

ETA 22/10/15

loc PL-varietà = var. con cambi di carte loc PL

Def: compl. simpliciale affatto $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(V)$, $\#V < +\infty$, $\bigcup \mathcal{K} = V$
chiuso per sottosistemi: $\sigma \in \mathcal{K}, \tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in \mathcal{K}$

Realizzazione: $V = \{v_1, \dots, v_m\} \quad \mathbb{R}^m$
 $\tilde{\mathcal{K}} = \{ \text{conv}(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) : \{i_1, \dots, i_p\} \in \mathcal{K} \}$

Ben def / isomorfismo simpliciale -

Prop: X varietate PL $\Leftrightarrow$ loc PL - varietate $(X_{cpt}, \partial X = \emptyset)$

"Dih": $\Rightarrow \forall x \in X, St(x, X) \cong_{PL} \Delta_n$ cu $x \mapsto 0$

$\Rightarrow \{ Ost(x, X) : x \in X \}$ ric. open.

opri $Ost(x, X)$ e loc PL ouero a $int(\Delta_n)$

Basta usare loc caue carte -

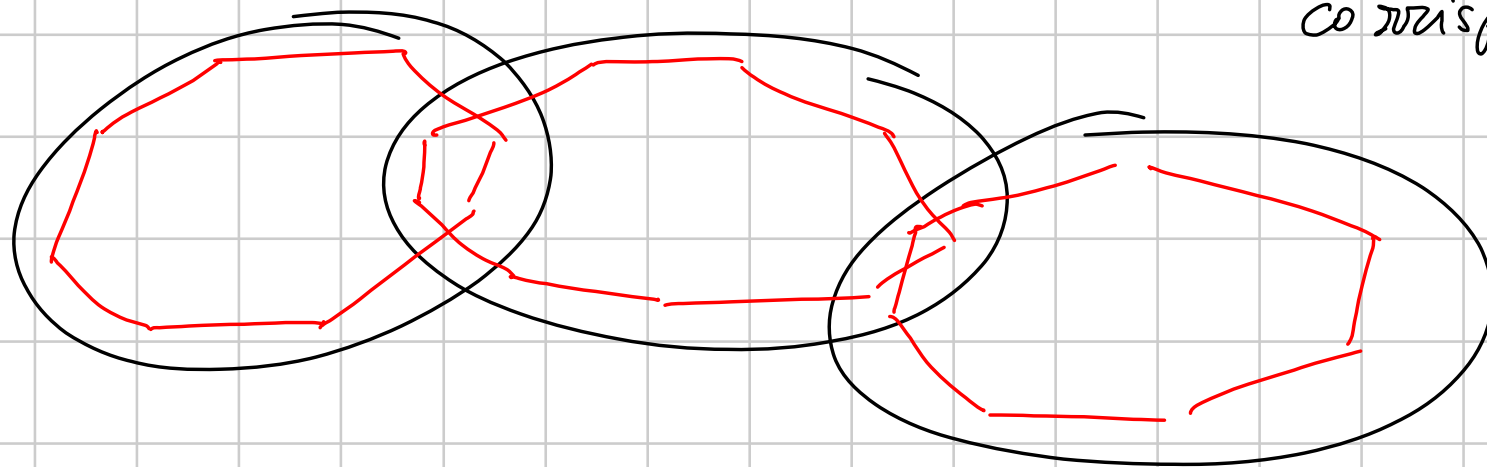
⇐ Ho cate $\{(U, \alpha)\}$ con cambi loc PL.

Copro X con $\# \rightarrow \infty$ di cate e osservo che
dentro ogni U posso trovare un $V \cong_{PL} \Delta_m$ t.c. è

corrisp. $\alpha(V)$

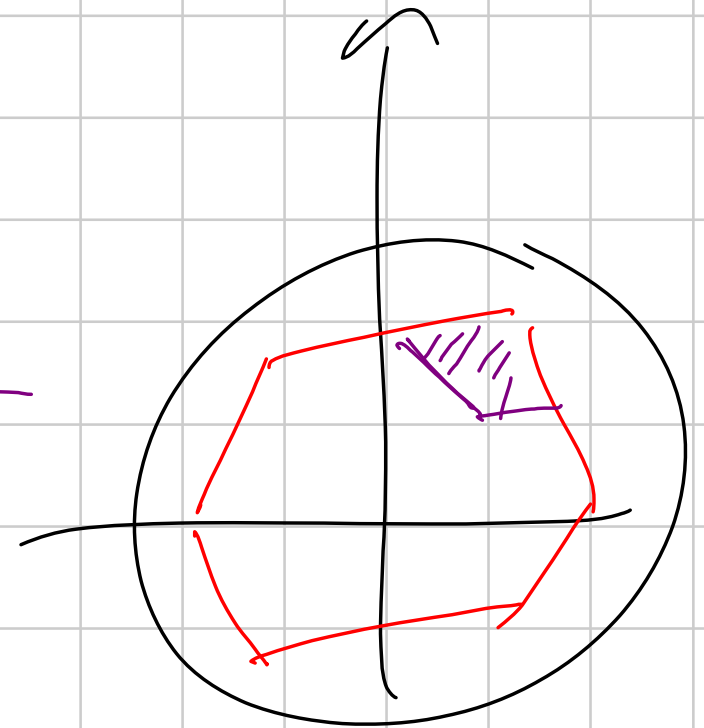
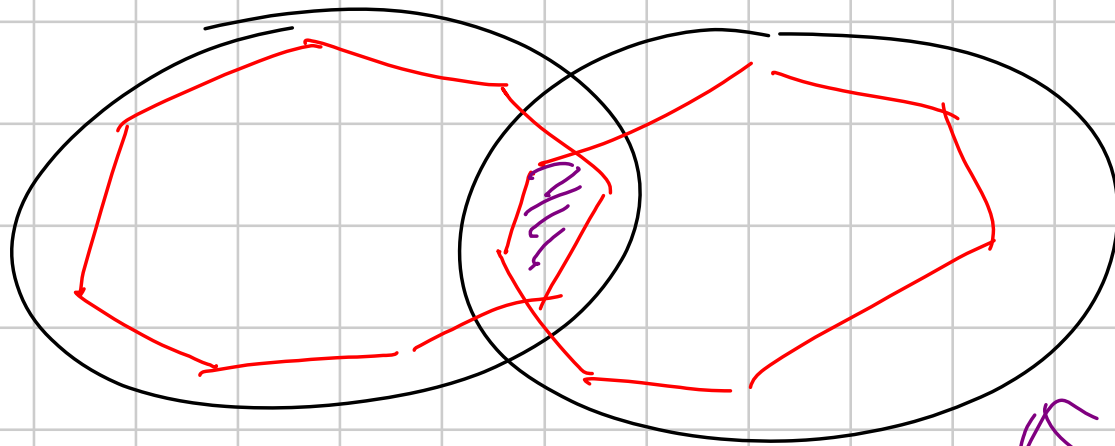
continuo

