

ETA 23/9/15

$\sigma = \text{Conv}(v_0, \dots, v_m)$ semplice se $v_0, \dots, v_m$ aff. indep.

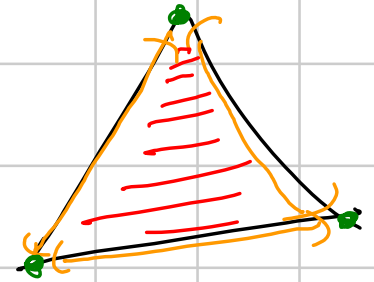
$\bar{\sigma} = \text{sp. aff. min. che contiene } \sigma$

$$\text{int}(\sigma) = \left\{ \sum t_i v_i : \sum t_i = 1, t_i > 0 \right\}$$

Eser. $\text{int}(\sigma) = \overset{o}{\sigma} \text{ su } \bar{\sigma}$

Faccie di $\sigma = \text{Conv}(v_0, \dots, v_k)$ k -dim.

Ese: $\sigma = \bigsqcup_{\tau \text{ faccia di } \sigma} \text{int}(\tau)$



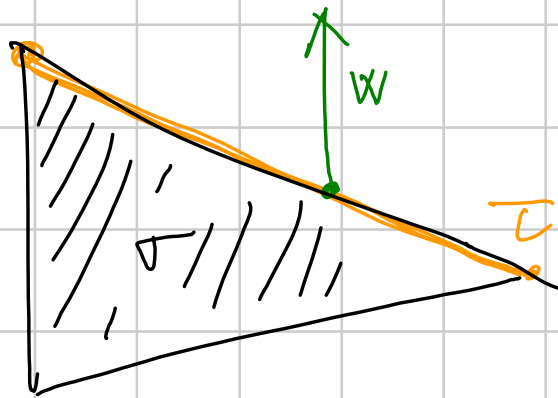
Def: b-orientez. per σ una orientez. per $\bar{\sigma}$
 p-orientez. ordinamento vertici / permut. pari.

$$v_0, \dots, v_m \text{ pos} \iff v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0 \text{ pos.}$$

Def: se σ è ^{orientato} simplice e $\tau \subset \sigma$ faccia di codim. 1
chiamo orientaz. indotta da σ su τ :

⑥ "outer normal first" Se w è un vettore di $\bar{\sigma}$
che punta fuori σ su τ dichiaro una base

$v_2, \dots, v_m$ di $\bar{\tau}$ positive
se $w, v_2, \dots, v_m$ è base pos di $\bar{\sigma}$

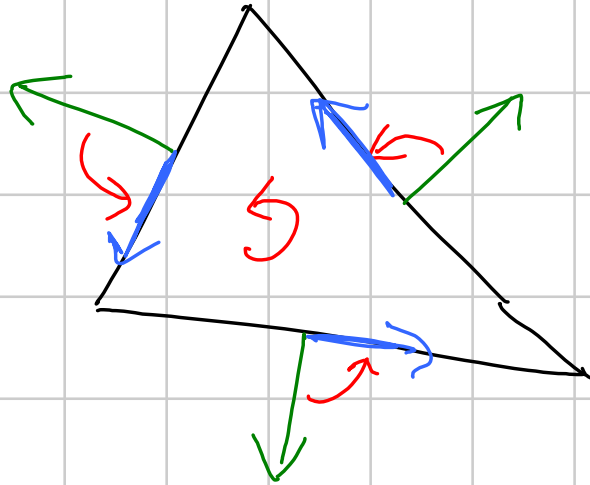


Σ S : per $n=0$ una orientaz. per $\sigma = \text{Conv}(v_0) = \{v_0\} \bar{e} \quad \pm \quad -$

