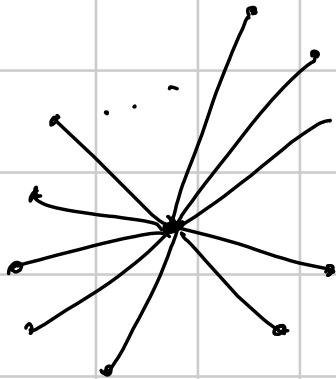


ETA 24/11/15

Prop: X compl. simpl. onto ω lts C_1 cpt
 $\# \{ \sigma : G \cap \text{int}(\sigma) \neq \emptyset \} < +\infty$

↑
serve:



$$V = \mathbb{N}$$

$$\mathcal{K} = \{ \{n\} : n \in \mathbb{N} \} \cup \{ \{v, n\} : n \neq v \}$$

$$C = 0$$

CW-complexi.

Def: chiamo attacco di una n -cella a uno spazio X
lo spazio $X \cup_g D^n$ con $g: S^{n-1} = \partial D^n \rightarrow X$ cont
cioè $X \sqcup D^n / \sim$ con la top. quoziente.
 $y \sim g(y)$
 $\forall y \in S^{n-1}$

Es: $\{pt\} \cup_g D^n = S^n$.

Se $Y = X \cup_g D^n$ definisco $f: D^n \rightarrow Y$ $f(y) = [y]$
ovvero tra B^n e la sua immagine.

Def. chiamo CW complesso uno spazio $X = \bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n$ con
 $X_0 =$ insieme discreto

X_n ottenuto per attaccamento simultaneo di n celle a X_{n-1}
lungo mappe $\{g_\alpha: S^{n-1} \rightarrow X : \alpha \in A_n\}$

X ha la top. debole indotta dal ric $\{X_n\}$ cioè

$C \subset X$ chiuso $\iff f_\alpha^{-1}(C)$ chiuso in $D^n \forall \alpha \in A$
dove ho posto:

$$A = A_n$$

chiamo $f_\alpha: D^{m(\alpha)} \rightarrow X_n$ che "estende" g_α .

Oss: un Δ -complesso (in part. un complesso simpliciale geom. o la realiz. di un c.s. astratto) è in modo naturale un CW-complesso. Se

$$\sigma_\alpha: \Delta_{n(\alpha)} \rightarrow X_{n(\alpha)} \quad X_k = \bigcup_{n(\alpha) \leq k} \sigma_\alpha(\Delta_{n(\alpha)})$$

è un omeo e $\Delta_{n(\alpha)} \cong D^{n(\alpha)}$

$\Rightarrow X_{k+1}$ è ottenuto da X_k per attacco di $(k+1)$ -celle
 lungo $\sigma_\alpha|_{\dots}: \partial \Delta_{n(\alpha)} \rightarrow X_k$
 dove $n(\alpha) = k+1$ - $\cong \Sigma^{n(\alpha)-1}$

Oss: X CW-complexo con $g_\alpha: \Delta_{m(\alpha)} \rightarrow X_{m(\alpha)-1}$
che sono mappe PL (ricorsivamente) dove X
è un complesso simpliciale.

Idea: suddividere molto.

Quotient di un CW-complexo:

$$C_m = \langle g_\alpha : m(\alpha) = m \rangle$$

$$C_0 = \langle X_0 \rangle$$

Defining $\partial_m : C_m \rightarrow C_{m-1}$.

$$\partial_0 \equiv 0 \quad \partial_1(g_\alpha) = g_\alpha(+1) - g_\alpha(-1)$$

($m \geq 2$)

$$m(\alpha) = 1 \quad D^1 = [-1, 1]$$

$$g_\alpha : \sum_{n-1}^{m-1} \rightarrow X_{m-1} ; \quad \partial_m g_\alpha = \sum_{\beta : m(\beta) = m-1} d(g_\alpha, g_\beta) \cdot g_\beta$$