a coprire.



Considero tutte le possibili interazioni tra gli $\alpha(V)$

e le rileggo nei V :



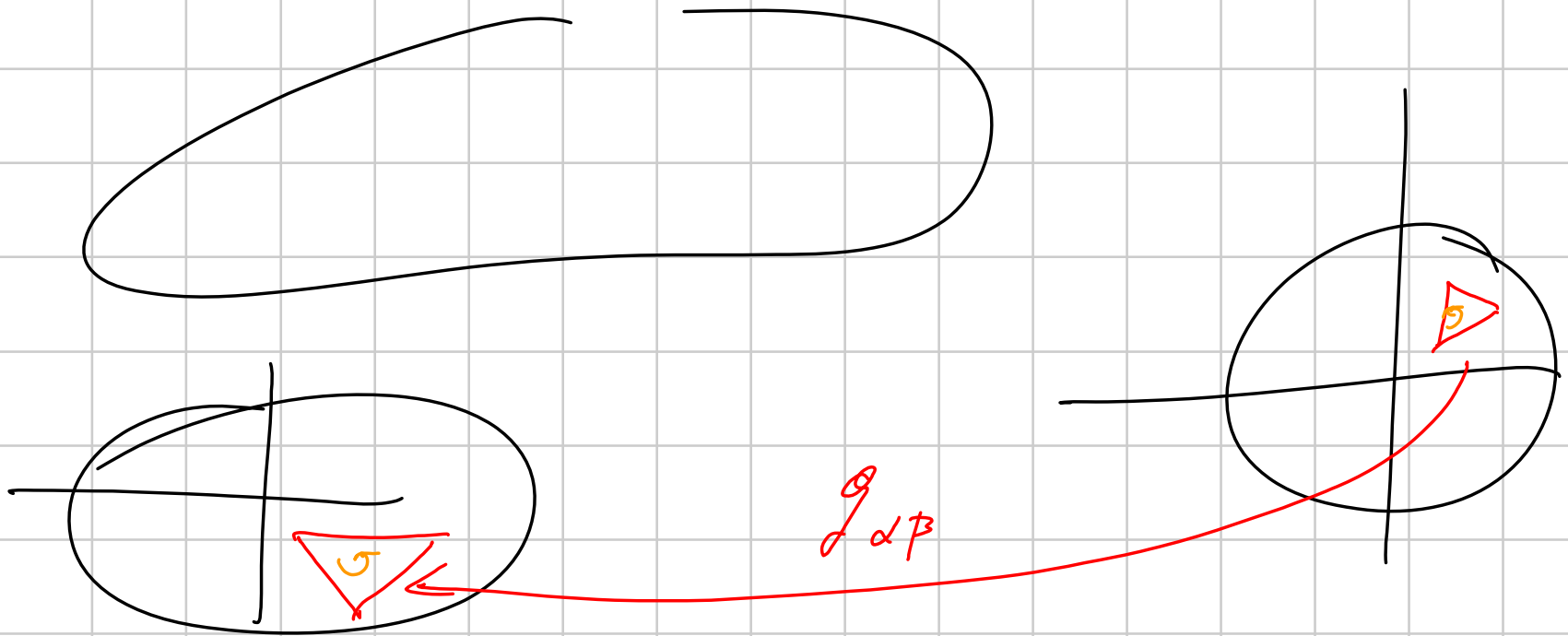
Suddivido in ogni V in modo che tali intersezioni siano
 sottocomplessi. Nelle fam. dei V ho strutture di compl.
 simpliciale t.c. tramite alcune identificazioni (ciò che
 si sovrappone in X usando le α) tratto X
 Costruisco il compl. simpl. astratto che è $\bigsqcup V / \text{identif}$

e la sua realizzazione è omeo a X . ▮

Orientez PL : $X^{(m)} = |K|$ $(X^{(m)} : X \text{ è } m\text{-var})$
 orientez per $K^{[m]}$ t.c. $\varepsilon(\sigma_1, \tau) + \varepsilon(\sigma_2, \tau) = 0 \quad \forall \sigma_1 \cup \sigma_2 = \tau$

Oriented loc PL : atlante loc PL $\{ (U, \alpha) \}$ t.r.

ogni $g_{\alpha\beta}$ preserva l'orient. degli n -simplex
indotti da $\mathbb{R}^n$



E' la stessa nozione:

$PL \rightsquigarrow \text{loc } PL$

considera carte $\text{loc } PL$ compatibili con str. PL .

