Geometria 4/5/16

Scopo: classificare i luoghi in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e in $\mathbb{R}^n$ ($n=2$ — visto, $n=3$) ~~definiti~~ da equaz. polinomiali (omogenee per $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$) non degeneri a meno di trasf. proiettive o affini —

<u>Ricordo</u>: equaz. di II grado in $n+1$ variabili si scrive come

$$ {}^t x \cdot A \cdot x = 0 \qquad A \in M_{(n+1)\times(n+1)} \ \underline{\underline{\text{simm}}} $$

$x \in \mathbb{R}^{n+1}$: le variabili.

E' non degenere se $\det(A) \neq 0$.

Effetto di una trasformazione proiettiva:

$$x = M \cdot x' \rightsquigarrow {}^t x' \cdot \underbrace{{}^t M \cdot A \cdot M}_{\text{nuova matrice } A'} \cdot x' = 0$$

$M \in \mathcal{M}_{(n+1)\times(n+1)}$ invertibile.

Altra operaz. lecita sull'equazione: cambiare segno.

<u>Teo</u>: Se $\mathcal{L} = \{ [x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : {}^t x \cdot A \cdot x = 0 \}$

con A simm, $\det(A) \neq 0$ allora esiste

$p \in \{0, \dots, n\}$ e $\phi : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
trasf. proiettive t.c.

$$\phi(\mathcal{L}) = \left\{ [x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : x_0^2 + \dots + x_p^2 = x_{p+1}^2 + \dots x_n^2 \right\}$$

inoltre $p+1 \geq n-p$ cioè $p \geq \frac{n-1}{2}$.

Cioè: "un luogo definito da equaz. di $\mathbb{I}$ non dep. in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ a meno di trasf. proiettive è definito da un'equazione $x_0^2 + \dots + x_p^2 =$
$= x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2$."

Esempi:

$n=2$ le equazioni dei modelli proiettivi sono

$$x^2+y^2+z^2=0 \qquad \emptyset$$

$$x^2+y^2=z^2$$

unica conica proiettiva non degenere non vuota

$n=3$ le equazioni dei modelli proiettivi delle quadriche non degeneri sono

$$x^2+y^2+z^2+w^2=0 \qquad \emptyset$$

$x^2+y^2+z^2=w^2$ ellissoide proiettivo

$x^2+y^2=z^2+w^2$ iperboloide proiettivo

uniche due quadriche proiettive non deg. non vuote

a meno di trasf. proiettive.

<u>Dim</u>: Ho $A\in M_{(n+1)\times(n+1)}$ simm. $\det(A)\neq 0$.

Teo spettrale: $\exists M$ ortog. t.c.

$$A' = {}^tM \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_j \neq 0 \ \forall j.$$

Uso
$$N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{|\lambda_1|} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sqrt{|\lambda_n|} \end{pmatrix} \ :$$

$$ {}^tN \cdot A \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda_1/|\lambda_1| & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n/|\lambda_n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Se serve cambio segno in modo che ci siano più $+1$ che -1. Riordino le variabili finchè trovo $\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$ $\}\, p+1$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{p+1}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n-p}$

$$\Rightarrow x_0^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2 = 0. \quad \blacksquare$$

---o---

Caso affine:

<u>Ricordo</u>: una equaz. di II grado in n variabili si scrive come

$$ {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 $$

$$ A = \begin{pmatrix} Q & {}^t b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)} \quad \underline{\underline{\text{simm}}} $$

${}^t x \cdot Q \cdot x$ parte quadratica (grado 2)

$2\,{}^t b \cdot x$ parte lineare (grado 1)

c termine noto (grado 0).

Vogliamo considerare i luoghi

$$\mathcal{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \cdot \ {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

a meno trasf. affini

$$x = R \cdot x' + w$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} R & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\det R \neq 0)$$

Nuova equazione: ${}^t\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{{}^tM \cdot A \cdot M}_{\text{nuova } A'} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} {}^tR & 0 \\ {}^tw & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & {}^tb \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} {}^tR & 0 \\ {}^tw & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QR & * \\ Rb & * \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} {}^tR \cdot Q \cdot R & * \\ * & * \end{pmatrix} = 0$$

<u>Conclusione</u>: i cambi di coord. affini agiscono su $A = \begin{pmatrix} Q & {}^tb \\ b & 1 \end{pmatrix}$ come $A' = {}^tM \cdot A \cdot M$ e $Q' = {}^tR \cdot Q \cdot R$.