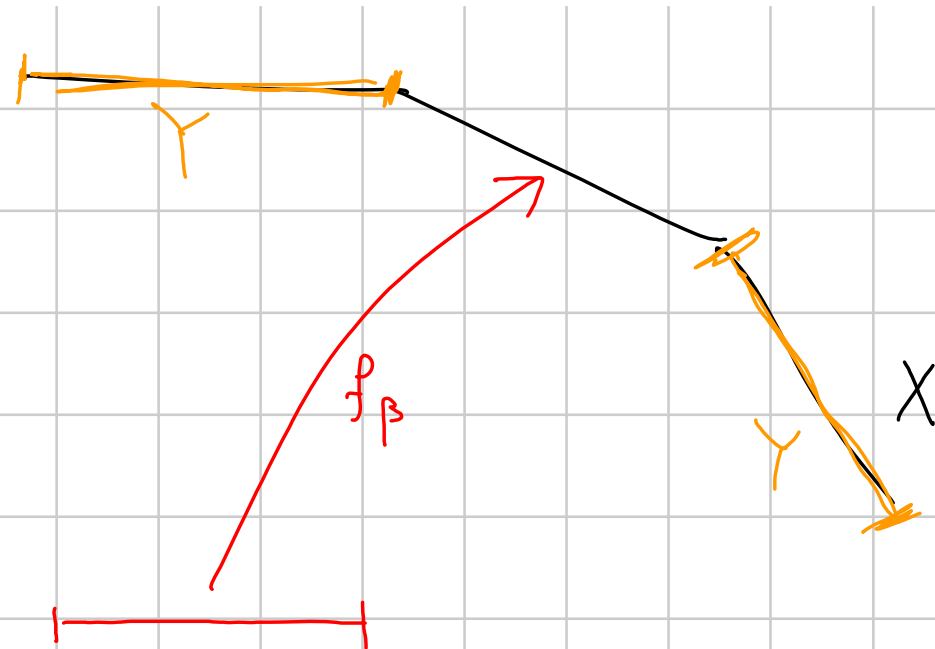
$$f_\beta : D \rightarrow X_{m-1}$$

$$\text{Поэтому } Y_\beta = X_{m-1} \setminus f_\beta(B^{m-1})$$

$$\begin{array}{ccc}
 D^{m-1} & \xrightarrow{f_\beta} & X_{m-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \pi_\beta \\
 D^{m-1}/S^{m-2} & \xrightarrow{h_\beta} & X_{m-1}/Y_{m-1}
 \end{array}$$

h_β unico indotto da f_β .

Scego l'unico canonico



$$\begin{array}{ccccc}
 D^{n-1} / S^{m-2} & \xrightarrow{x \mapsto \frac{x}{1-\|x\|}} & \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\} & \xrightarrow{\text{inverse stereographic}} & S^{m-1} \\
 & & & \nearrow & \\
 & & & \mathcal{U}_{m-1} &
 \end{array}$$

$$d(g_\alpha, g_\beta) =$$

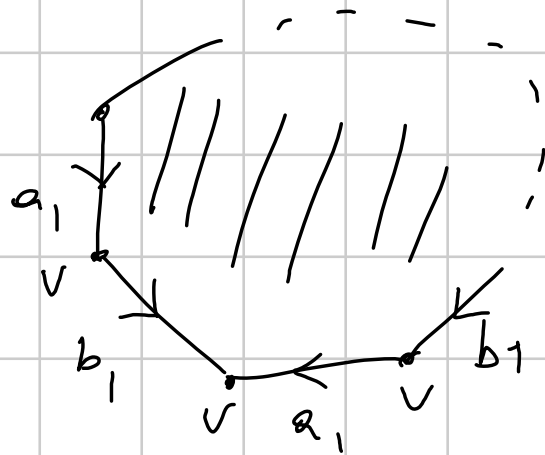
$$\deg \left(S^{m-1} \xrightarrow{g_\alpha} X_{m-1} \xrightarrow{\pi_\beta} X_{m-1} / Y_{m-1} \xrightarrow{h_\beta^{-1}} D^{n-1} / S^{m-2} \xrightarrow{\mathcal{U}_{m-1}} S^{m-1} \right)$$

Oss: è un modo utile di contare quante volte (con segno)
 l'\$(m-1)\$-cella \$f_\beta(D^{m-1})\$ compare nella \$(m-1)\$-sfera \$g_\alpha(S^{m-1})\$

NOTA

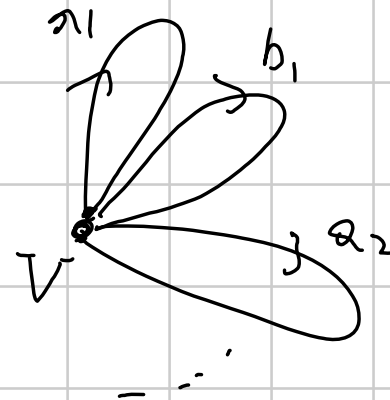
Fatto (esercizio) : viene un complesso di Čech -

