

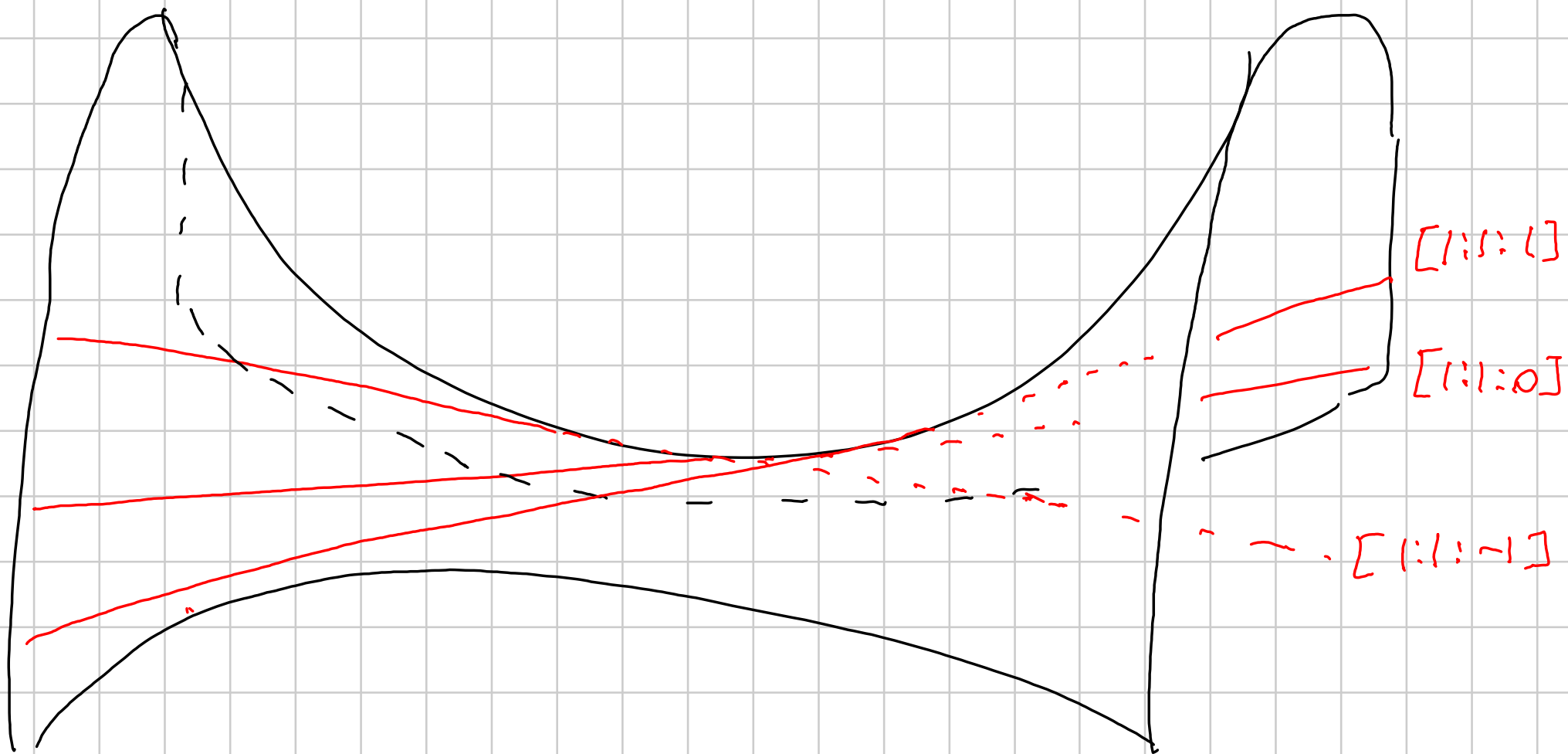
Geometria 5/5/16

Modelli affini delle quadriche (vedremo che lo sono)

