ETA 26/11/15

Recupero : 30/11, 11-13 sala seminari
Spostamento : 10/12 $\longrightarrow$ 9/12, 16-18 (E1?)
Orali $\leq$ Natale : 21/12. Dopo: su appuntamento.

Lem: $\mathrm{rank}(G/H) = \mathrm{rank}(G) - \mathrm{rank}(H)$.

$\left(\Rightarrow \quad \sum (-1)^n \operatorname{rank}(G_n) = \sum (-1) \operatorname{rank}(H_n) \right)$.

Def: A, B R-moduli

$$A \otimes_R B = \left\{ \begin{array}{l} R\text{-modulo libero generato} \\ \text{da} \quad a \otimes b, \ a \in A, b \in B \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

$\sim$ generata da $(r_1 a_1 + r_2 a_2) \otimes b = r_1 a_1 \otimes b + r_2 a_2 \otimes b$

$a \otimes (r_1 b_1 + r_2 b_2) = r_1 a \otimes b_1 + r_2 a \otimes b_2$.

Scrivo $a \otimes b$ invece che $[a \otimes b]$.

Prop: $A \otimes_R B$ è caratterizzato da questa PU:

$\exists\, \varphi_0 : A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$ R-bilineare

e $\forall\, \varphi : A \times B \longrightarrow C$ R-bilineare

$\exists!\, \tilde{\varphi} : A \otimes_R B \longrightarrow C$ R-lineare t.c.

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[dr, bend right, "\varphi"'] & A \otimes_R B \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

Dim: $\varphi_0((a,b)) = a \otimes b$.

$$\tilde{\varphi}(a \otimes b) = \varphi((a,b))$$ esteso per R-linearità

ben def. grazie alle rel.

Se ho $\psi_0 : A \times B \longrightarrow C$ con stessa proprietà

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes_R B \arrow[d, "\tilde{\psi}_0"] \arrow[dd, bend left] \\
A \times B \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & C \arrow[d, "\tilde{\varphi}_0"] \\
 & A \otimes_R B
\end{tikzcd}$$

$\longleftarrow$ per l'unicità è id.

$\blacksquare$

Per gruppi ab G, H scrivo $G \otimes H = G \otimes_{\mathbb{Z}} H$.

Oss: $G \otimes \mathbb{Q}$ ha una naturale str di $\mathbb{Q}$-sp. vett; $q \cdot (g \otimes r) = g \otimes (q \cdot r)$.

Lem: G gr. ab fin. gen
$\Longrightarrow \operatorname{rank}(G) = \dim_{\mathbb{Q}}(G \otimes \mathbb{Q})$.

Dim: segue da:

(1) $G \cong \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p_h\mathbb{Z}$

(2) $(G_1 \oplus G_2) \otimes H \cong (G_1 \otimes H) \oplus (G_2 \otimes H)$

(3) $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ $\qquad m \otimes q \longmapsto m \cdot q$

(4) $\mathbb{Z}/_p \otimes \mathbb{Q} = 0$ infatti

$$[n] \otimes r = [n] \otimes \left(p \cdot \left(\tfrac{1}{p} r\right)\right) = p \cdot \left([n] \otimes \left(\tfrac{1}{p} r\right)\right)$$
$$= \left(p \cdot [n]\right) \otimes \left(\tfrac{1}{p} r\right) = 0 \otimes \left(\tfrac{1}{p} r\right) = 0 \quad \_ \quad \boxtimes$$

Il lemma segue da:

Prop: $H < G$ $\quad (G/H) \otimes \mathbb{Q} \cong \dfrac{G \otimes \mathbb{Q}}{H \otimes \mathbb{Q}}$.

Dim: sia $\varphi : G \otimes \mathbb{Q} \to (G/H) \otimes \mathbb{Q}$

$$g \otimes q \longmapsto (g+H) \otimes \mathbb{Q}$$

estesa per $\mathbb{Q}$-linearità

- φ omomorfismo
- φ surgettiva
- $\operatorname{Ker} \varphi \supset H \otimes \mathbb{Q}$ $\quad$ (ho ind. not. $H \otimes \mathbb{Q} \hookrightarrow G \otimes \mathbb{Q}$).
- Provo che $z \in \operatorname{Ker} \varphi \Rightarrow z \in H \otimes \mathbb{Q}$.

$$z = \sum g_i \otimes q_i$$

So che $\varphi(z) = 0 \in G/H \otimes \mathbb{Q}$.

