ETA 20/10/15

$\pi_1 = \langle \alpha(e) : e \in \mathcal{T}^{[1]} \setminus \mathcal{T} \quad \cdots \quad \rangle$

$H_1 = \langle \alpha(e) : \quad \rangle$

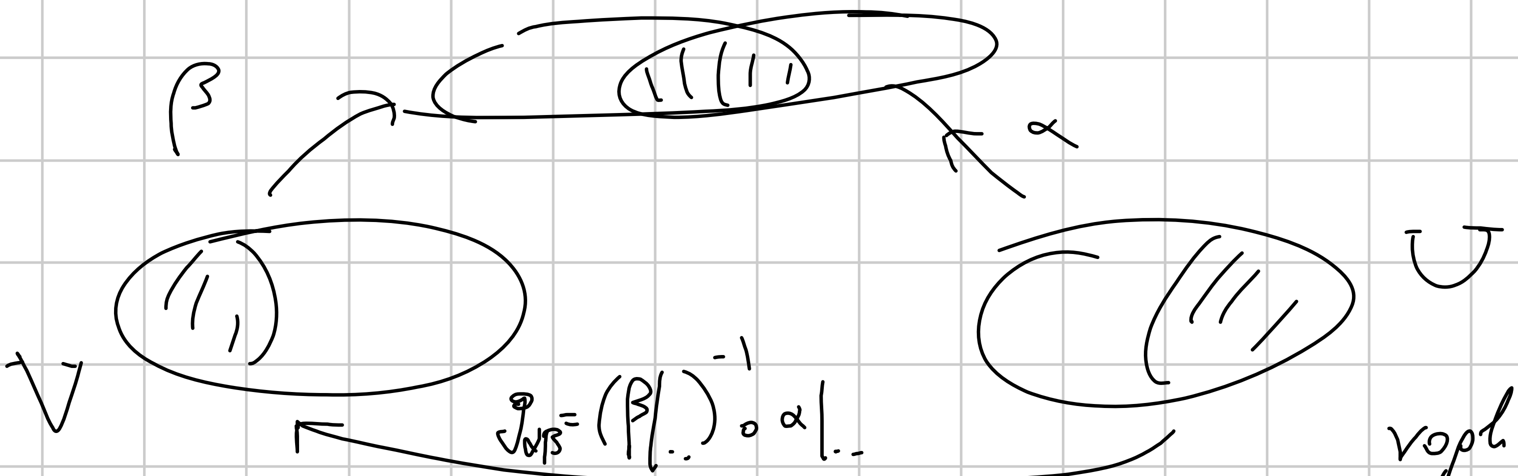
$e \in \mathcal{T}^{[1]} \Rightarrow \alpha(e) = id$

n-<u>Varietà</u> TOP : X Hausdorff paracompatto (cpt)

loc. omeo ad aperti di $\mathbb{R}^n$.

DIFF : X Hausdorff paracpt + atlante diff $= \{(U, \alpha)\}$

$U \subset \mathbb{R}^n$ aperto ; $\alpha : U \to$ aperto di X omeo



voglio $g_{\alpha\beta} \in C^\infty$

+ massimalità (...)

SOTTOVAR. C^∞ di $\mathbb{R}^N$: $X \subset \mathbb{R}^N$ con $\{(U, \alpha)\}$

$d\alpha$ ha ovunque rango m

($\Longrightarrow X$ loc. grafico $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{N-m}$)