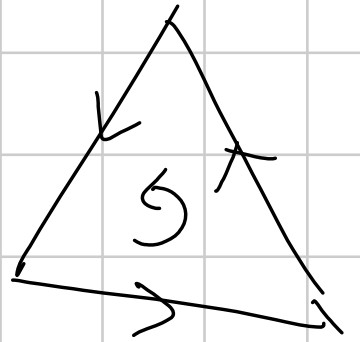
$n=1$



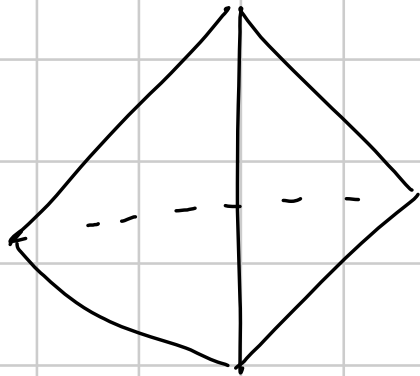
$n=2$

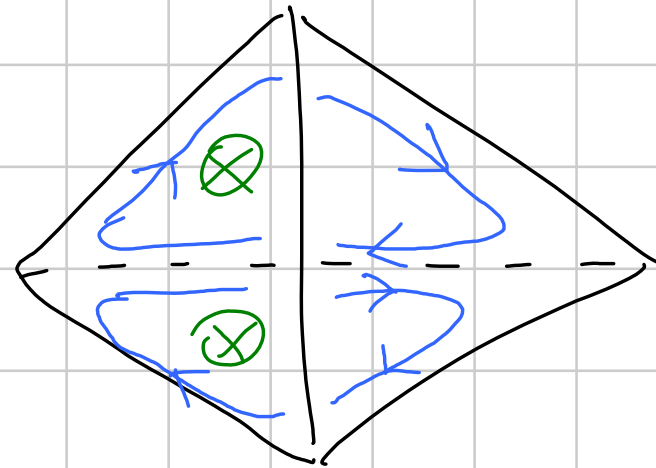
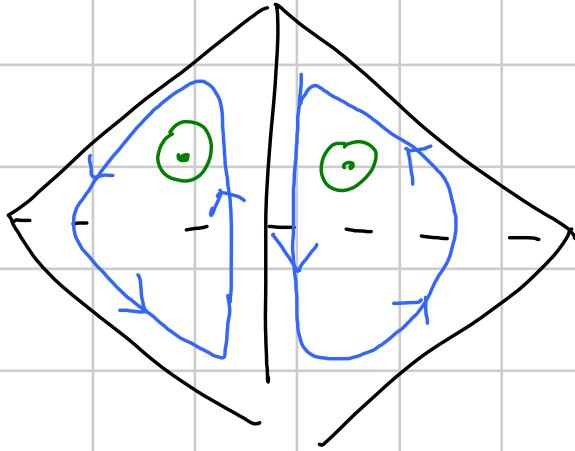


$\Rightarrow$



$n=3$





$\textcircled{a} \quad \Delta = \text{Conv}(v_0, \dots, v_m) \quad \tau = \text{Conv}(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_m)$
 Se $(v_0, \dots, v_m)$ é pos. então $(-1)^i \cdot (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_m)$ pos.

Equivalência: $\textcircled{b} \quad v_0, \dots, v_m$ pos. se $v_i - v_0, \dots, v_m - v_0$ pos

$$i=0 \quad (-1)^0 (v_1, \dots, v_m) = (v_1, \dots, v_m)$$

Devo provare che $v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1$ è b-pos -