Prendo $N \in \mathbb{Z}$ t.c. $N \cdot q_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i$.

$$\varphi\left(\sum g_i \otimes q_i\right) = \varphi\left(\sum g_i \otimes \frac{1}{N}(Nq_i)\right) =$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{N} \sum g_i \otimes (Nq_i)\right) = \varphi\left(\frac{1}{N} \sum (Nq_i) \cdot g_i \otimes 1\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{N} \sum (Nq_i\, g_i) \otimes 1\right) = \varphi\left(\frac{1}{N}\left(\sum (Nq_i) g_i\right) \otimes 1\right.$$

$$= \varphi\left(\left(\sum (Nq_i) g_i\right) \otimes \frac{1}{N}\right) = \left(\sum (Nq_i) \cdot g_i + H\right) \otimes \frac{1}{N}$$

è 0 $\Longrightarrow \sum (Nq_i) g_i \in H$

$$\Longrightarrow \left(\sum (Nq_i) g_i \right) \otimes \frac{1}{N} \in H \otimes \mathbb{Q}$$

$\Longrightarrow$ come sopra $\displaystyle \sum_i g_i \otimes (Nq_i) \cdot \frac{1}{N} = \sum_i g_i \otimes q_i \in H \otimes \mathbb{Q}$ $\boxed{}$

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^n \underbrace{\dim \left(H_n(X) \otimes \mathbb{Q} \right)}_{b_n^{\mathbb{Q}}(X)}$$

n-esimo numero di Betti

Fatto: se (C_n, ∂_n) è un complesso che calcola $H_*(X)$ ho $\chi(X) = \sum (-1)^n \operatorname{rank}(C_n)$.

Prop: se $\tilde{X} \xrightarrow[\pi]{d:1} X$ rivestimento con X CW-compl
$\Longrightarrow \chi(\tilde{X}) = d \cdot \chi(X)$.

Dim: posso dare a $\tilde{X}$ una struttura di CW-complesso:
$\tilde{X}_0 = \pi^{-1}(X_0)$.
Ricorsivamente se $g_\alpha : S^{n(\alpha)-1} \longrightarrow X_{n(\alpha)-1}$

esistono d distinte $\tilde{f}_\alpha$ t.c.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ D^{n(\alpha)} \arrow[ur, "\tilde{f}_\alpha"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & X_{n(\alpha)} \end{tikzcd}$$

e definisco $\tilde{g}_\alpha = \tilde{f}_\alpha \big|_{S^{n(\alpha)-1}}$.

$\Longrightarrow$ $\tilde{X}$ è CW-complesso con d volte le celle di X in ogni dimensione. $\blacksquare$

<u>Oss</u>: non è vero che b_n sono moltiplicativi:

$$\begin{array}{llccc} & & 2 & 1 & 0 \\ S^2 & H: & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 2:1} & \text{rank} & 1 & 0 & 1 \longrightarrow \chi = 2 \\ & & 2 & 1 & 0 \\ \mathbb{P}^2 & H: & 0 & \mathbb{Z}/2 & \mathbb{Z} \\ & \text{rank} & 0 & 0 & 1 \longrightarrow \chi = 1 \end{array}$$

Numero di Lefschetz (versione di χ per mappe).

Ricordo: $\quad tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$

$$\Rightarrow tr(M^{-1} A M) = tr(A)$$

$$\Rightarrow tr(f \in End(V)) = tr([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}).$$

Prop: $\mathcal{C} = \{(C_n, \partial_n)\}$ complesso di catene di $\mathbb{F}$-spazi vettoriali di dim $< +\infty$ con $C_n = 0$ per $n >> 0$. $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

mappa tra complessi di catene: $\varphi_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ \varphi_n$.
Sia $\varphi_{n*} : H_n(\mathcal{C}) \circlearrowleft$. Allora

$$\sum (-1)^n \operatorname{tr}(\varphi_n) = \sum (-1)^n \operatorname{tr}(\varphi_{n*}).$$

<u>Dim</u>: $H_n = Z_n / B_n = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im}(\partial_{n+1})$.