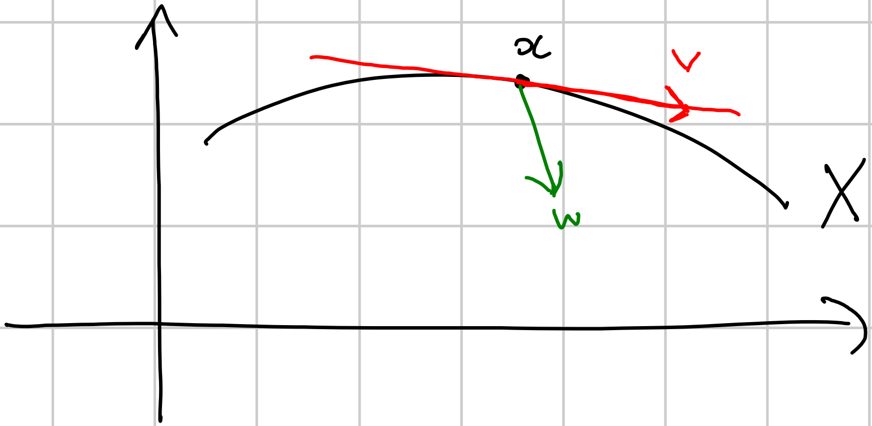
Per $X \subset \mathbb{R}^N$, $x \in X$, $T_x X = d\alpha(0)(\mathbb{R}^m)$

$\alpha : (U, 0) \longrightarrow (\alpha(U), x)$

stsp. di dim. m

$f : X \to Y$ diff. se lo è localmente e $df(x) : T_x X \to T_{f(x)} Y$.

Spazio tangente a X astratto:



$u : X \to \mathbb{R}$ C^∞

estendo u a $\tilde{u}$ su $\mathbb{R}^N$

$\frac{\partial}{\partial v} \tilde{u}$ ben def.

$\frac{\partial}{\partial w} \tilde{u}$ non è ben def

$\Longrightarrow$ $T_x X$ è l'insieme delle direzioni in cui si possono derivare in x le $u : X \to \mathbb{R}$ lisce

Per X astratto

$$T_x X = \left\{ v : C^\infty(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ : \ v \text{ lineare} \atop v(f\cdot g) = v(f)\cdot g(x) + f(x)\cdot v(g) \right\}$$

<u>Fatto</u>: se $\alpha : (U,0) \longrightarrow (X,x)$ è carta

$$v_j(f) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_0 (f \circ \alpha)$$

allora $(v_1,\dots,v_n)$ è base di $T_x X$.

Infatti: $v_j \in T_x X$; $v_1, \dots, v_n$ lin. indip perché

$$v_j(x_k) = \delta_{jk}$$

$$\shortparallel$$

$$(\alpha^{-1})_k$$

Generano ; $v \in T_x X$; $v - \sum_{j=1}^{n} v(x_j) \cdot v_j =: w$

Ora $w(1) = 0$

$w(x_j) = 0 \quad j = 1 \dots n$

$$\Rightarrow w\Big|_{\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]} \equiv 0$$

ammettendo w continuo concludo $w \equiv 0$ per Stone-Weierstrass.

<u>Ora</u>: $\phi : X \to Y$ C^∞ tra varietà C^∞

$$(d_x\phi)(v)(f) = v(f \circ \phi) \qquad d_x\phi(v) \in T_{\phi(x)}Y$$

$v \in T_x X$, $f : Y \to \mathbb{R}$ definita vicino a $\phi(x)$

VARIETÀ A BORDO: TOP/DIFF $\quad X$

carte sono aperti di $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$

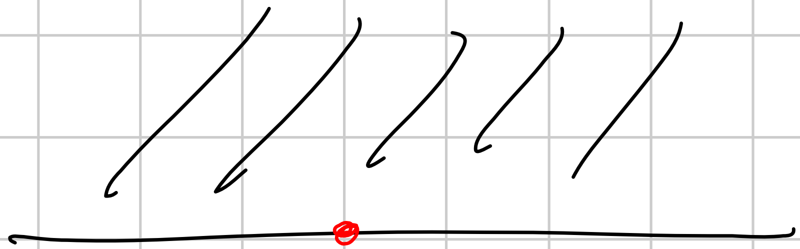
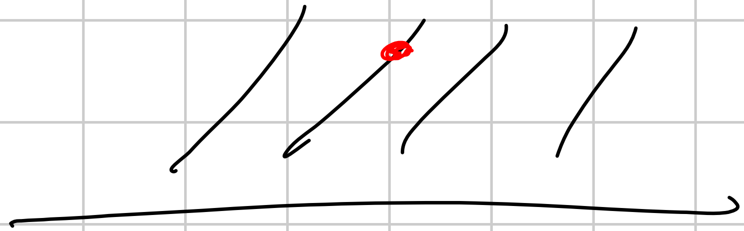
(diff = si estende a una diff. su un aperto) —