Date una carta (U, α) se $\sigma_1, \sigma_2 \subset U$ sono m -singl.
con $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ha

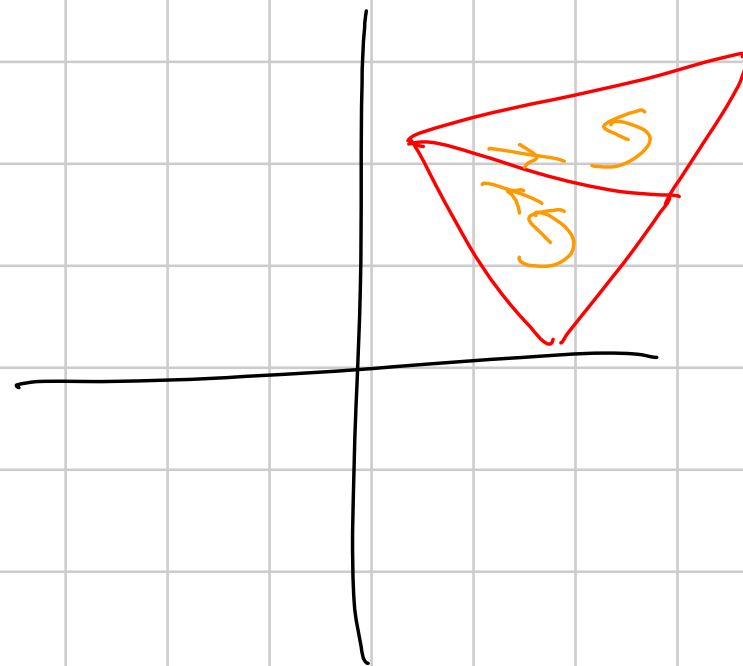
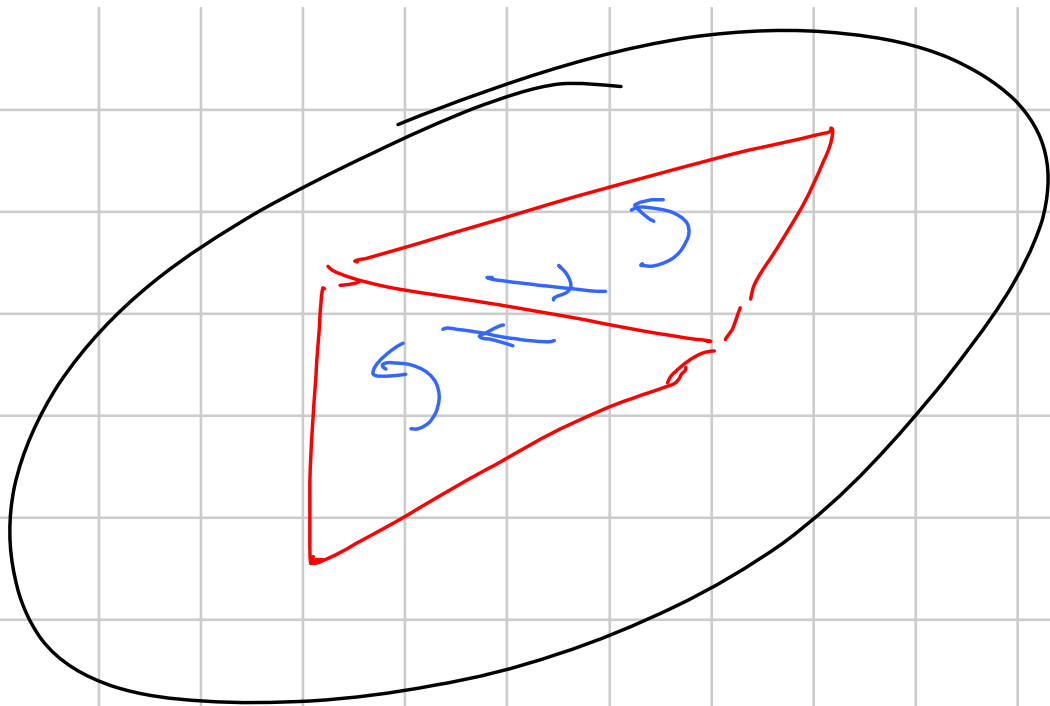
$$\varepsilon(\sigma_1, \tau) + \varepsilon(\sigma_2, \tau) = 0 \quad \text{se oriento } \sigma_1, \sigma_2 \text{ in } \mathbb{R}^m$$

$$\varepsilon(\alpha(\sigma_1), \alpha(\tau)) + \varepsilon(\alpha(\sigma_2), \alpha(\tau)) = 0 \quad \alpha \text{ oriento } \alpha(\sigma_1), \alpha(\sigma_2) \text{ in } X$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} & \text{oppure} \quad \alpha: \sigma_1 \rightarrow \alpha(\sigma_1) \\ & \quad \quad \alpha: \sigma_2 \rightarrow \alpha(\sigma_2) \end{aligned}$$

sono pos

oppure neg



$\Rightarrow$ per U connesse ho che per tutti i $\sigma \subset U$
 $\text{le } \alpha \text{ e } \bar{\alpha}$ pos, oppure per tutti $\bar{\alpha}$ neg.

Seleziono il sottotelaio delle carte pos.