Vedremo ($n = 2, 3$, ma sempre vero) che la classificazione affine di $\mathcal{L}$ dipende dai segni degli autovalori di A e di Q.

Oss: i cambiamenti di A e di Q determinati dalle trasf. affini non cambiano i segni dei loro autovalori. Ciò dipende dalla:

Prop: se $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simm.

- numero di autoval pos. = massima dim. di sttsp di

$\mathbb{R}^n$ su cui $\langle \cdot | \cdot \rangle_B$ è def. pos.

- . . .
- . . .

Infatti i cambiamenti $A \rightsquigarrow {}^tM \cdot A \cdot M$

$Q \rightsquigarrow {}^tR \cdot Q \cdot R$

sono indotti dalle trasf. lineari di $\mathbb{R}^n$ e dunque non cambiano la max dim. di un s/sp su cui $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ o $\langle \cdot | \cdot \rangle_Q$ sono def. pos.

Oss: $\mathcal{L}$ non cambia se cambio segno all'equazione; l'effetto sugli autoval. di A e di Q è cambio di segno simultaneo per tutti.

(Domani: spiego come si fa la classificazione affine per $n=3$ — quadriche).

Sia $\mathcal{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} Q & {}^t b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}$$

simm

Def: chiamo completamento proiettivo di $\mathcal{L}$

$$\overline{\mathcal{L}} = \left\{ [x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : {}^t x \cdot A \cdot x = 0 \right\}.$$

Chiamo parte all'∞ di $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}_\infty = \{ [x] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) : {}^t x \cdot Q \cdot x = 0 \}$$

Ricordo: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \underbrace{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})}_{\text{pti all'}\infty \text{ di } \mathbb{R}^n}$

$$\overline{\mathcal{L}} = \underset{\cap}{\mathcal{L}} \cup \underset{\cap}{\mathcal{L}_\infty}$$

cioè $\overline{\mathcal{L}}$ è ottenuta da $\mathcal{L}$ aggiungendo i suoi pti a ∞.

Esempi!

$n = 2$

$\mathcal{L}$	equaz	equaz. $\overline{\mathcal{L}}$	$\overline{\mathcal{L}} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$	eq. $\mathcal{L}_\infty$	$\mathcal{L}_\infty \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$
$\emptyset$	$x^2+y^2+1=0$	$x^2+y^2+z^2=0$	$\emptyset$	$x^2+y^2=0$	$\emptyset$
ellisse	$x^2+y^2=1$	$x^2+y^2=z^2$	(1)	$x^2+y^2=0$	$\emptyset$
parabola	$y=x^2$	$yz=x^2$	(2)	$x^2=0$	$\{[0:1]\}$ un pto
iperbole	$x^2-y^2=1$	$x^2-y^2=z^2$	(3)	$x^2-y^2=0$	$\{[1:1], [1:-1]\}$ due pti

$$A = \begin{pmatrix} Q & {}^t b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & b_1 \\ q_{12} & q_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} : \quad {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & b_1 \\ q_{12} & q_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$q_{11} x^2 + 2 q_{12} xy + q_{22} y^2 + 2b_1 x + 2b_1 y + c = 0$$

$$\overline{\mathcal{L}} : \quad {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & b_1 \\ q_{12} & q_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$q_{11} x^2 + 2 q_{12} xy + q_{22} y^2 + 2b_1 xz + 2b_2 yz + cz^2 = 0$$

$\Rightarrow$ l'equaz. di $\overline{\mathcal{L}}$ si ottiene da quella di $\mathcal{L}$ aggiungendo una variabile in modo che diventi omogenea di II grado.

$$\mathcal{L}_\infty : \quad {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$q_{11} x^2 + 2 q_{12} xy + q_{22} y^2 = 0$$

$\Rightarrow$ equaz. di $\mathcal{L}_\infty$ è la parte quadratica di quella di $\mathcal{L}$.

---

(1) $x^2 + y^2 = z^2$ è esattamente il modello proiettivo dato sopra

(2) $yz = x^2$ $\quad \begin{cases} y = u - v \\ z = u + v \end{cases}$

$$u^2 - v^2 = x^2$$

$$x^2 + v^2 = u^2$$ è uguale al modello dopo un cambio di coord.