Quadrica $\mathbb{A}^3$	Eq.	Eq. $\mathbb{P}^3$	$\mathbb{P}^3$	Eq. $\mathbb{A}^3$	$\mathbb{A}^3$
$\emptyset$	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$	$\emptyset$	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	$\emptyset$
ellissoide	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	$x^2 + y^2 + z^2 = w^2$	ellissoide proiettivo	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	$\emptyset$
par. ell.	$z = x^2 + y^2$	$zw = x^2 + y^2$ $(z = u + v, w = u - v)$ $x^2 + y^2 + v^2 = u^2$	ellissoide proiettivo	$x^2 + y^2 = 0$	$[0:0:1]$ un pto

iparb. ell. 2 folde	$z^2 = x^2 + y^2 + 1$	$z^2 = x^2 + y^2 + w^2$	ellissoide proiettivo	$z^2 = x^2 + y^2$	l'unica conica proiettiva non deg
iparb. iparb. 1 folde	$x^2 + y^2 = 1 + z^2$	$x^2 + y^2 = z^2 + w^2$	iperboloid proiettivo	$z^2 = x + y^2$	//
par. iparb.	$z = x^2 - y^2$	$zw = x^2 - y^2$ $z = u + v$ $w = u - v$ $u^2 + v^2 = x^2 + y^2$	iperboloid proiettivo	$x - y^2 = 0$	$\{x=y\}$ $\{x=-y\}$ due rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Perché il parab. iparb. ha due rette all'∞:



quando loro trova la retta all'infinito
 di equazione $x=y$
 $\{ [1:1:z] : z \in \mathbb{R} \} \cup \{ [0:0:1] \}$

autoparmite per l'altra volta -

Teorema: se $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$

con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ e $\det(A) \neq 0$ allora esiste
una trasformazione affine $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.c.

$\phi(L)$ è uno dei 6 modelli elencati sopra -

Inoltre i segni degli autovalori di A

e di Q consentono di stabilire quale -

Att: dare "l'equazione $x^2 - 7y^2 + 4z + 9xy + 11xz + \pi yz - 5x + y + 2z - 31 = 0$

definisce un iprob. ipab (?) " significa:

" $\exists \phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibile. e che il luogo

è definito dall'equazione che $\phi(d)$

è definito dall'equazione modello $x^2 + y^2 + 1 = z^2$ "

Dim: Sappiamo per due con le operaz. lecite

$$A \leadsto M.A.M$$

$$Q \leadsto R.Q.R$$

$$A \leadsto -A$$

i separi tagli autovel. di A e Q non cambiano
 o cambiano tutti insieme -

Quindi possiamo essere?

Q : $+++ , ++-$, $\underbrace{+- -}_{++-}$, $\underbrace{- - -}_{+++}$
 $++0 , +-0$, $\underbrace{- - 0}_{++0}$ $\nearrow$ $\nearrow$ cambio di segno
 $+ , 0, 0$, $- 0, 0$, $0, 0, 0$

impossibili:

se R out of t.r. ${}^t R \cdot Q \cdot R = \begin{pmatrix} * & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t M \cdot A \cdot M = \left(\begin{array}{ccc|c} * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ \hline * & * & * & * \end{array} \right)$$

lin. dip.

$$\Rightarrow \det A = 0$$

escluso -

In quali 4 casi come possono essere gli autov. di A ?

Q

A

+++

+++
++-

Solo questi: se A avesse — $\exists W \subset \mathbb{R}^4$
 $\dim W = 2$ su cui $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$
 è def. neg. ma
 $\dim(W \cap (\mathbb{R}^3 \times \{0\})) \geq 1$

² ³
impossibile: $\langle .1. \rangle_A$ è def. pos.

$++-$

$\left. \begin{array}{l} ++-+ \\ ++-- \end{array} \right\}$ Solo questi;
analogia

$++\circ$

$\left. \begin{array}{l} +++- \end{array} \right\}$ Solo questo:
 $\downarrow$

$++++$ no perché $\langle .1. \rangle_A$
sarebbe def. pos. $\Rightarrow$ anche $\langle .1. \rangle_Q$

$++--$ no perché $\exists W$ di
dim 2 su cui $\langle .1. \rangle_A$ è
def. neg. ma

$$\dim(M \cap (\mathbb{R}^3 \times \{0\})) \geq 1$$

$\begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix}$
 me $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ è def. neg. su W
 mentre Q non lo è

$+ - 0$ $+ - + -$ } unica: apparente analogo -

Trovati i 6 casi:

Q	A	Tro un att'uno prova che posso ricondurre a:
$+++$	$++++$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0 \quad \emptyset$
	$+++-$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$ <i>ellissoide</i>

$++-$	$++--$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$	$x^2 + y^2 = 1 + z^2$ iperb. 1 foglia (iperb.)
	$++-+$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$x^2 + y^2 + 1 = z^2$ iperb. 2 foglie (ell.)
$++0$	$++-+$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$	$z = x^2 + y^2$ parab. ell.
$+ - 0$	$+ - + -$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$	$z = x^2 - y^2$ parab. iperb.