Ora $v_1 - v_0$ è esatto

$\Rightarrow$ devo vedere che

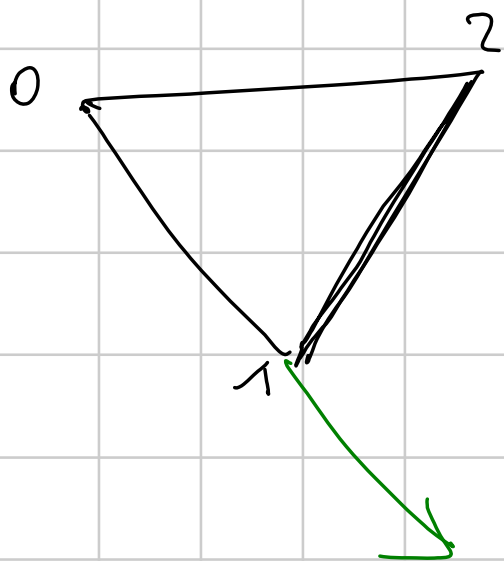
$$v_1 - v_0 = v_1 - v_0$$

$$v_2 - v_1 = v_2 - v_0 - (v_1 - v_0)$$

$$\vdots$$

$$v_m - v_1 = v_m - v_0 - (v_1 - v_0)$$

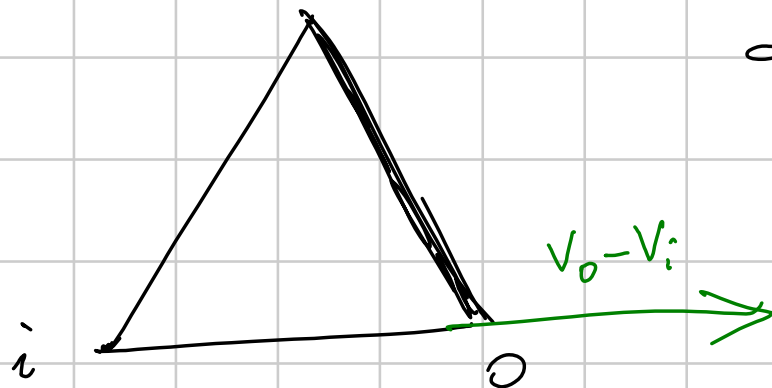
è b-pos



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det > 0 \Rightarrow \text{ok.}$$

$i > 0$ devo vedere che l'ordinamento $v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n$ ha segno $(-1)^i$ cioè che $v_1 - v_0, \dots, \widehat{v_i - v_0}, \dots, v_n - v_0$ ha b-segno $(-1)^i$: ma $v_0 - v_i$ è normale esterne



Immagino devo vedere che

$$v_0 - v_i = -(v_i - v_0)$$

$$v_1 - v_0 = v_1 - v_0$$

$$\vdots$$

$$\widehat{v_i - v_0}$$

Camb's base:

$$i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ (-1) & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{*} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{*} \end{pmatrix}$$

$$\det = (-1)^{i+1} \cdot (-1) \cdot \det(I_{m-1})$$

$$= (-1)^i \quad \square$$

$$v_m - v_0 = v_m - v_0$$

has b-sep no $(-1)^i$ in $\bar{v}$

Prop: sia σ n -simpl. $\tau_1, \tau_2 \subset \sigma$ facce di codim 1

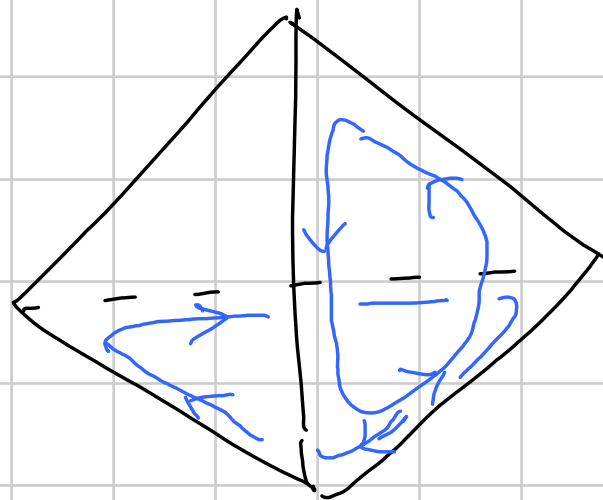
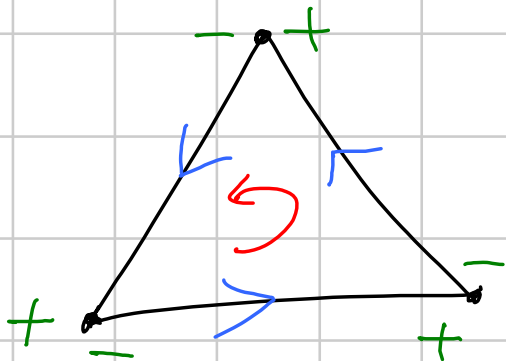
$$\eta = \tau_1 \cap \tau_2 \text{ (facce di codim 2)}$$