Prendo $\mathcal{B}_n$ base di B_n;
la estendo a base $\mathcal{B}_n, \tilde{\mathcal{H}}_n$ di Z_n. Noto:

$$
\begin{tikzcd}
C_n \arrow[dddrr, "\partial_n"] & & \\
\cup \; \mathcal{K}_n & & \\
Z_n \; \tilde{\mathcal{H}}_n \arrow[ddr] & & \\
\cup & & B_{n-1} \; \mathcal{B}_{n-1} \\
B_n \; \mathcal{B}_n & H_n \; \mathcal{H}_n &
\end{tikzcd}
$$

Nota: • $\mathcal{H}_n$ = imm. di $\tilde{\mathcal{H}}_n$ in H_n è base di H_n

• $\mathcal{B}_n, \tilde{\mathcal{H}}_n, \mathcal{K}_n$ base di C_n.

Osservo : $\varphi_m(B_m) \subset B_m$

$\varphi_m(Z_m) \subset Z_m$ (serve per φ_{m*})

$$\Rightarrow [\varphi_m]^{\mathcal{B}_m, \tilde{\mathcal{H}}_m, \mathcal{K}_m}_{\mathcal{B}_m, \tilde{\mathcal{H}}_m, \mathcal{K}_m} = \begin{pmatrix} A_m & X_m & Y_m \\ 0 & Q_m & W_m \\ 0 & 0 & P_m \end{pmatrix}$$

$$[\varphi_{m*}]^{H_m}_{H_m} = Q_m .$$

Affermo che $P_m = A_{m-1}$: basta

Tesi $\sum (-1)^m \operatorname{tr}(\varphi_m) = \sum (-1)^m \operatorname{tr}(\varphi_{m*})$

$$\sum (-1)^n \left(tr(A_n) + tr(Q_n) + tr(P_n) \right) = \sum (-1)^n tr(Q_n)$$

$$= \cancel{\sum (-1)^n tr A_n} + \sum (-1)^n tr\, Q_n + \sum (-1)^n tr\, \underbrace{P_n}_{= A_{n-1}}$$

$$\cancel{\sum (-1)^{n+1} tr(A_n)}$$

<u>Ricordo</u>: $f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$. So:

$$\partial_n \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ \partial_n$$

$$\mathcal{B}_{n-1} = \partial_n \mathcal{K}_n$$

$$\varphi_n \cdot \mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n \cdot A_n$$

$$\varphi_n \cdot \mathcal{K}_n = \mathcal{B}_n \cdot Y_n + \tilde{\mathcal{H}}_n \cdot W_n + \mathcal{K}_n \cdot P_n$$

$$\varphi_{n-1} \mathcal{B}_{n-1} = \mathcal{B}_{n-1} \cdot A_{n-1}$$

$$\varphi_{n-1} \mathcal{B}_{n-1} = \varphi_{n-1} \partial_n \mathcal{K}_n = \partial_n \varphi_n \mathcal{K}_n$$

$$= \partial_n \left(\mathcal{B}_n \cdot Y_n + \tilde{\mathcal{H}}_n \cdot W_n + K_n \cdot \underline{P}_n \right)$$

$$= 0 \cdot Y_n + 0 \cdot W_n + \underbrace{\partial_n K_n}_{\mathcal{B}_{n-1}} \cdot \underline{P}_n$$

$$\Longrightarrow \underline{P}_n = A_{n-1}. \qquad \blacksquare$$

Su $\mathbb{Z}$: prendo C_n gruppi ab. <u>liberi</u> fin generati (vero nei casi geometrici).

$$\mathcal{C} \otimes \mathbb{Q} = \left(C_n \otimes \mathbb{Q} \, , \, \partial_n^{\mathbb{Q}} \right)$$

$\partial_n^{\mathbb{Q}}$ estensione $\mathbb{Q}$-lineare ovvia.