(uso fortemente l'ipotesi $\det(A) \neq 0$
— va verificato negli esercizi) —

Come ricondursi ai modelli?

1. Usando R ortogonale spesso
e $M = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 0 & 0 & * \\ 0 & \lambda_2 & 0 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * \\ \hline * & * & * & * \end{array} \right)$$

2. Usando $R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & & \\ & \ddots & \end{pmatrix}$ spesso

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ \hline & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ \hline & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ \hline & & & \end{array} \right)$$

3. Usando una trasformazione

$$M = \begin{pmatrix} I & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenere zeri a lato dei ± 1 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}}_{\text{multiplico } x, y, z \text{ per } \sqrt{|c|} \leftarrow \text{poi semplifico } |c| \text{ ottenendo}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & b \\ & & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & b \\ & & b & c \end{pmatrix}}_{\text{ulteriore traslaz. + dilatazione (come per coniche) ottenendo}}$$

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$



Come trovare i separi degli autovel. di A e di Q ?

Caso facile: d_1, d_2, d_3, d_4 tutti $\neq 0$

separi Q : $d_1, d_2/d_1, d_3/d_2$

A : $d_1, d_2/d_1, d_3/d_2, d_4/d_3$

Più in generale si può concludere con $d_2 \neq 0$:

$d_2 \neq 0$ i separi di 2 autovel di Q sono uguali
a quelli sulla diagonale di A_2 ;
cambiando segno sono ++.

$d_3 = 0 \rightarrow Q: + + 0$
 $\Rightarrow$ "e" parab. ell. (Se $d_4 \neq 0$)

$d_3 \neq 0$ sepi $\underbrace{(t + d_3)}_Q \underbrace{d_4/d_3}_A$

$d_2 < 0$ Q he autovel $+ -$

$d_3 = 0 \rightarrow Q: + - 0$
 $\Rightarrow$ "e" parab. iperb. (Se $d_4 \neq 0$)

$$d_3 \neq 0 \Rightarrow \underbrace{+ - (-d_3)}_Q \underbrace{d_4/d_3}_A$$

Ci sono due casi:

- permutando le coordinate trovo un $d_2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\cdot} & \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \boxed{\cdot} & \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

procedo come sopra

- se anche puntando tutti i dz sono 0

- caso molto particolare in cui le
soluzioni (dettagli sul libro) —



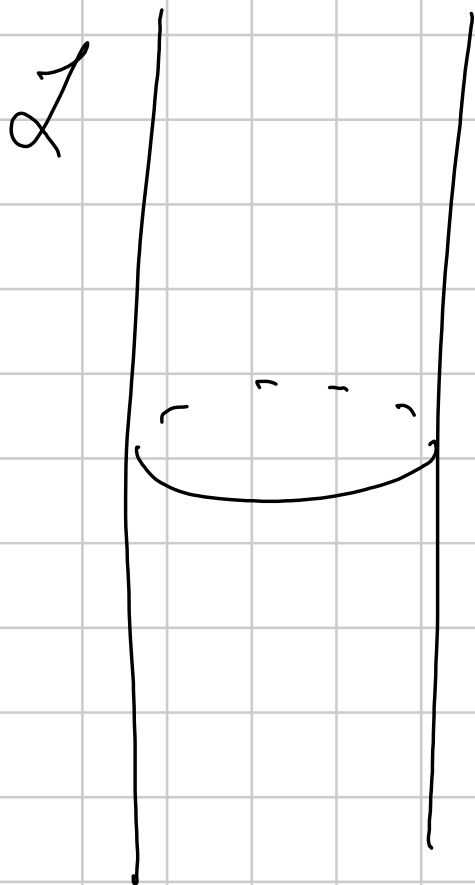
12.2.11

$\mathbb{P}^1 \ni \mathcal{L}: x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + y^2 = z^2$