$\Rightarrow$ le orientazioni indotte $\sigma \rightsquigarrow \tau_1 \rightsquigarrow \eta$

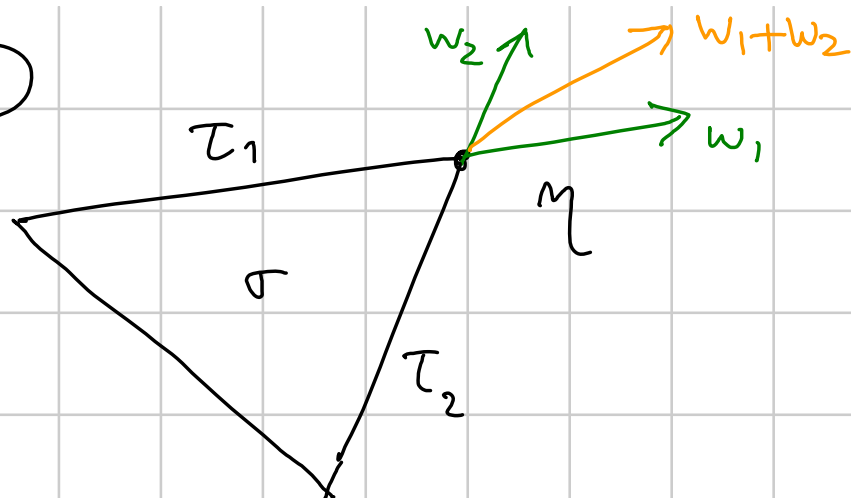
$\sigma \rightsquigarrow \tau_2 \rightsquigarrow \eta$

sono opposte fra loro.

es:



Dim: (b)



$w_1 + w_2$ suve per

$\sigma \rightsquigarrow \tau_1$

$\sigma \rightsquigarrow \tau_2$

w_i suve per $\tau_i \rightsquigarrow \eta$

$v_3, \dots, v_m$ pos per $\sigma \rightsquigarrow \tau_1 \rightsquigarrow \eta$ se

$w_1, v_3, \dots, v_m$ $\bar{e}$ pos per $\sigma \rightsquigarrow \tau_1$, ovvero se

$w_1 + w_2, w_1, v_3, \dots, v_m$ $\bar{e}$ pos. per $\overline{\sigma}$

$v_3, \dots, v_m$ pos per $\sigma \rightsquigarrow \tau_2 \rightsquigarrow \eta$ se

$w_2, v_3, \dots, v_m$ $\bar{e}$ pos $\sigma \rightsquigarrow \tau_2$, ovvero se

$w_1 + w_2, w_2, v_3, \dots, v_m$ $\bar{e}$ pos. per $\overline{\sigma}$

Matrice di cambio

$$\begin{pmatrix} 1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \vdots & & 1 \\ \vdots & & 0 & 1 \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = -1$$

1p

$$\nabla = \text{Conv}(v_0, \dots, v_m)$$

$$\tau_i = \text{Conv}(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_m)$$

$$\tau_i, \tau_j \quad i < j$$

$$\eta = \tau_i \cap \tau_j = \text{Conv}(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_m)$$

$$\sigma \leadsto \tau_i \quad (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_m)$$

$$\sigma \leadsto \tau_j \quad (-1)^j (v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_m)$$

$$\sigma \leadsto \tau_i \leadsto \eta = \tau_i \cap \tau_j \quad : \quad (-1)^i \cdot (-1)^j (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_m)$$

$$\sigma \leadsto \tau_i \leadsto \eta = \tau_i \cap \tau_j \quad : \quad (-1)^{j-1} \cdot (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_m)$$