$\text{loc PL} \rightarrow \text{PL}$ $h_0(U, \alpha)$ con $\det g_{\alpha\beta} > 0$

$\Rightarrow$ posso orientare $\alpha(\sigma)$ come σ via α
(buona def)

$\varepsilon(\sigma_1, \tau) + \varepsilon(\sigma_2, \tau) = 0$ vale in $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ vale in X -

(Tutti gli spazi sono connessi salvo avviso contrario.)

Prop: Sia $M^{(n)}$ PL-var. chiusa (cpt e $\partial M = \emptyset$). Allora

$$H_n(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } M \text{ è orientabile} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dim: M orient. oriento $K^{(n)}$ come dato da una orient. $\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$

Dico che $Z_n(K) = \mathbb{Z} \langle \sigma_1 + \dots + \sigma_p \rangle$.

Ogni $\tau \in K^{(n-1)}$ $\bar{\epsilon}$ $\tau = \sigma_{i_1} \cap \sigma_{i_2}$
e $\epsilon(\sigma_{i_1}, \tau) \neq \epsilon(\sigma_{i_2}, \tau) = 0$

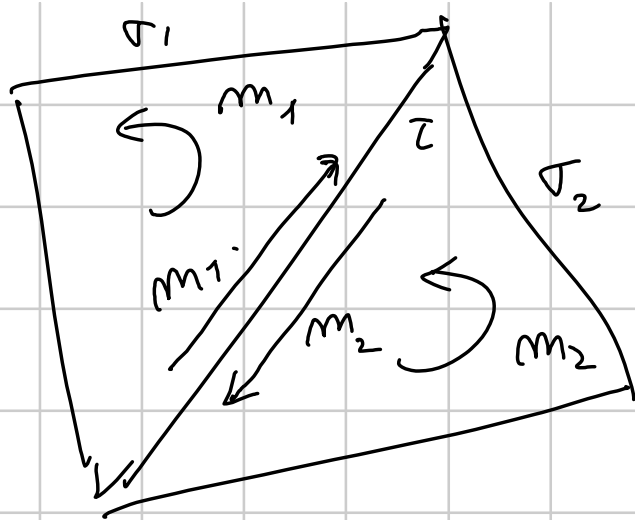
$\Rightarrow \sigma_{i_1}$ e σ_{i_2} hanno stesso coeff in quadratici $z \in \mathbb{Z}_n(K)$

$\Rightarrow$ ok per convenzione

$$B_n(K) = 0 \quad \Rightarrow H_n = \mathbb{Z}_n / B_n = \mathbb{Z}_n$$

Viceversa se $K^{[n]} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ e $H_n(K) \neq 0$
ho $z \in \mathbb{Z}_n(K)$, $z \neq 0$; ridotto $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ t.r.

$$z = \sum m_i \cdot \sigma_i \quad m_i \geq 0$$



coeff. (τ) in $\partial Z \in 0$

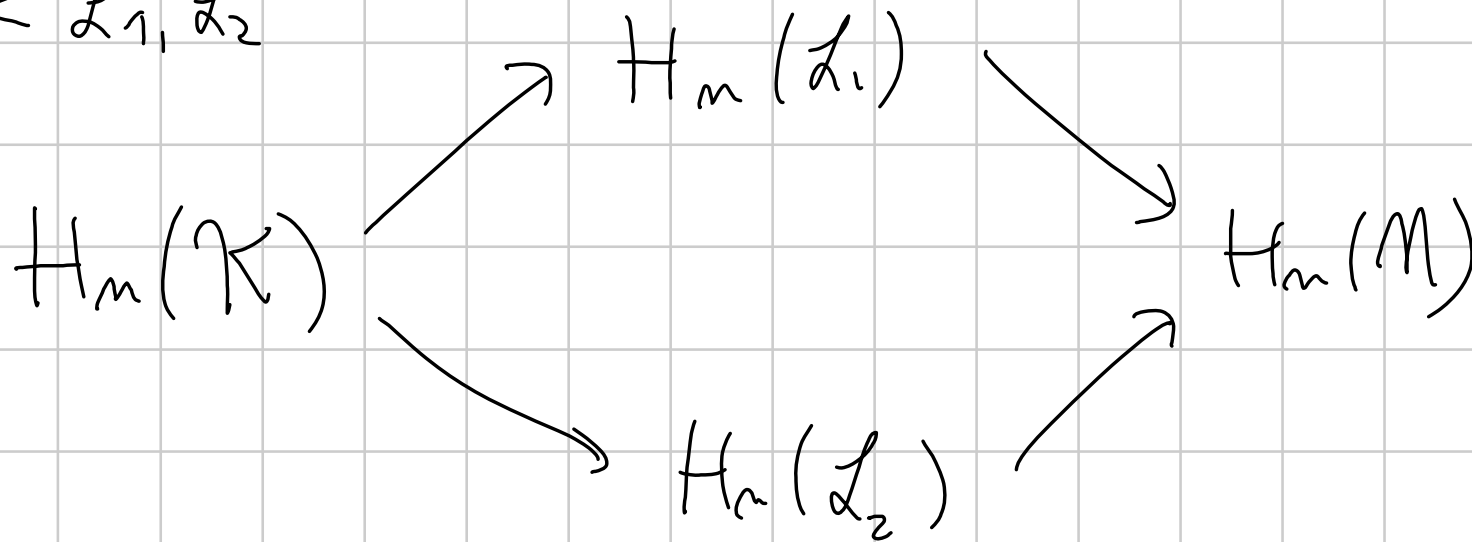
$$\Rightarrow \varepsilon(\sigma_1, \tau) + \varepsilon(\sigma_2, \tau) = 0$$

e $m_1 = m_2$ (o entrambi 0)

Per convenzione $Z = m \cdot (\sigma_1 + \dots + \sigma_p)$ $m > 0$
 $\Rightarrow$ le orientate su σ_i danno orientat. su M_-



Oss: Se M è orientata $H_n(M)$ è canonicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$ - Infatti se prendo K tra di M orientata come M , $L_1, L_2 < K$, $N < L_1, L_2$



Tutti canonici se L_1, L_2, N sono orientate come M .