Visto: $\underbrace{\sum (-1)^n \operatorname{tr}(\varphi_n \otimes \mathbb{Q})} = \underbrace{\sum (-1) \operatorname{tr}((\varphi_n \otimes \mathbb{Q})_*)}$

Poiché $C_n \cong \mathbb{Z}^{k(n)}$

$C_n \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^{k(n)}$

e se prendo una $\mathbb{Z}$-base di C_n

ho $[\varphi_n]_{\mathbb{Z}}$; usando lei stessa

come $\mathbb{Q}$-base di $C_n \otimes \mathbb{Q}$

ho $[\varphi_n \otimes \mathbb{Q}]_{\mathbb{Q}} = [\varphi_n]_{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow$ LHS si calcola
senza usare $\mathbb{Q}$.

Volendo fare lo stesso vorrei usare

$$\varphi_{n_*} : H_n \longrightarrow H_n$$

omomorf. tra gruppi ab. ma non liberi

Posso prendere :

$$\overline{\varphi}_n : \frac{H_n}{\mathrm{Tors}(H_n)} \longrightarrow \frac{H_n}{\mathrm{Tors}(H_n)}$$

ora sono liberi e posso prendere

$$[\overline{\varphi}_n]_{\mathbb{Z}}$$

Fatto: è vero che $\mathrm{tr}[\overline{\varphi}_n]_{\mathbb{Z}} = \mathrm{tr}((\varphi_n \otimes \mathbb{Q})_*)$

non è ovvio perché a priori

$$(\varphi_n \otimes \mathbb{Q})_* = \varphi_{n_*} \otimes \mathbb{Q}.$$

In generale definiremo

$$H_n^R = \mathrm{Hom}(C_n \otimes_{\mathbb{Z}} R)$$

omologia a coeff in R (gruppo abeliano)

e **non** è sempre vero che $H_n^R = H_n \otimes R$.

Però con $R = \mathbb{Q}$ è vero. (Vedremo).

Def: Lefschetz number $\lambda(\varphi) = \sum (-1)^n \mathrm{tr}(\varphi_n)$

Per X CW-complesso, $f: X \to X$ continua

$$\lambda(f) = \sum (-1)^n \, tr \left(f_{*,n} : H_n(X) \to H_n(X) \right).$$

<u>Oss</u>: $f_0 \simeq f_1 \implies \lambda(f_0) = \lambda(f_1)$.

<u>Oss</u>: l'affermazione

$$\lambda(f) = \sum (-1)^n \, tr \left(f_n : C_n \to C_n \right)$$

ha senso solo se f è una mappa nella categorie con cui calcolo H (simpliciale, cellulare, ...)

<u>Oss</u>: $\chi(X) = \lambda(id_X)$.

<u>Teo</u>: $g: X \to X$ continua con $\lambda(g) \neq 0$

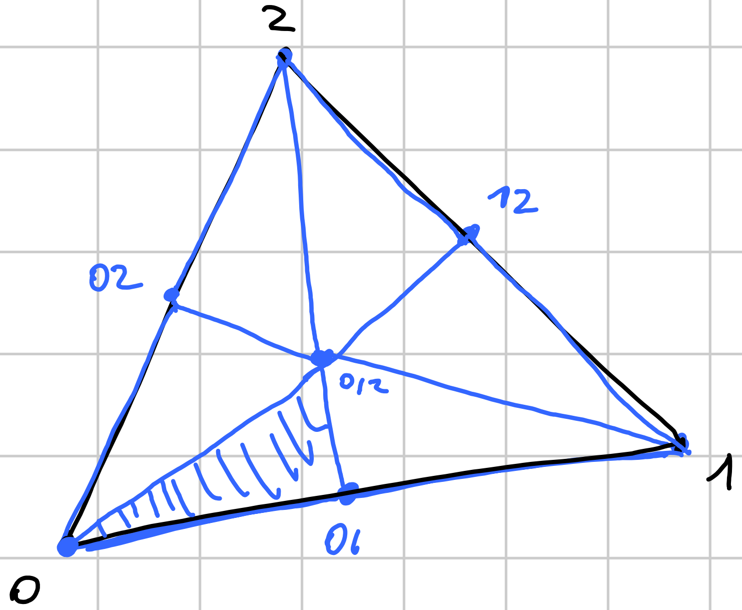
$\Longrightarrow \quad Fix(g) \neq \emptyset$.