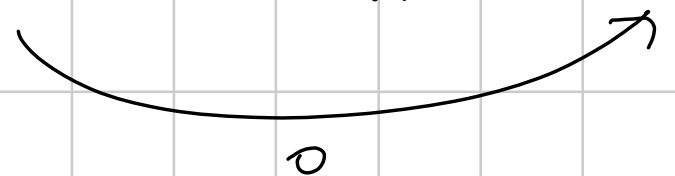
Def: Complesso di catene $\mathcal{C} = \left((C_m)_{m=0}^{+\infty}, (\partial_m)_{m=1}^{+\infty} \right)$ 

dove C_m sono gruppi abeliani (catene di grado m)

$\partial_m: C_m \rightarrow C_{m-1}$ (operatore di bordo di grado m)

t.c. $\partial_m \circ \partial_{m+1} = 0$

$$\dots \rightarrow C_{m+1} \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \rightarrow 0$$




 estensione
convenzionale

Dato $\mathcal{C}$ definiamo

$$Z_n(\mathcal{C}) = \text{Ker} \left(C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \right)$$

n -cicli

$$B_n(\mathcal{C}) = \text{Im} \left(C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \right)$$

n -bordi

Oss: $B_n(\mathcal{C}) \subset Z_n(\mathcal{C})$

Def: $H_n(\mathcal{C}) = Z_n(\mathcal{C}) / B_n(\mathcal{C})$ gruppo abeliano

n -esimo gruppo di omologie di $\mathcal{C}$ -

Oss: se fisso R anello commutativo con 1
e prendo C_n R -moduli
 ∂_n R -lineari

allora $H_n(\mathcal{C})$ ha naturale struttura di R -modulo.

Def: dati complessi di cochaine $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ chiamo morfismo $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ una successione $(\varphi_n: C_n \rightarrow D_n)_{n=0}^{+\infty}$ di omomorfismi l.c.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \rightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{\mathcal{C}}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n^{\mathcal{C}}} & C_{n-1} \rightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} \\
 \cdots & \rightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{\mathcal{D}}} & D_n & \xrightarrow{\partial_n^{\mathcal{D}}} & D_{n-1} \rightarrow \cdots
 \end{array}$$

commut.

Prop: φ induce una successione $\varphi_* = (\varphi_{n*})_{n=0}^{+\infty}$
con $\varphi_{n*} : H_n(\mathcal{C}) \rightarrow H_n(\mathcal{D})$
definita da

$$\varphi_{n*}([z]) = [\varphi_n(z)]_-$$

Dim: Devo vedere z ciclo $\implies \varphi_n(z)$ ciclo
 z bordo $\implies \varphi_n(z)$ bordo

(Facile)



Oss: Se prendo CHAIN categoria con

Obj = Coppie di catene

Hom = morfismi come sopra

ABS categoria con

Obj = Successioni di gruppi abeliani

Hom = Successioni di omomorfismi

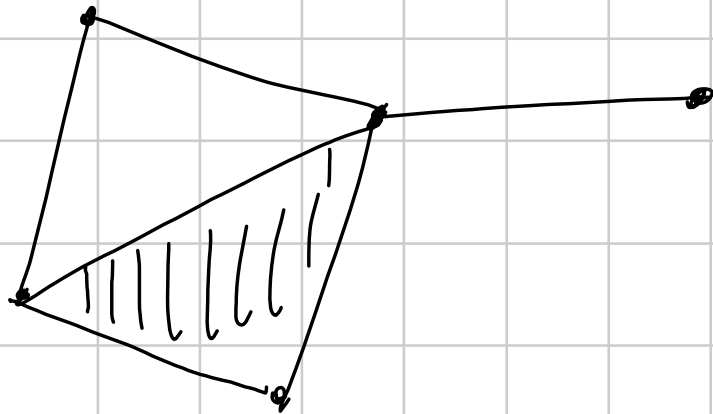
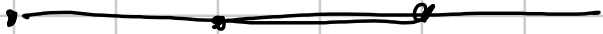
ho che l'ovolo $\bar{\epsilon}$ non funziona covariante

