

## Geometria 4/3/16

Prop:  $v_1, \dots, v_m$  base ortogonale

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^m \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$$

Qss:  $v_1, \dots, v_m$  base ortonormale  $\Rightarrow v = \sum_{i=1}^m \langle v | v_i \rangle \cdot v_i$

Q: Come ottenere basi ortonormali?

A. Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:

Teo: data  $v_1, \dots, v_m$  base di  $V$  (sp. vett. su  $\mathbb{R}$  con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ )

la seguente procedura fornisce una base ortonormale

$w_1, \dots, w_m$ :

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} ; \quad \tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2 | w_1 \rangle \cdot w_1 ; w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} ;$$

$$\tilde{w}_3 = v_3 - \langle v_3 | w_1 \rangle \cdot w_1 - \langle v_3 | w_2 \rangle \cdot w_2 ; w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} ;$$

in generale: costruire  $w_1, \dots, w_k$

$$\tilde{w}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1} | w_i \rangle \cdot w_i ; w_{k+1} = \frac{\tilde{w}_{k+1}}{\|\tilde{w}_{k+1}\|} .$$

Esempio: in  $\mathbb{R}^3$   $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$   
è una base - Costruisco  $w_1, w_2, w_3$  base ortonormale

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{498}} \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Verification de  $w_2 \perp w_1$ :  
 $8 - 19 + 11 = 0 \quad \checkmark$

$$\tilde{w}_3 = v_3 - \langle v_3 | w_1 \rangle \cdot w_1 - \langle v_3 | w_2 \rangle \cdot w_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{498} \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \\ 11 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{498} \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{498} \begin{pmatrix} 498 & -166 & +28 \\ 0 & +83 & +133 \\ -498 & -83 & +77 \end{pmatrix} = \frac{1}{498} \begin{pmatrix} 360 \\ 216 \\ -504 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt{360^2 + 216^2 + 504^2}} \begin{pmatrix} 360 \\ 216 \\ -504 \end{pmatrix}$$

verifique se  $w_3 \perp w_1$  e  $w_3 \perp w_2$ :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 360 \\ 216 \\ -504 \end{pmatrix} \right\rangle = 720 - 216 - 504 = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \\ 11 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 360 \\ 216 \\ -504 \end{pmatrix} \right\rangle = 1440 + 4104 - 5544 = 0$$

Dimo: devo provare che le procedure si può  
completare, verificando che i  $\tilde{w}_{k+1}$  nuovi vettori  
costruiti sono  $\neq 0$  -

Per fare ciò provo per induzione su  $k$  che

- (1)  $\text{Span}(w_1, \dots, w_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$
- (2)  $\tilde{w}_{k+1} \notin \text{Span}(w_1, \dots, w_k) \quad (\Rightarrow \tilde{w}_{k+1} \neq 0)$
- (3)  $\tilde{w}_{k+1} \perp v_j \quad \forall j \leq k$

Grazie a (2) vedo che le procedure si può eseguire

Grazie a (3) ho che  $w_1, \dots, w_m$  è ortogonale

Grazie a (1) ho che  $w_1, \dots, w_m$  generano  $\Rightarrow$  sono base

Passo base:  $k=1$

$$(1) \quad w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \Rightarrow \text{Span}(w_1) = \text{Span}(v_1)$$

$$(2) \quad \tilde{w}_2 = v_2 - \underbrace{\langle v_2 | w_1 \rangle \cdot w_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{Span}(v_1)}} \Rightarrow \tilde{w}_2 \notin \text{Span}(v_1)$$

~~X~~

$$(3) \quad \begin{aligned} \langle \tilde{w}_2 | w_1 \rangle &= \langle v_2 - \langle v_2 | w_1 \rangle \cdot w_1 | w_1 \rangle \\ &= \underbrace{\langle v_2 | w_1 \rangle - \langle v_2 | w_1 \rangle \cdot \underbrace{\|w_1\|^2}_1}_0 \end{aligned}$$

✓

Passo induttivo:

(1) So per ipotesi induttiva che

$$\begin{aligned} \text{Span}(w_1, \dots, w_{k-1}) &= \text{Span}(v_1, \dots, v_{k-1}) \\ \tilde{w}_k &= v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k | w_i \rangle \cdot w_i \end{aligned}$$

$$\underbrace{\phantom{v_1, \dots, v_k}}_{\uparrow} \\ \text{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$$

$$\Rightarrow \text{Span}(w_1, \dots, w_{k-1}, \tilde{w}_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$$(2) \quad \tilde{w}_{k+1} = v_{k+1} - \underbrace{\sum_{i=1}^k \langle v_{k+1} | w_i \rangle \cdot w_i}_{\in \text{Span}(w_1, \dots, w_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)}$$

$$\Rightarrow \tilde{w}_{k+1} \notin \text{Span}(w_1, \dots, w_k) \\ (\text{puisque } v_1, \dots, v_{k+1} \text{ lin indep})$$

$$(3) \quad \langle \tilde{w}_{k+1} | w_j \rangle = \left\langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1} | w_i \rangle \cdot w_i \mid w_j \right\rangle$$

$$= \langle v_{k+1} | w_j \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1} | w_i \rangle \cdot \underbrace{\langle w_i | w_j \rangle}_{\text{per ipotesi induttiva}} = \dots$$

per ipotesi induttiva  
 $w_1, \dots, w_k$  sono ortonormali  
 e  $i, j \leq k$

$$\Rightarrow \langle w_i | w_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\dots = \langle v_{k+1} | w_j \rangle - \langle v_{k+1} | w_j \rangle = 0. \quad \square$$