Chiamo il generatore canonico per M orientate

$$[M] = \text{classe fondamentale}$$

Def: date $f: M^{(n)} \rightarrow N^{(n)}$ continue, M, N orientate
chiamo grado di f , $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$f_*([M]) = \deg(f) \cdot [N]$$

Buona def. perché $g_0, g_1 \simeq f$ simpliciali

allora $g_{0,*} = g_{1,*}$ o meno dei paraggi alle suddir. comuni
(che danno isomorfismi canonici) —

Oss: $f_0 \simeq f_1 \Rightarrow \deg(f_0) = \deg(f_1)$ —

Con: $M^{(n)}$ n -varietà orientata
 $\text{id}_M \neq \text{cost}$ $(\deg(\text{id}_M)) = 1 \neq 0$ —

Calcolo locale del grado (PL): $f: M^{(m)} \rightarrow N^{(n)}$
 $M = |K|$, $N = |\Delta|$, $g: K \rightarrow \Delta$ simpliciale, $f \simeq g$;
 $g^{-1}(\tau) = \{ \sigma_1, \dots, \sigma_p \} \subset K^{(m)}$

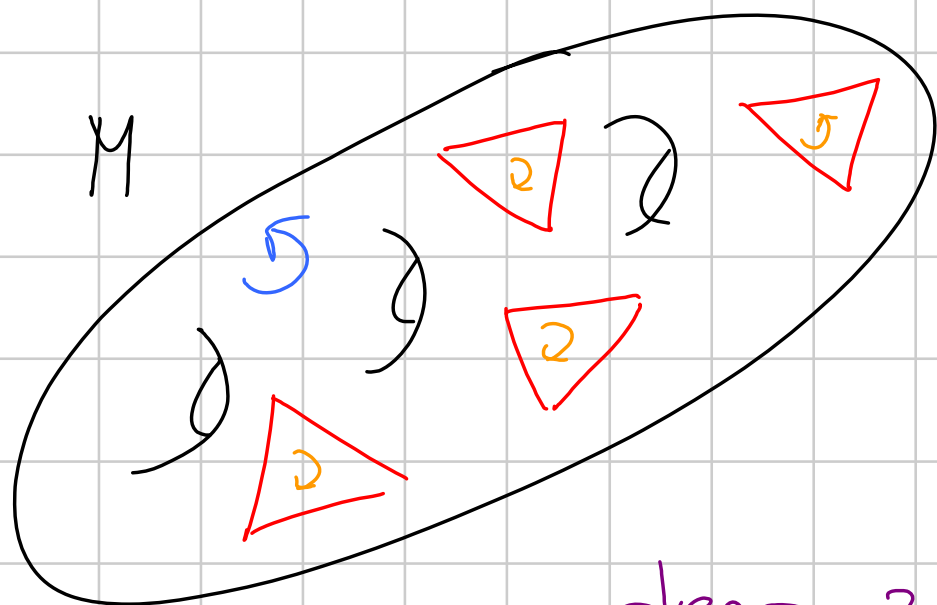
$$\delta_j = \begin{cases} +1 & g: \sigma_j \rightarrow \tau \text{ positive} \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Affermo che $\deg(f) = \delta_1 + \dots + \delta_p$.

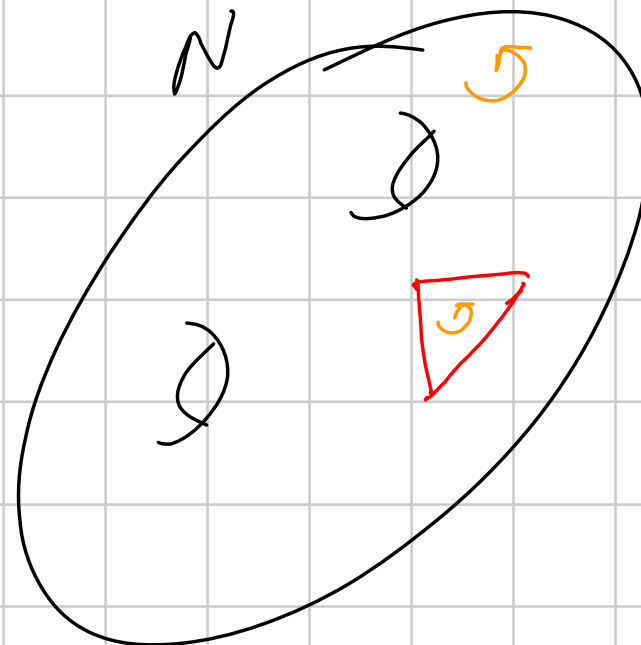
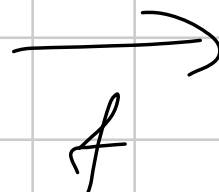
Infatti $[M] = \sigma_1 + \dots + \sigma_p + (\text{gli altri})$

$$g([M]) = (\delta_1 + \dots + \delta_p) \cdot \tau + \text{altri} \neq \tau$$

coeff. di Γ in $\deg(f) \cdot [N]$ $\bar{e} \quad \delta_1 + \dots + \delta_p$
 $\Rightarrow \deg(f) = \delta_1 + \dots + \delta_p.$