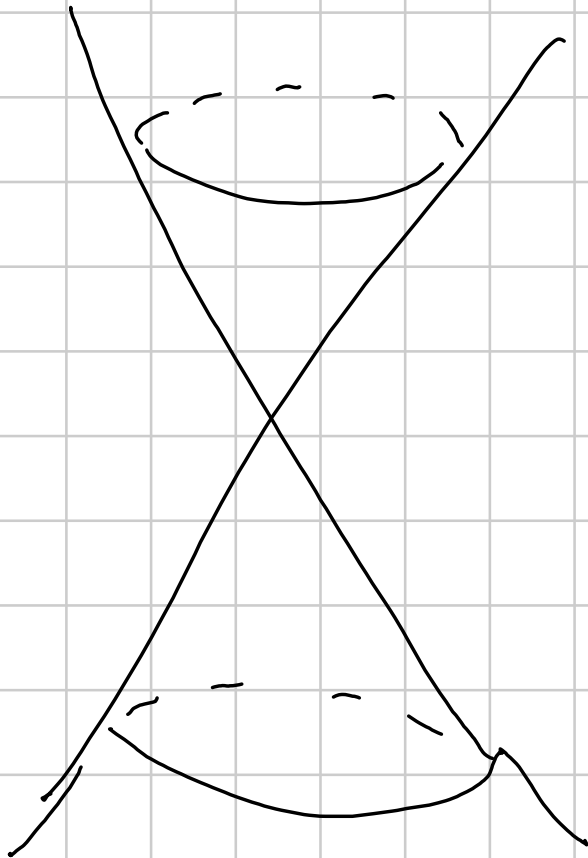
(quadriche degeneri)

$\mathcal{L}'_\infty: [0:0:1]$
in $\mathbb{P}^1$.