<u>Def</u>: chiamo <u>centro</u> di simplesso $Conv(v_0, \dots, v_m)$

$$c(v_0, \dots, v_m) = \frac{1}{m+1}(v_0 + \dots + v_m).$$

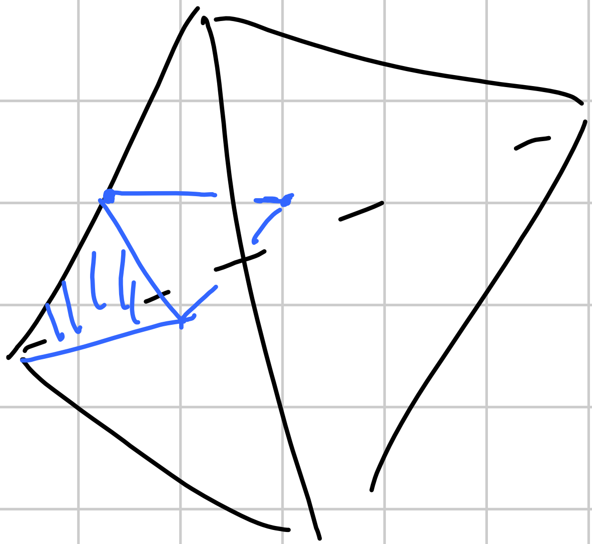
Suddivisione baricentrica di σ simplesso

$$\sigma' = \{ \mathrm{Conv}(c(\tau_0), \dots, c(\tau_k)) : \tau_0 \subset \dots \subset \tau_k \text{ facce} \}.$$



<u>Oss</u> (esercizio) :

$$\sigma' = (\partial\sigma)' \cup \{c(\sigma)\} \cup \{\text{Cono}(c(\sigma), \tau) : \tau \in (\partial\sigma)'\}$$



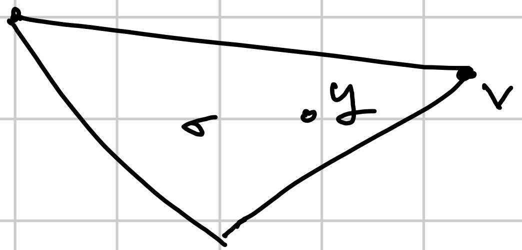
<u>Def</u> : $\displaystyle K' = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma'$

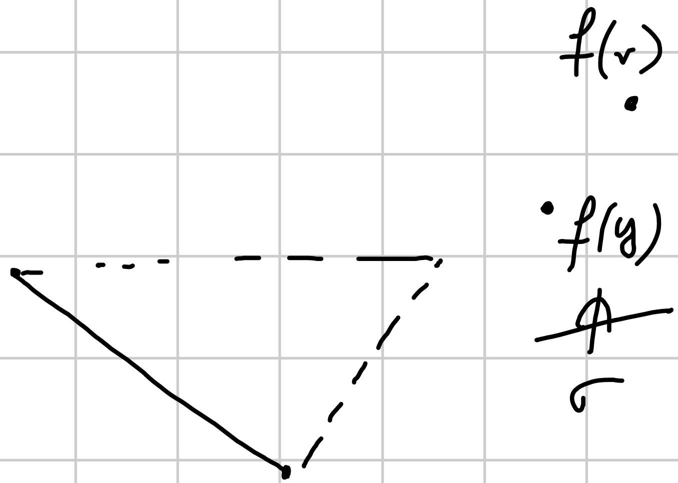
Lem: $f : K \to K$ simpliciale

$\Longrightarrow \mathrm{Fix}(f)$ sottocomplesso di K'.