$\deg = -2$



Oss: $\bar{e}$ locale perché τ può essere solo a bitransformate di piccolo vicino e quindi prefisso $y \in N$ -

Approccio DIFF al grado - M, N senza ∂

Def: data $f: M^{(m)} \rightarrow N^{(n)}$ dico che $x \in M$ è
 pto regolare se $d_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ è suriettivo
 $\begin{matrix} \parallel \\ \mathbb{R}^m \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ \mathbb{R}^n \end{matrix}$
 (mai se $m < n$) -

Pto critico: non regolare -

Valore critico : immagine di pto unico

Valore regolare : non critico -

Cioè : y regolare $\iff f^{-1}(y)$ consiste di val. reg -

Def: $X^{(p)} \subset M^{(m)}$ è una sottovarietà liscia se loc.

$$(M, X) \underset{\text{DIFF}}{\cong} (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p \times \{0\})$$

Lem: $f: M^{(m)} \rightarrow N^{(n)}$ liscia (M, N senza ∂)
 $y \in N$ val. reg.

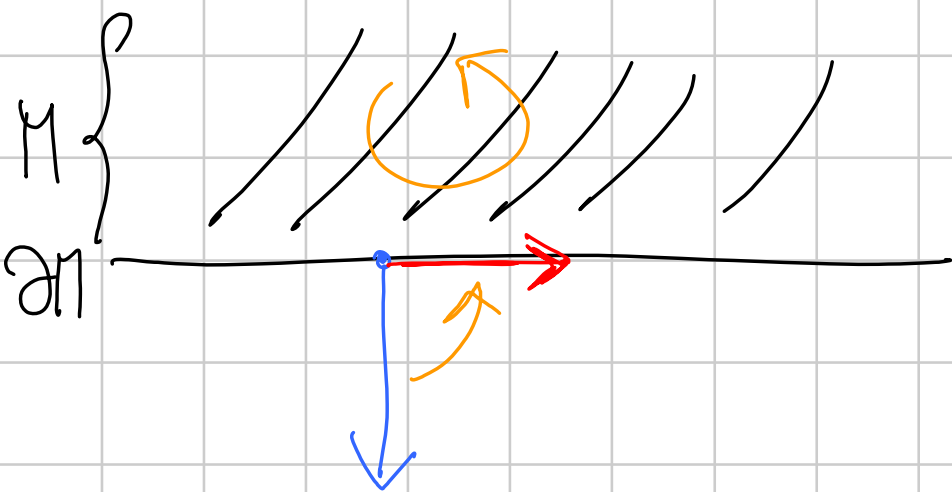
$\Rightarrow f^{-1}(y)$ è sottovarietà di codim m

Dim: $m < n \Rightarrow f^{-1}(y) = \emptyset$

loc. $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\} \Rightarrow$ loc $(y=0)$
 $(M, f^{-1}(y)) \cong_{\text{DIFF}} (\mathbb{R}^m, \{0\} \times \mathbb{R}^{n-m})$ $\square$

Def: Se $M^{(m)}$ è varietà e $a \in \partial M$, M orientata,
 orientazione indotta da M su ∂M è: outa normal first:

$$T_x \partial M \subset T_x M$$



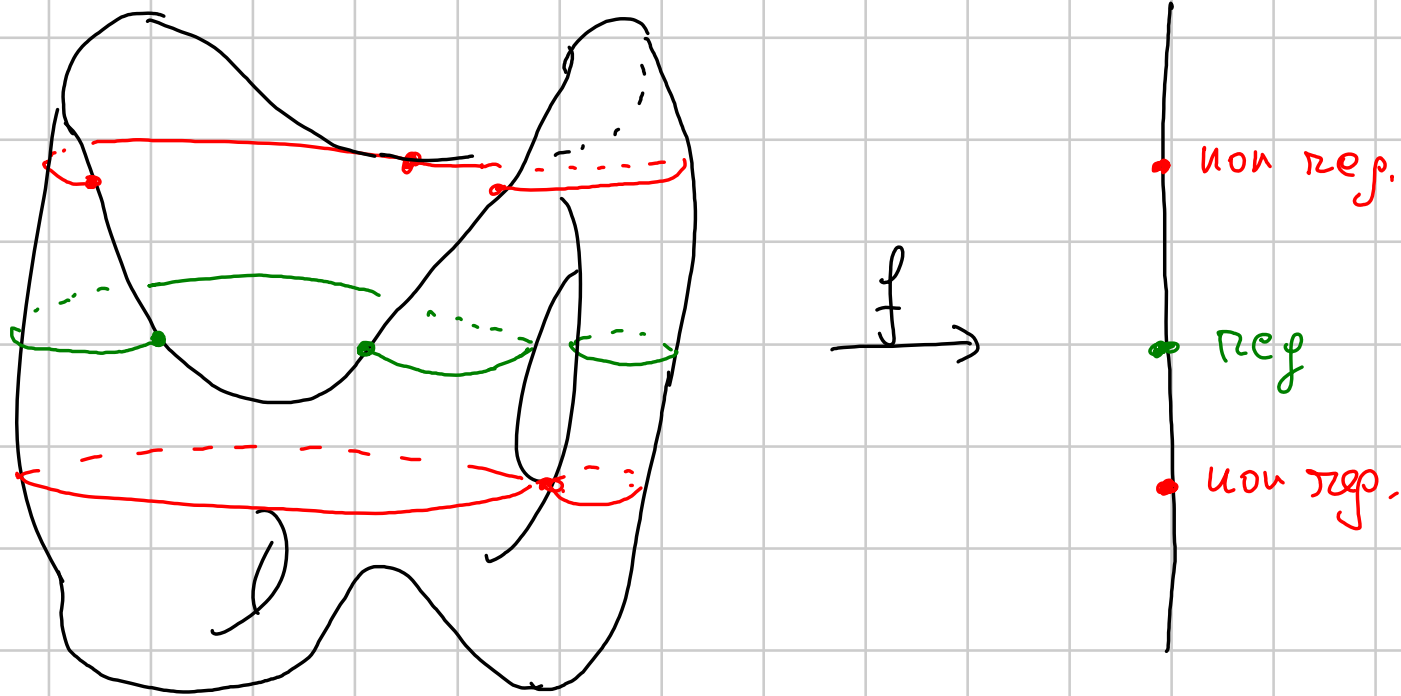
Oss (da fare prima). Per def. una orientazione per M DIFF
 è $\{(U, \alpha)\}$ con $\det(d\alpha_p) > 0$. Avendo ciò posso
 orientare ogni $T_x M$, e trovo una orientaz. loc. costante:
 per ogni punto x_0 posso trovare una carta in cui le orientazioni
 degli $T_x M$ vicino a x_0 nelle carte dirette
 o tutti l'orientaz. di $\mathbb{R}^n$ o tutti meno lei.
 E viceversa: orientaz. loc. costante di tutti i $T_x M$
 ha orientaz. di M .

