \in W$

  con $\dim W > p$.

Ora $\dim(M_0) = m + z = n - p$

e $\langle w|w\rangle \leq 0 \ \forall w \in M_0$

$\dim W + \dim M_0 > n \underset{\text{Grassmann}}{\Longrightarrow} W \cap M_0 \neq \{0\}$.

Se $w \in W \cap M_0$, $w \neq 0$ ha $\langle w|w\rangle_A > 0$ $w \in W$
$\langle w|w\rangle \leq 0$ $w \in M_0$

assurdo.

Per M usare P_0

Per P_0 usare M

Per M_0 usare P. $\boxtimes$

<u>Teo</u>: sgn autoval di A = sgn$\left(\lambda_j / \lambda_{j-1} : j = 1 \dots n \right)$

"Idea dimo": per induzione su n.

$n = 1$ ok.

Passo induttivo: $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & \vdots \\ \hline \cdots & \cdot \end{array} \right)$.

Ipotesi induttiva dice che i segni degli autovalori di A_{n-1} sono i segni di d_j / d_{j-1} $j = 1 \ldots n-1$. Mettiamo ce ne siano p_0 pos e n_0 neg.

Per il lemma ho stsp. di $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ di dim p_0 su cui $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.

e uno di dim m_0 su cui è def. neg.

$\Longrightarrow$ sempre per il lemma i segni (p, m, z) degli autovalori di A possono essere

- $(p_0+1, m_0, 0) \longrightarrow \operatorname{sgn}(d_n) = (+1)^{p_0+1} \cdot (-1)^{m_0}$
  $= +(+1)^{p_0} \cdot (-1)^{m_0} = + \operatorname{sgn}(d_{n-1})$
- $(p_0, m_0+1, 0)$
- $(p_0, m_0, 0)$

altri casi analoghi ∎