$\mathcal{L}_\infty: x^2 + y^2 = 0 \rightarrow [0:0:1]$



$$x^2 + y^2 = z^2$$

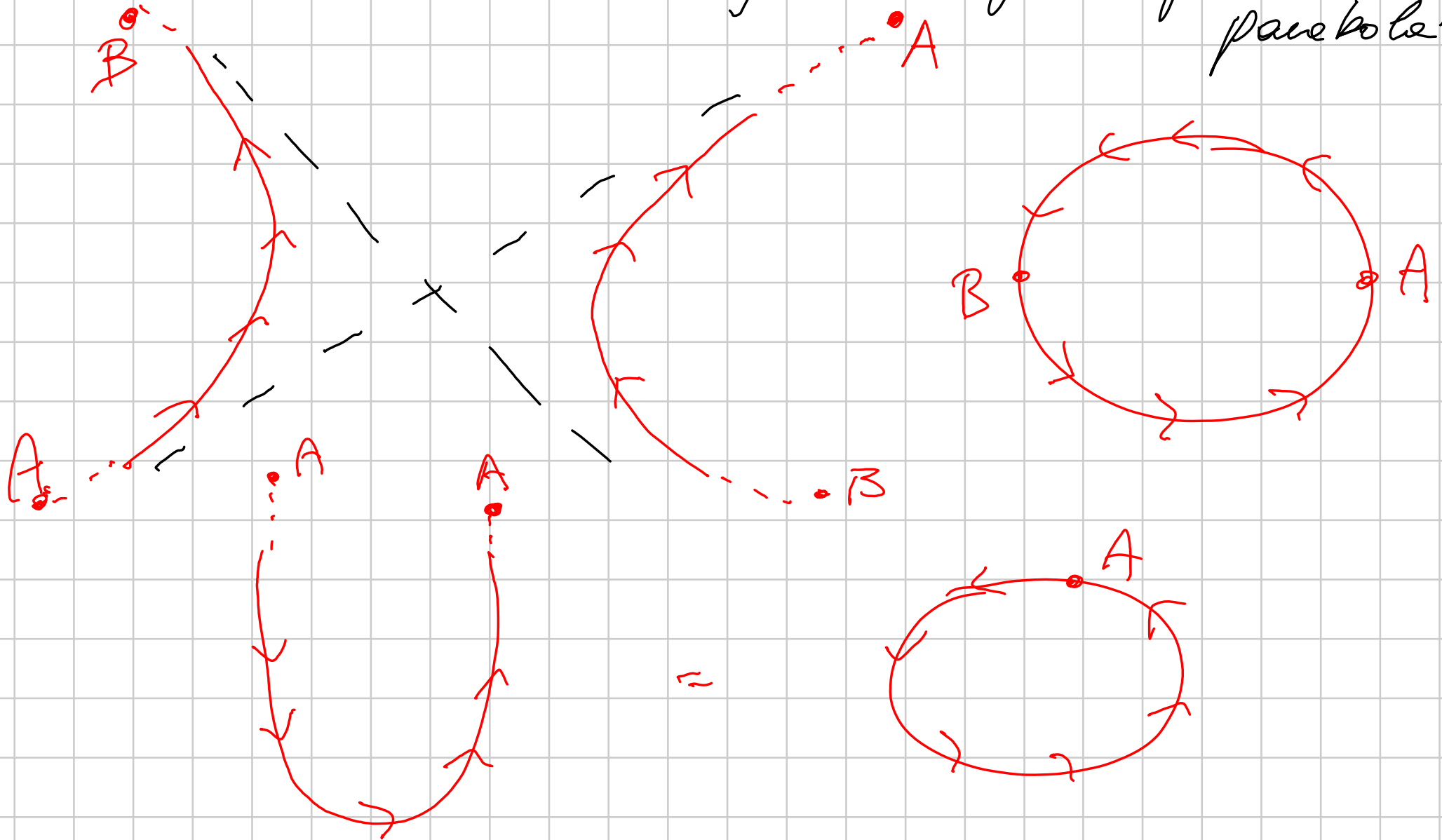


dl'_∞ : una circonferenza

$$L_\infty : x^2 + y^2 = z^2 \text{ in } \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

l'unica conica proiettiva
non separata

Pourquoi $\tilde{L}$ est une courbe algébrique lisse et
parabole?



12.3.1

Trovare i pts di intersec. tra

$$\{ [t+2 : t+4 : 2t+7] : t \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

e $\mathcal{L}_\infty$ dove $\mathcal{L} : 3x^2 - xy + 2yz - 6z^2$
 $- \sqrt{7}x + 11y - e^{\pi} = 0$

↑
quadrica in $\mathbb{P}^3$

Devo risolvere:

$$\mathcal{L}_\infty : 3x^2 - xy + 2yz - 6z^2 = 0$$

$$3(t+2)^2 - (t+2)(t+4) + 2(t+2)(2t+7) - 6(2t+7)^2 = 0$$

(cont.)

$$3t^2 + 22t + 39 = 0$$

$$(3t + 13)(t + 3) = 0$$

$$t_1 = -3 \quad t_2 = -\frac{13}{3}$$

⇒ i pti di intersezione sono

$$[t+2 : t+4 : 2t+7] \Big|_{t=-3} = [-1 : 1 : 1]$$

$$[t+2 : t+4 : 2t+7] \Big|_{t=-\frac{13}{3}} = \left[-\frac{7}{3} : -\frac{1}{3} : -\frac{5}{3}\right]$$

$$= [7 : 1 : 5]$$

12.3.2 Trovare almeno un pto di intersezione

$$\{[t-1 : t^2-4 : -t] : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$$\{[1-3t^2 : 1+t : 1+3t^2] : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

Non fare: imporre

$$[t-1 : t^2-4 : -t] = [1-3t^2 : 1+t : 1+3t^2]$$

Invece: devo imporre

$$[t-1 : t^2-4 : -t] = [1-3s^2 : 1+s : 1+3s^2]$$

ovvero chiedendo che

$$\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-4 \\ -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-3s^2 \\ 1+s \\ 1+3s^2 \end{pmatrix}$$

siano lin. dip.

Non conviene: impostare

$$\begin{pmatrix} 1-3s^2 \\ 1+s \\ 1+3s^2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-4 \\ -t \end{pmatrix}$$

Invece: impostare

$$\text{rank} \begin{pmatrix} t-1 & 1-3s^2 \\ t^2-4 & 1+s \\ -t & 1+3s^2 \end{pmatrix} = 1$$

Cioè che tutti e tre i suoi sottodet. 2×2
siano nulli.

$\Rightarrow$ 3 equez. in t e s .

Comincio con $\det \begin{vmatrix} t-1 & 1-3s^2 \\ -t & 1+3s^2 \end{vmatrix} = 0$

$$(t-1)(1+3s^2) + t(1-3s^2) = 0$$

$$t = \frac{1+3s^2}{2}$$

Sostituisco in una delle altre equez.
trovando $(1+3s^2)(8s^4 + 6s^2 + 2s - 13) = 0$

ha la soluz. $s = -1$
supra $t = 2$

Devo controllare che

$$[t-1 : t^2-4 : -t] \Big|_{t=2} = [1 : 0 : -2]$$

||

$$[1-3s^2 : 1+s : 1+3s^2] \Big|_{s=-1} = [-2 : 0 : 4]$$

Σ