Lem: Se $f: M^{(m)} \rightarrow N^{(n)}$ liscia, M, N chiuse orientate
 $y \in N$ reg. $\Rightarrow f^{-1}(y)$ canonicamente orientata.

Pf: dato $x \in f^{-1}(y)$ diciamo $(w_{m+1}, \dots, w_m)$ base di $T_x f^{-1}(y)$
è positive se precompletando a $w_1, \dots, w_m$ base pos.
 $\downarrow$ $T_x M$ ho $d_x f(w_1), \dots, d_x f(w_m)$ è base pos. di $T_y N$. $\square$

Def: se $f: M^{(m)} \rightarrow N^{(n)}$ liscia, $M \text{ cpt}$ $\partial M \neq \emptyset$, N chiusa
chiamo $y \in N$ regolare se lo è sia per
 $f|_{\text{int}(M)}$ e $f|_{\partial M}$ -

Prop.: In tal caso $f^{-1}(y) \subset M$ è sottovarietà con bordo
 $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$ e $f^{-1}(y)$ è trasversale a ∂M
 cioè $\forall x \in \partial M$, $T_x f^{-1}(y) \subset T_x(\partial M)$ —



Esercizio: se $f: M \rightarrow N$ M cpt, $\partial M \neq \emptyset$, N chiusa, orientata
 $y \in N$ valore regolare $\Rightarrow$

$f^{-1}(y)$ sottamanifold con bordo di M (transverse al bordo)

e $\partial f^{-1}(y)$ riceve due orientazioni:

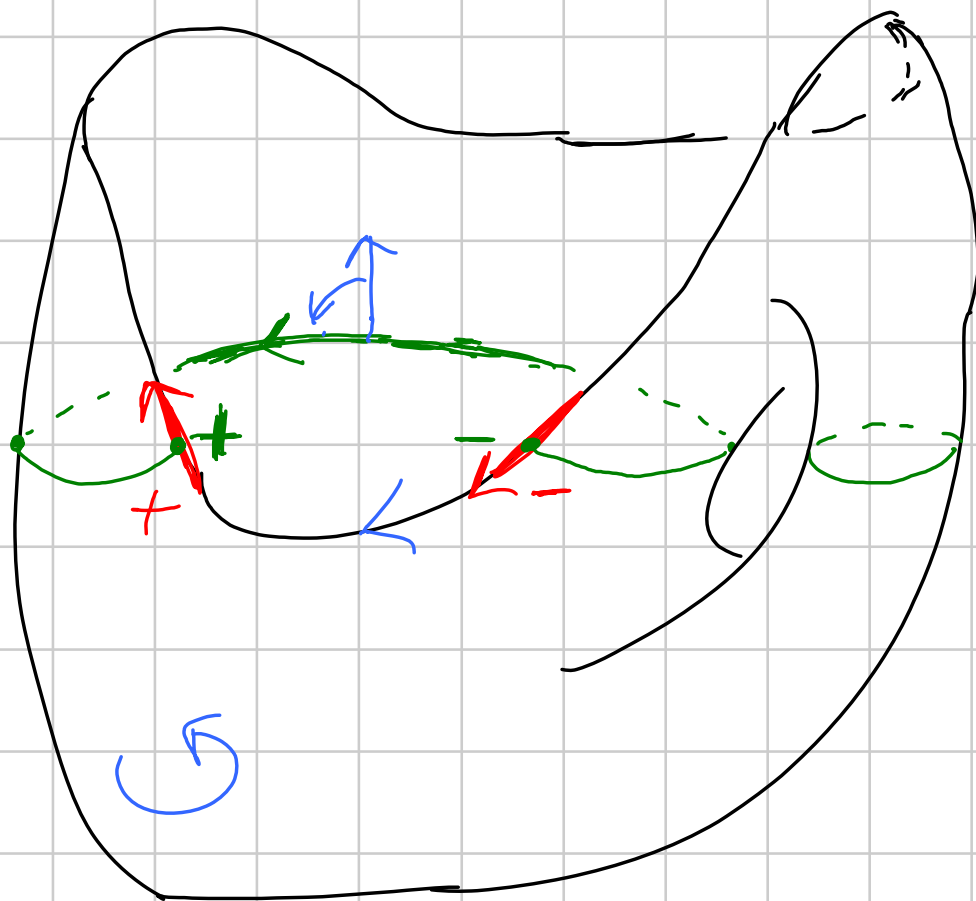
* come bordo di $f^{-1}(y)$ usando $f: M \rightarrow N$