$$H : \text{CHAIN} \longrightarrow \text{ABS}$$

$$\begin{aligned}
 (\psi_{m*} \circ \varphi_{m*})([z]) &= [\psi_m(\varphi_m(z))] \\
 &= (\psi_m \circ \varphi_m)_*([z])
 \end{aligned}$$

Def: Chiamo complesso simpliciale (finito) una collezione $\mathcal{K}$ di simplici in $\mathbb{R}^N$ (N fissato) t.c.

- $\sigma \in \mathcal{K}$, $\tau \subset \sigma$ faccia $\Rightarrow \tau \in \mathcal{K}$
- $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2$ è faccia di entrambi.



$[0,2], [1,3]$

$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$

) NO

$[0,1], [1,2], [2,3]$

$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$

) SI

1 2-simples

6 1-simples

5 0-simples

Notazioni : $\mathcal{K}^{[m]} = \{ \sigma \in \mathcal{K} : \dim(\sigma) = m \}$

$$\mathcal{K}^{(m)} = \bigcup_{j \leq m} \mathcal{K}^{[j]} \quad \begin{array}{l} m\text{-scheletro} \\ (\text{è un sottocomplesso}) \end{array}$$

$$|\mathcal{K}| = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \quad \text{supporto (chiuso di } \mathbb{R}^N)$$

Ese: $|\mathcal{K}| = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \text{int}(\sigma)$

Soluzione: devo vedere 1. $|\mathcal{K}| = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \text{int}(\sigma)$

$$2. \cup = \sqcup$$

$$1. \supset \text{ovvia}; \quad C : x \in |\mathcal{K}| \quad \exists \tau \in \mathcal{K} \text{ t.c. } x \in \tau$$

ma $\tau = \bigsqcup_{\sigma \text{ focia di } \tau} \text{int}(\sigma)$

$$\Rightarrow \exists \sigma \in \mathcal{K} \text{ t.c. } x \in \text{int}(\sigma)$$

$$2. \text{ Sia } x \in \text{int}(\sigma) \cap \text{int}(\tau)$$

$$\Rightarrow \sigma \cap \tau \neq \emptyset \Rightarrow \gamma := \sigma \cap \tau \in \mathcal{K}, \quad x \in \gamma$$

$$\sigma = \bigsqcup_{\omega \text{ faccia di } \sigma} \text{int}(\omega) \implies \gamma = \sigma$$

analogamente $\gamma = \tau \implies \sigma = \tau$ □

K complesso simpliciale orientato
(cioè ogni simplo è orientato a caso) -

$$\sigma \in K^{[m]}, \tau \in K^{[m-1]}, \tau \subset \sigma \quad (\implies \tau \text{ è faccia di } \sigma)$$

$$\varepsilon(\sigma, \tau) = \begin{cases} +1 & \text{se l'orientazione indotta da } \sigma \text{ su } \tau \\ & \text{è quella di } \tau \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\varepsilon(\sigma, \tau) = 0 \quad \text{se } \tau \not\subset \sigma$$

$$\begin{aligned} C_m(K) &= \text{gruppo abeliano libero generato da } K^{[m]} \\ &= \left\{ \sum_{\sigma \in K^{[m]}} m_{\sigma} \cdot \sigma \quad ; \quad m_{\sigma} \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

$$\left(\sum m_{\sigma} \cdot \sigma + \sum n_{\sigma} \cdot \sigma = \sum (m_{\sigma} + n_{\sigma}) \cdot \sigma \right)$$

$$\partial_m: C_m(K) \longrightarrow C_{m-1}(K)$$

$$\partial_m \sigma = \sum_{\tau \in K^{(m-1)}} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \tau$$