Es: $k \cdot T =$



Struttura di CW complesso: $X_0 = \{v\}$

$X_1 =$ bouquet di $2k$ circonferenze
 (tutte le $2k$ $\partial D^1 \rightarrow \{v\}$
 sono costanti)



$$k.T = X_1 \cup_g D^2$$

$$g = [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_k, b_k]$$

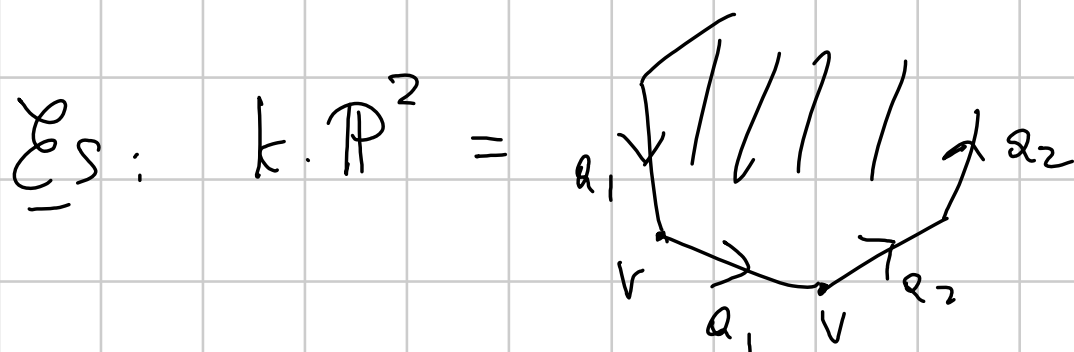
$$\partial_1 a_j = \partial_1 b_j = 0$$

$$\partial_2 g = 0$$

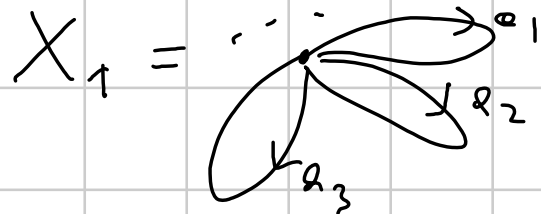
$$\Rightarrow H_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z}$$

$$H_2 = \mathbb{Z}$$



$$X_0 = V$$



$$k\text{-}\mathbb{P}^2 = X \cup_g D^2$$

$$g = a_1^2 a_2^2 \dots a_k^2$$

$$\partial_1 a_j = 0$$

$$\partial_2 g = 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_k$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}/2$$

$$H_2 = 0$$

$$\underline{\text{Es:}} \quad \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \underset{x \sim kx}{=} \mathbb{S}^n \underset{x \sim \pm x}{/}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \geq 0 \right\} \underset{x \sim \pm x}{/} \text{ se } x_{n+1} = 0$$

$$= \mathbb{D}_+^n \underset{\substack{x \sim -x \\ \text{se } x \in \mathbb{S}^{n-1}}}{/}$$

$$= \mathbb{S}^{n-1} \underset{x \sim x}{/} \bigcup_g \mathbb{D}_+^n$$

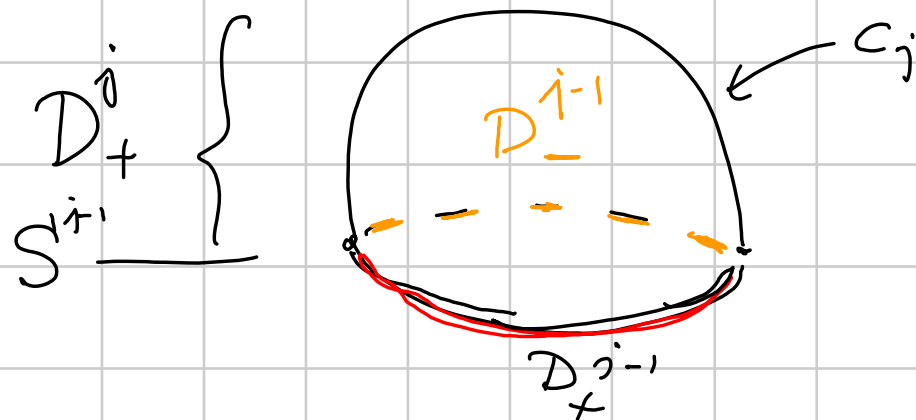
$$= \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \cup \mathbb{D}_+^n$$

$\Rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ha str. di CW-compl. con 1 cella C_j

dim $j = 0, 1, 2, \dots, n$

NOTA Le def di ∂^{cw} e dunque H^{cw}
 use dep: $(f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1})$

Chiameremo di compendee $d(C_j, C_{j-1})$:



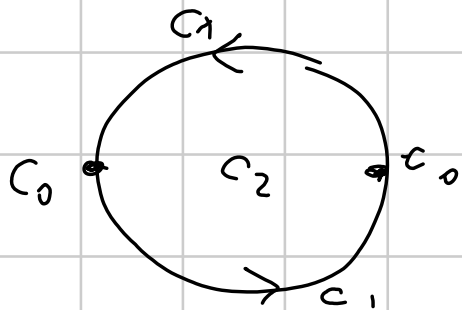
$$C_j = D_+^j$$

$\Rightarrow \partial C_j$ contiene due copie
 di C_{j-1}

ignorando l'orientazione -

Le due tracce di C_{j-1} dentro ∂C_j sono ottenute l'una dall'altra tramite l'antipolo - Sappiamo che una conserva orientazione per j pari, invertita per j dispari -

$$\Rightarrow \partial_j C_j = \begin{cases} 2 \cdot C_{j-1} & j \text{ pari} \\ 0 & j \text{ dispari} \end{cases}$$



$$H_*(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$$

$$\begin{array}{lcl}
 n=2k & C: & 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \\
 & H: & 0 \quad \mathbb{Z}/2 \quad 0 \quad \mathbb{Z}/2 \quad 0 \quad \mathbb{Z}/2 \quad 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 n=2k+1 & C: & 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \\
 & H: & \mathbb{Z} \quad 0 \quad \mathbb{Z}/2 \quad 0 \quad \mathbb{Z}/2 \quad 0 \quad \mathbb{Z}/2 \quad 0
 \end{array}$$

Oss: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^n / x \sim -x$

$\Rightarrow$ è varietà orientabile per n dispari, non per n pari.

$$\mathcal{L}_S: \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \quad \sim \quad \mathbb{S}^{2n+1} / z \sim \alpha z$$

$$= \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} : \|z\| = 1, z_{n+1} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\} / \sim$$

$z \sim \alpha \cdot z$
 $z_{n+1} = 0$

exist sup. della sfera unitaria 1.

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{2n+1}$$

$$= D_+^{2n} / \sim \quad \sim \quad \mathbb{S}^{2n-1} / \sim \quad \cup \quad D_+^{2n}$$

$z \sim \alpha z$
 $z \in \mathbb{S}^{2n-1}$

$z \sim \alpha z$

$$= \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cup D_+^{2n}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ he strutt di AW-compl con celle
 $C_0, C_2, \dots, C_{2n} \Rightarrow H_* = C_* \quad \mathbb{Z}$ in grado pari
 tra 0 e $2n$
 0 alt

Fatto: Se calcolo l'omologia di un Δ -complesso
 pensato come AW-complesso trova le stesse
 (anzi: i complessi di cotang sono naturalmente isomorfi) -

Caratteristica di Eulero

$$* \dim_{\mathbb{F}}(C_n) < +\infty \quad \forall n$$

Leu: Sia $\mathbb{F}$ campo e $\mathcal{C} = \{ (C_n, \partial_n) \}_{n=0}^{+\infty}$ complesso di cochain
di $\mathbb{F}$ -sp. vett. * con ∂_n $\mathbb{F}$ -lin. e $C_n = 0$ per $n \gg 0$
($\Rightarrow H_n(\mathcal{C})$ è $\mathbb{F}$ -sp. vett.). Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim_{\mathbb{F}} H_n(\mathcal{C}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim_{\mathbb{F}} C_n$$

Dim: $\dim H_n(\mathcal{C}) = \dim \left(\frac{Z_n(\mathcal{C})}{B_n(\mathcal{C})} \right) = \dim Z_n - \dim B_n$

$$\partial_m : C_n \longrightarrow C_{n-1} \implies \dim C_n = \dim Z_n + \dim B_{n-1}$$

$$\implies \sum (-1)^n \dim H_n = \sum (-1)^n (\dim Z_n - \dim B_n)$$

$$= \sum (-1)^n \dim Z_n + \sum (-1)^{n+1} \dim B_n$$

$$= \sum (-1)^n \dim Z_n + \sum (-1)^n \dim B_{n-1}$$

$$= \sum (-1)^n (\dim Z_n + \dim B_{n-1}) = \sum (-1)^n \dim C_n. \quad \square$$

Def: se G è gruppo ab. fin. gen. $\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}^k \oplus T$, $\#T < +\infty$
Pongo $k = \text{rank}(G)$, $T \cong \text{Tors}(G) = \{g \in G: 0 \in \mathbb{Z} \cdot g\}$ -

Prop: Se $\{(C_n, \partial_n)\}$ compl. coesistente con C_n fin. gen.
e $C_n = 0$ per $n \gg 0$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{rank}(H_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \text{rank}(C_n)$$

(Dimostrare.)