$$\partial X = \{ x \in X \text{ t.c. } \exists \text{ carte } (\mathbb{R}^{n-1} \times [0,+\infty), 0) \to (X, x) \}$$

$$\text{int}(X) = X \setminus \partial X$$

(Buona def: devo vedere che

$$(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,+\infty), (0 \dots 0)) \not\cong (\mathbb{R}^{n-1} \times [0,+\infty), (0 \dots 0, 1)))$$

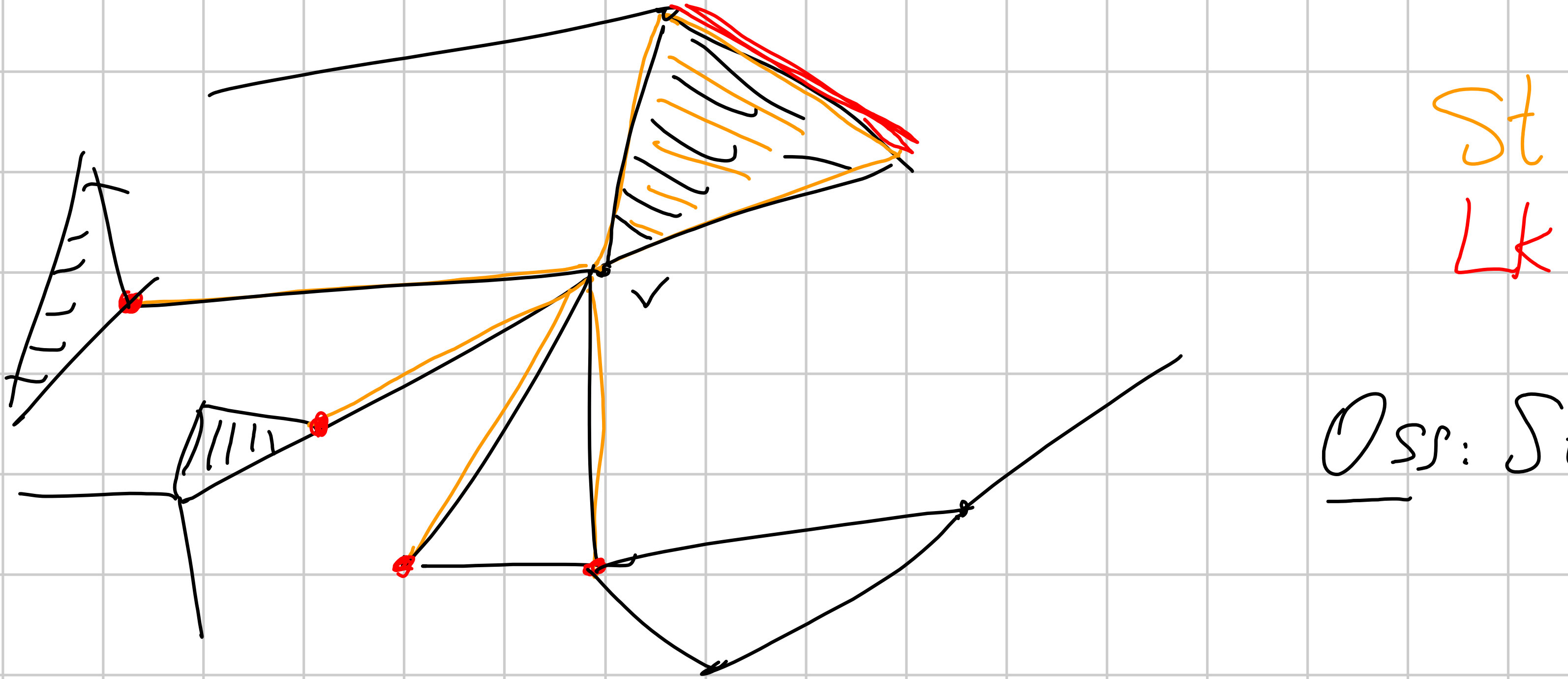
DIFF : ovvio ; vero anche TOP — vedremo —)