* come $(f|_{\partial M})^{-1}(y): \partial M \rightarrow N$

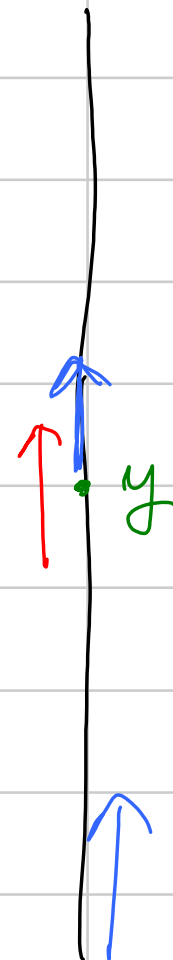
ed esse coincidono —

Oss: per una $f: M^{(n)} \rightarrow N^{(n)}$, se y è regolare

$x \in f^{-1}(y)$, x è isolato perché $f^{-1}(y)$ è $(n-m)$ -sottovarietà
(infatti $d_x f : T_x M \rightarrow T_y N$ è isomorfismo, dunque
 f è un diffeomorfismo vicino a x); la orientaz. di x come $f^{-1}(y)$
è segno ± 1 che dice se $d_x f : T_x M \rightarrow T_y N$
è pos. o neg.



τ



Lemme di Sard: $f: M \rightarrow N$ DIFF

$\Rightarrow \{y \in N: y \text{ critico per } f\}$ è nullo
in particolare ha misura di Lebesgue nulla
in particolare ha complementare $\neq \emptyset$

(Se $m < n$: facile)

Def: data $f: M^{(m)} \rightarrow N^{(n)}$ chiuse orientate, $y \in N$ val. reg.
pongo $\deg(f, y) = \sum \delta_i$ dove

$$f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_p\}$$

$$\delta_i = \text{sgn}(\det d_x f)$$

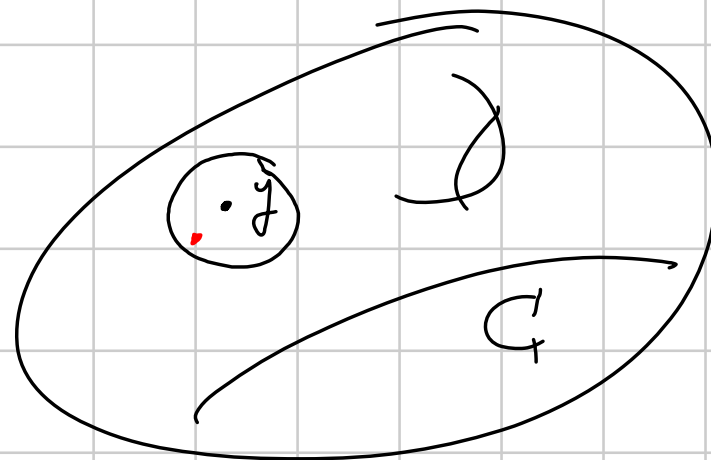
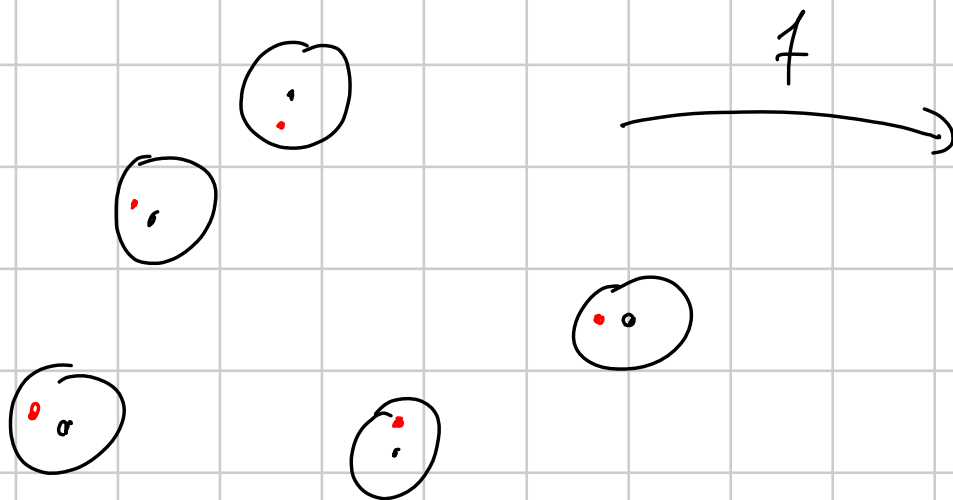
Teo: $\deg(f, y)$ non dipende da y (lo chiamo $\deg(f)$).
 Inoltre $f_0 \simeq f_1 \Rightarrow \deg(f_0) = \deg(f_1)$ -

Cor: posso definire $\deg(f)$ se $f: M \rightarrow N$ è continua -

Oss: $C_f = \{ \text{val. critici di } f \}$

è un chiuso di N con complementare di misura piena -

Inoltre $\deg(f, \cdot)$ è loc. costante su $N \setminus C_f$



Per C pro scanner :