(geometricamente: bordo orientato
in modo naturale)

Lemma ($\begin{array}{c} \sigma \rightsquigarrow \tau_1 \rightsquigarrow \gamma \\ \sigma \rightsquigarrow \tau_2 \rightsquigarrow \gamma \end{array}$ opposite) $\Rightarrow \partial_m \circ \partial_{m+1} = 0$

Infatti: $(\partial_m \circ \partial_{m+1})(\sigma)$ $\sigma \in K^{(m+1)}$

$$= \partial_m \left(\sum_{\tau \in \mathcal{K}^{(m)}} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \tau \right)$$

$$= \sum_{\tau \in \mathcal{K}^{(m)}} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \sum_{\eta \in \mathcal{K}^{(m-1)}} \varepsilon(\tau, \eta) \cdot \eta$$

$$= \sum_{\eta \in \mathcal{K}^{(m-1)}} \left(\sum_{\tau \in \mathcal{K}^{(m)}} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \varepsilon(\tau, \eta) \right) \cdot \eta$$

Due addendi: τ_1, τ_2 le
 m -facce di σ che contengono η

$$\text{Ora } \underbrace{\varepsilon(\sigma, \tau_1) \cdot \varepsilon(\tau_1, \eta)}_{\substack{\text{segue di} \\ \sigma \rightsquigarrow \tau_1 \rightsquigarrow \eta}} + \underbrace{\varepsilon(\sigma, \tau_2) \cdot \varepsilon(\tau_2, \eta)}_{\substack{\text{segue di} \\ \sigma \rightsquigarrow \tau_2 \rightsquigarrow \eta}} = 0$$

Ho provato che $(\partial_n)_{n=1}^{+\infty}$ è e $(C_n(K))_{n=0}^{+\infty}$

una struttura di complesso di catene -

Aspirazione: $H_*(K) \cong H_*(|K|)$

$$\begin{aligned} & (\text{anzi } |K| \simeq |L| \\ & \implies H_*(K) \cong H_*(L).) \end{aligned}$$

Prop: Se $\tilde{K}$ coincide con K tranne che per le orientazioni c'è un isomorfismo canonico $H_*(K) \cong H_*(\tilde{K})$.

Dim: $C_n(K) = C_n(\tilde{K})$

Cerco $\varphi_n: C_n(K) \rightarrow C_n(\tilde{K})$ che dia

monfismo di complessi di cochain invertibile

($\Rightarrow \varphi_n$ isomorfismo) -

Poupo $u(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ ha la stessa orientazione} \\ -1 & \text{al} \end{cases}$ $\mathbb{R} \in \mathbb{R}$

$\varphi_n(\sigma) = u(\sigma) \cdot \sigma$ - Affermo: commuta con ∂/∂^2 :

$$\begin{array}{ccc} C_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(\mathbb{R}) \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ C_n(\tilde{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} & C_{n-1}(\tilde{\mathbb{R}}) \end{array}$$

$$\varphi_{n-1}(\partial_n \sigma) = \varphi_{n-1} \left(\sum_{\tau} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \tau \right) = \sum_{\tau} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot u(\tau) \cdot \tau$$

$$\tilde{\partial}_n(\varphi_n \sigma) = \tilde{\partial}_n(u(\sigma) \cdot \sigma) = \sum_{\tau} u(\sigma) \cdot \tilde{\varepsilon}(\sigma, \tau) \cdot \tau$$

Abbiamo: $\varepsilon(\sigma, \tau) \cdot u(\tau) = u(\sigma) \cdot \tilde{\varepsilon}(\sigma, \tau) \quad \text{cioè}$

$$\tilde{\varepsilon}(\sigma, \tau) = u(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot u(\tau) \quad \square$$