(3) $x^2 - y^2 = z^2$

$$y^2 + z^2 = x^2$$ è uguale al modello salvo cambiare nomi coord.

———— o ————

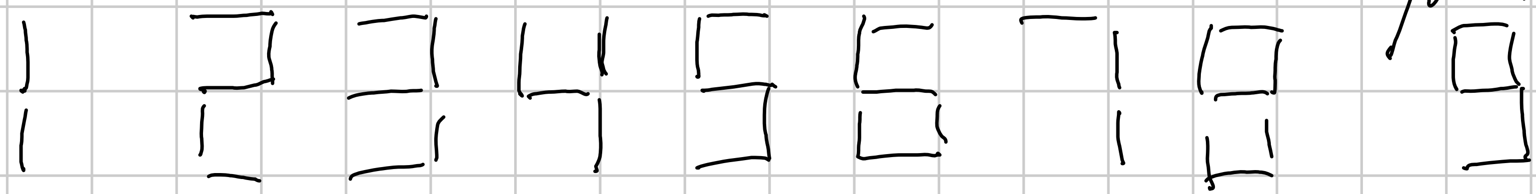
$\boxed{12.1.3}$ X = gli italiani con un telefonino

- aRb se stesso prefisso — equiv.

- aRb se $num(a) \leq num(b)$

  rifl, antisimm, trans.

$\boxed{V2.1.4}$ $X = \{0, \ldots, 9\}$ $d(n)$ = tratti per scrivere n quadrante digitale



• nRm se $d(n) \subseteq d(m)$

rifl, antisimm, trans.

• nRm se $\# d(n) \geq \# d(m)$

rifl, trans.   NO simm
NO antisimm

• nRm se $\# d(n) = \# d(m)$

equiv.

$\boxed{12.2.1}$ $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + i x_2 \\ x_3 + i x_4 \end{pmatrix}$$

$$f| \; : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$

Verificare che $\phi([x]) = [f(x)]$ definisca

$$\phi : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Infatti: se $[x] = [y]$ allora ho $y = \lambda \cdot x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

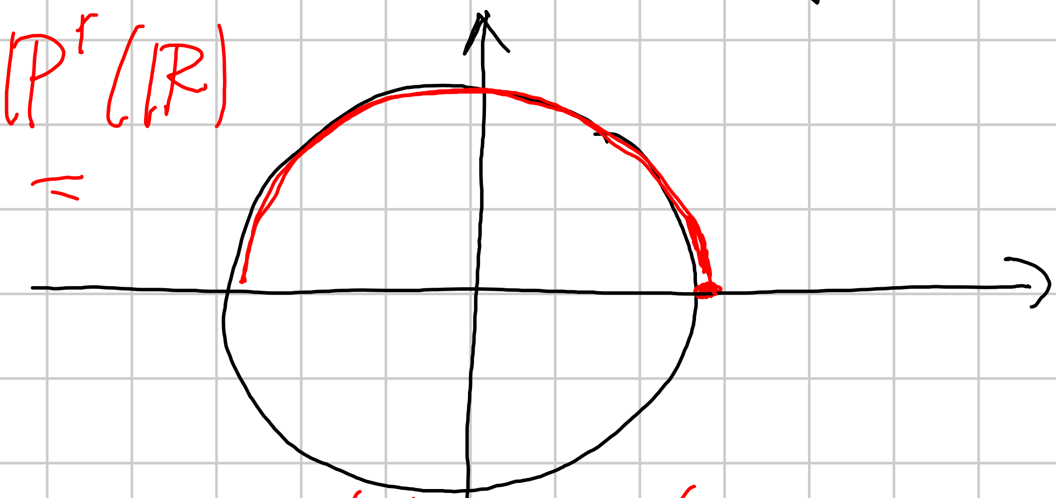
$$\Rightarrow \quad f(y) = 1 \cdot f(x) \longrightarrow [f(y)] = [f(x)] .$$

$\boxed{12.2.2}$ Visto: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}/_{x R y \text{ se } x-y \in \mathbb{Z}}$

sono una circonf.

Esibire una biezione.