K compl. simpl. $\quad St(v,K) = \{ \sigma \in K : \exists\, \tau \in K$ con $v \in \tau,\ \sigma < \tau \}$

$OSt(v,K) = \bigcup \{ \mathrm{int}(\sigma) : v \in \sigma^{[0]} \}$

$v \in K^{[0]}$

link: $Lk(v, \mathcal{K}) = \{\sigma \in \mathcal{K} : \exists \tau \in \mathcal{K}$ con $v \in \tau, \sigma \subset \tau$ ma $v \notin \sigma\}$



__Oss:__ $St(v) = Cone(v, Lk(v))$

Def: chiamo $f: X \to Y$ omeo PL se esistono complessi simpliciali $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ t.c. $X = |\mathcal{K}|$, $Y = |\mathcal{L}|$ $f: \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ omeo simpliciale.

Oppure: $f: |\mathcal{U}| \to |\mathcal{V}|$ omeo tra supporti di c.s. è omeo PL se è simpliciale rispetto a qualche suddivisione.

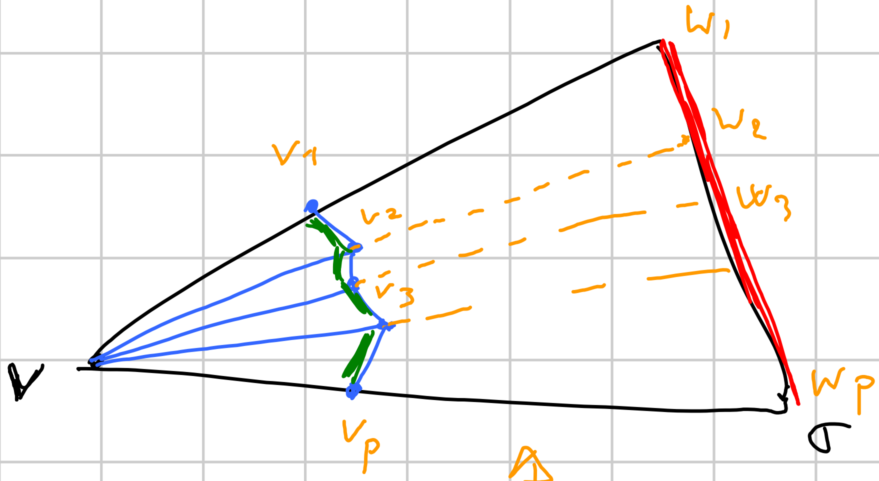
Lem: $\mathcal{H} < \mathcal{K}$, $v \in \mathcal{K}^{[0]}$ $\Longrightarrow Lk(v, \mathcal{K}) \cong_{PL} Lk(v, \mathcal{H})$

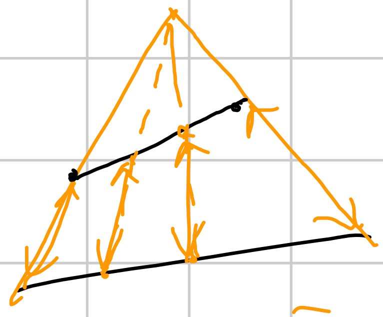
Implica che posso ben definire $/\cong_{PL}$:

$Lk(p, |K|) = Lk(p, \mathcal{H})$ dove $\mathcal{H} < K$ t.c. $p \in \mathcal{H}^{[0]}$