Dim: Basta vederlo per $f : \sigma \to K$ $\forall \sigma \in K$.

Se $v \in \sigma^{[0]}$ e $f(v) \in \sigma^{[0]}$





$\Rightarrow$ $Fix(f) \subset$ Faccia di σ opposta a v.

Iterando il procedimento trovo o $Fix(f) = \emptyset$

o $f(\sigma) \subset \sigma$ $(\Rightarrow f(\sigma)$ faccia di $\sigma)$.

Ora se $f(\sigma) \subset \sigma$ ovviamente $Fix(f) \subset f(\sigma)$

quindi mi riduco a $f(\sigma)$. Iterando trovo

o $Fix(f) = \emptyset$ o $f(\sigma) = \sigma$.

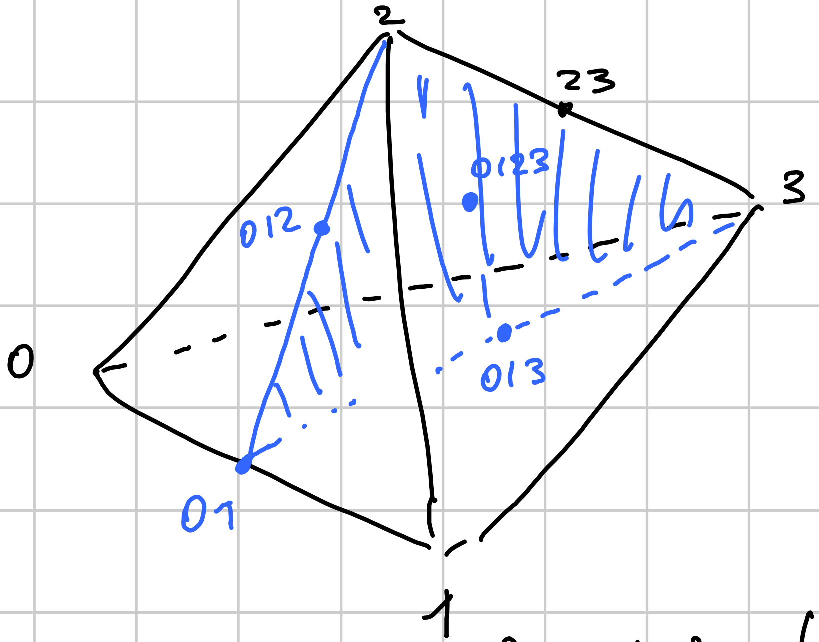
Dunque $f(\sigma) = \sigma$, $\sigma = Conv(v_0, \dots, v_m)$

f indotta $\omega \in \mathfrak{S}(v_0, \dots, v_n) = \mathfrak{S}_{n+1}$

$$\Rightarrow \mathrm{Fix}(f) = \left\{ \sum t_i v_i \ : \ t_{\omega(i)} = t_i \right\}$$

Se provo che l'equazione $t_i = t_j$ definisca un sottocomplesso di σ' ho concluso.

Questo è facile:



$$\omega = (0\ 1)$$
$$t_0 = t_1$$

In generale:
$$\{t_i = t_j\} = \bigcup_{\substack{\tau_0 \subset \dots \subset \tau_k \\ \#(\{v_0, v_1\} \cap \tau_i) \neq 1}} \mathrm{Conv}(c(\tau_0), \dots, c(\tau_k)) .$$

$\blacksquare$

Lem: $f : K \to K$ simpliciale t.c. $\mathrm{Fix}(f) \subset K$

Dato $\sigma \in K$ ho

$$f(\sigma) = \sigma \iff \sigma \subset \mathrm{Fix}(f)$$

Dim: $\Leftarrow$ ovvio

$\Rightarrow$ $f(\sigma) = \sigma \Rightarrow f(c(\sigma)) = c(\sigma)$

$\Rightarrow$ σ è l'unico simplesso che contiene $c(\sigma)$ nella parte interna; $\mathrm{Fix}(f)$ sottocompl. $\Rightarrow \sigma \subset \mathrm{Fix}(f)$. $\boxtimes$