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ =



+ identificare estremi

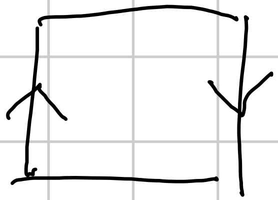
+ identificare gli estremi

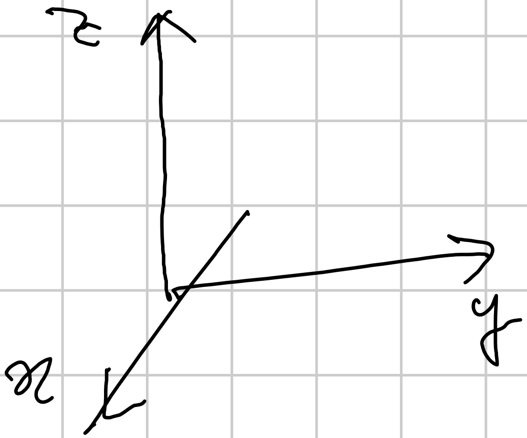
Biiezione

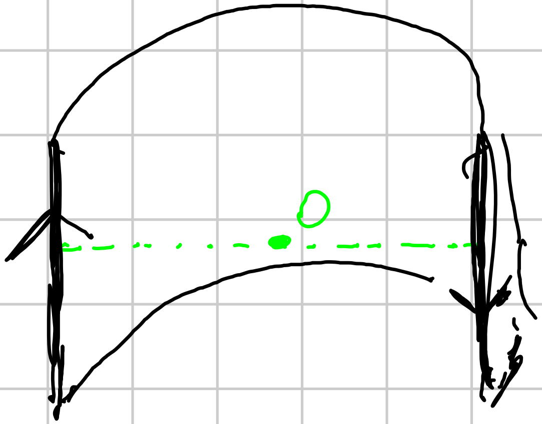
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \xleftarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$$[\cos(\pi t) : \sin(\pi t)] \longleftarrow\!\shortmid [t]$$

$\boxed{12.2.4}$ Esibire un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ t.c. restringendo a X la proiezione su $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si ottiene la solita figura del nastro di Möbius







$$\{(x,y,z) : x^2+y^2=1,\ -1\leq z\leq 1,\ x\leq 0\}$$

$\boxed{12.2.8}$ Desaiver

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^3+y^3-x^2y-xy^2-x^2+y^2-x+y+1=0 \right\}$$