Oss: la matrice di cambio di base da  $v_1, \dots, v_n$   
 a  $w_1, \dots, w_n$  è di questo tipo:

$$\begin{pmatrix} \langle v_1 | w_1 \rangle & \langle v_1 | w_2 \rangle & \dots & \langle v_1 | w_n \rangle \\ \langle v_2 | w_1 \rangle & \langle v_2 | w_2 \rangle & \dots & \langle v_2 | w_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n | w_1 \rangle & \langle v_n | w_2 \rangle & \dots & \langle v_n | w_n \rangle \end{pmatrix}$$

triangolare superiore con coeff. positivi sulle diagonali.

Cor: un sistema ortogonale di vettori non nulli  
( $\Rightarrow$  lin. indep) si può completare a una base  
ortogonale.

Dim:

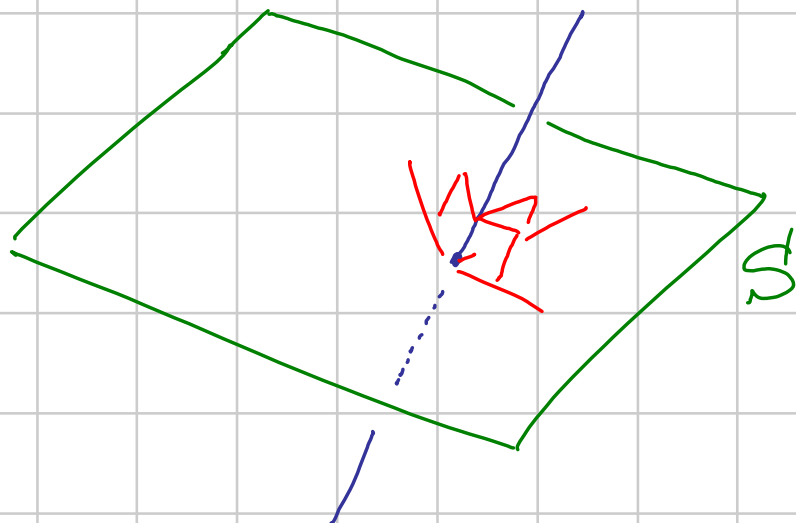
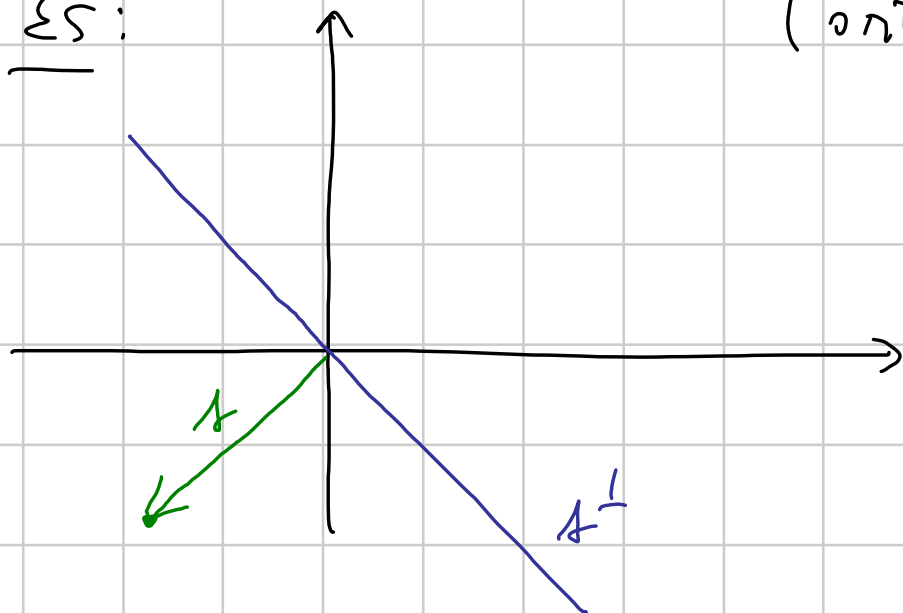
- completo a caso
- ortonormalizzato
- per i primi  $k$ , che ho solo  
normalizzato, ripristino le norme originali.

Def: Se  $S \subset V$  poniamo

$$S^\perp = \{v \in V : \langle v | s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$$

$\mathbb{R}^2$ :

(ortogonal a  $S$ )



Qss:  $S^\perp$  è sempre un sottosp. vett. di  $V$   
(anche se  $S$  non lo era):

$$\underline{v_1, v_2 \in S^\perp}, \lambda_1, \lambda_2$$

$$\text{cioè } \langle v_1 | \varphi \rangle = 0 \quad \langle v_2 | \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in S$$

Verifico che  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in S^\perp$  cioè che

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 | \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in S$$

//

$$\underbrace{\lambda_1 \langle v_1 | \varphi \rangle}_{0} + \underbrace{\lambda_2 \langle v_2 | \varphi \rangle}_{0}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_0$

✓