Oss: se X è sp. top. e $\{(C_n, \partial_n)\}$ è un complesso che calcola le sue omologie h_*

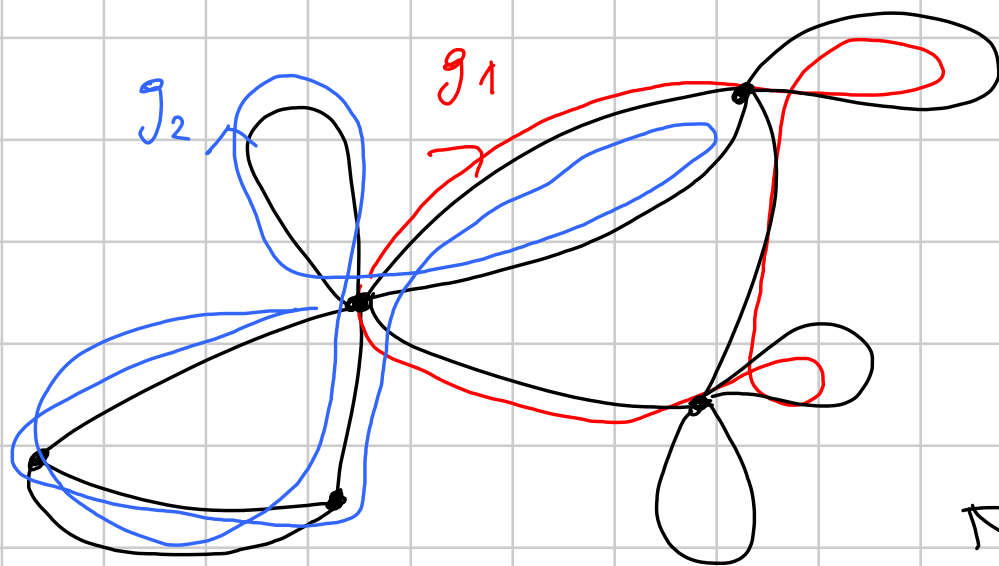
$$\chi(X) := \sum (-1)^n \text{rank}(H_n(X))$$

caratteristica di Euler

(ovviamente inv $\simeq$)

si calcola senza calcolare gli H_n , usando solo i
 $\text{rank}(C_n) = \# \text{ singlari/celle } n\text{-dim nelle str. di } X$

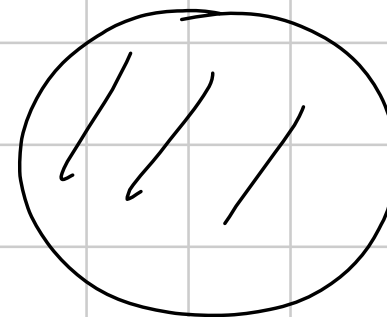
Es:



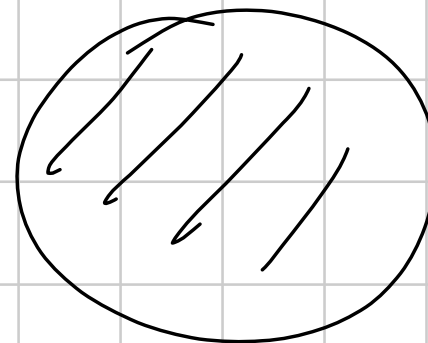
1 CW-coupl. X_1

$$\chi = 5 - 12 + 2$$

g_1



g_2



La Prop. segue da:

Lemma: $\text{rank}(G/H) = \text{rank}(G) - \text{rank}(H)$

Infatti: $H_m = Z_m / B_m \Rightarrow \text{rank } H_m = \text{rank } Z_m - \text{rank } B_m$

$\partial_m: C_n \rightarrow C_{n-1} \Rightarrow B_{m-1} \cong C_n / Z_m \Rightarrow$
 $\text{rank } B_{m-1} = \text{rank } C_n - \text{rank } Z_m$

concludo con la stessa linea

Def: R anello commut. con 1

Chiamo R -modulo A un gruppo abeliano $(A, +, 0)$ con

$$\bullet: R \times A \rightarrow A \text{ con } (\pi_1 + \pi_2) \cdot a = \pi_1 \cdot a + \pi_2 \cdot a$$

$$\pi \cdot (a_1 + a_2) = \pi \cdot a_1 + \pi \cdot a_2$$

$$(\pi_1 \cdot \pi_2) \cdot a = \pi_1 \cdot (\pi_2 \cdot a)$$

$$1 \cdot a = a$$

oss: A gruppo ab $\iff A$ $\mathbb{Z}$ -modulo

$$\underbrace{=} \implies n \cdot a = \underbrace{a + \dots + a}_n$$