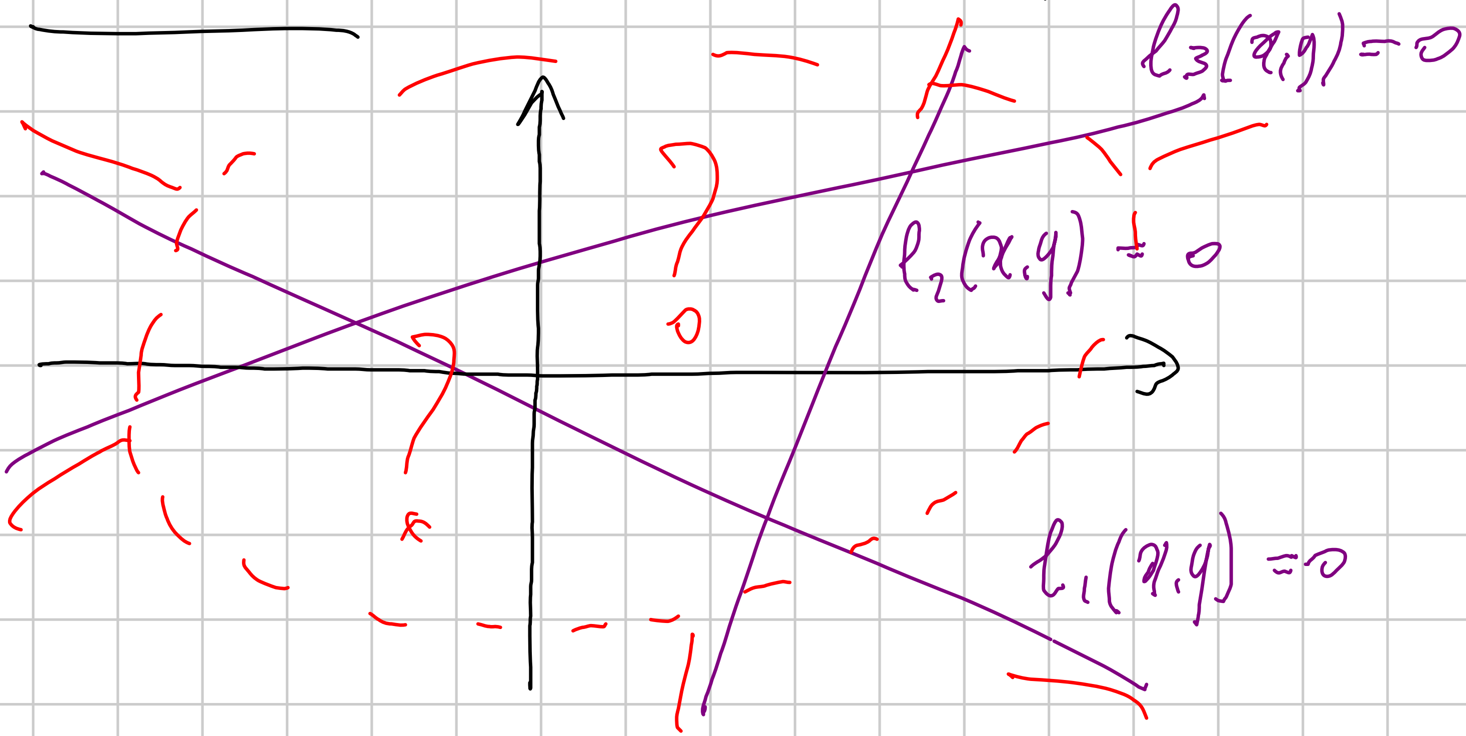
e $\mathcal{L}_\infty$ ~

$$\| $$

$$\underline{(x-y-1)}\,\underline{(x^2-y^2-1)}=0$$

$\mathcal{L}_\infty = \{ [1:1], [1:-1] \}$ due punti.

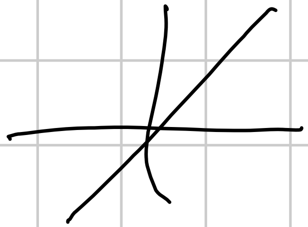
$\boxed{12.2.9}$ Esibire $X \subset \mathbb{R}^2$ definito da equaz. di grado 3 che non contenga rette e abbia 3 pti distinti all'∞.



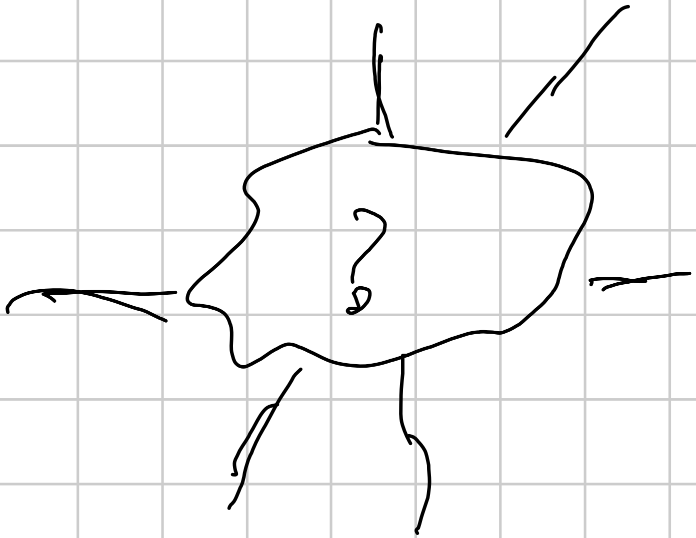
$\ell_1(x,y)\cdot \ell_2(x,y)\cdot \ell_3(x,y)=0$ definisce l'unione delle 3 rette $\Longrightarrow$ all'∞ ha le 3 direz. delle rette

Modifico $\quad l_1(x,y)\cdot l_2(x,y)\cdot l_3(x,y) = 1$

Es: $\quad x\cdot y\cdot(x+y) = 0$

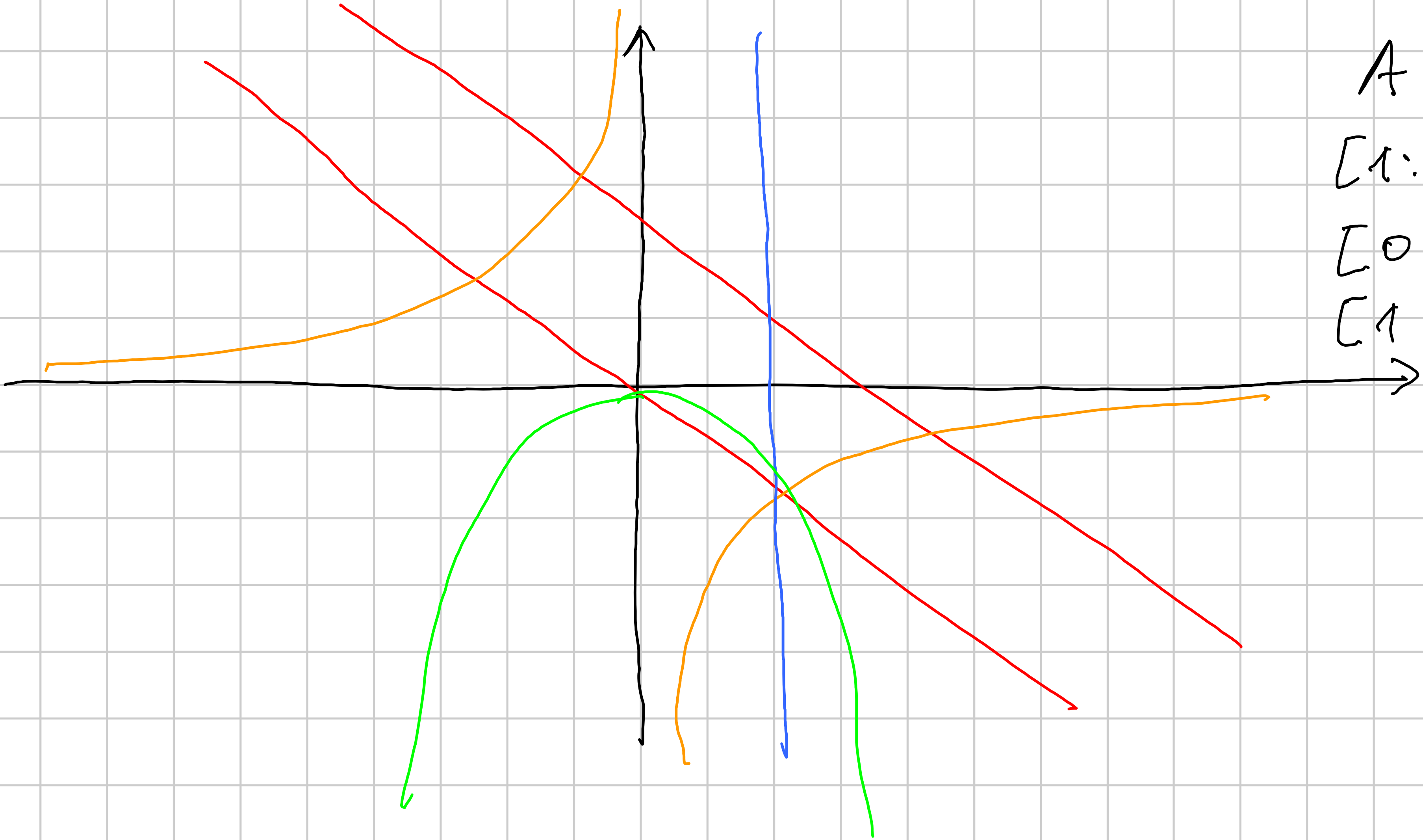


$$x\cdot y\cdot(x+y) = 1$$



$\boxed{12.2.10}$ Trovare pti all'∞ di

$$\left\{x\in\mathbb{R}^2 : \underline{\left(x_1+x_2-(x_1+x_2)^2\right)}\,\underline{\left(x_1x_2+1\right)}\,\underline{\left(x_1-\sqrt{\pi}\right)}\cdot\underline{\left(x_1^2+17x_2\right)} = 0\right\}$$



A_∞:

$[1:-1]$

$[0:1]$

$[1:0]$