$\forall p \in |K|$

<u>Dim</u>: basta vederlo dentro qualsiasi $\sigma \in K$ con $v \in \sigma^{[0]}$:

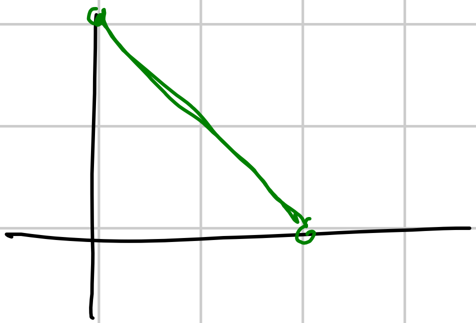


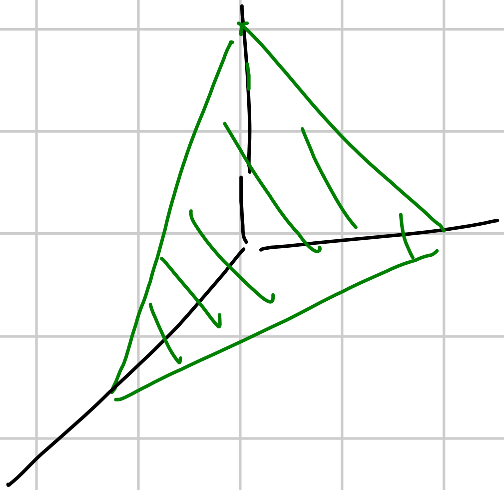


non è affine

invece: definisco radialmente sui vertici, suddivido l'immagine usando i $w_1, \dots, w_p$ ed estendo affinemente $\square$

Δ_n = n-simplesso standard = $\mathrm{Conv}(e_0, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$





Oss: $\Delta_n \underset{TOP}{\cong} D^n$

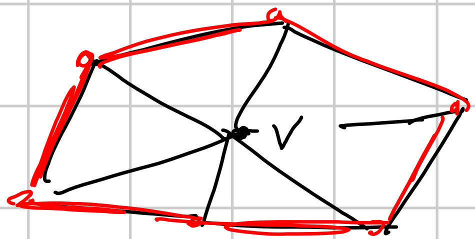
Def / Prop : $X = |K|$ è n-varietà PL se valgono i seguenti fatti equiv :

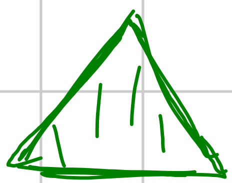
(1) $Lk(v, K) \cong_{PL} \partial \Delta_n \quad \forall v \in K^{[0]}$

(2) $Lk(p, X) \cong_{PL} \partial \Delta_n \quad \forall p \in X$

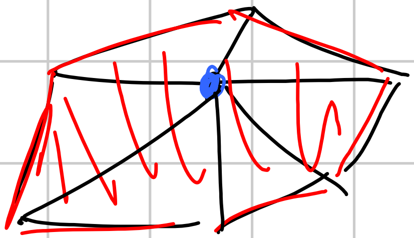
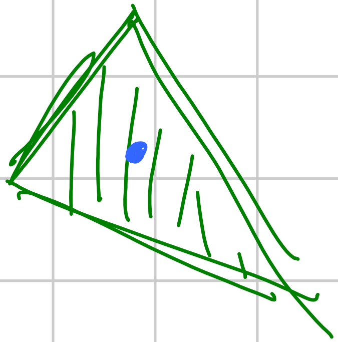
(3) $(St(v, K), v) \cong \left(\Delta_n, \frac{1}{n+1}(e_0, \dots, e_n)\right) \quad \forall v \in K^{[0]}$

(4) $(St(p, X), p) \cong \left(\Delta_n, \frac{1}{n+1}(e_0, \dots, e_n)\right) \quad \forall p \in X$

(1) 



(2) stesso a meno di suddividere, $\forall$ pto

(3)  

(4) stesso a meno di suddivisione, $\forall$ pto

Dim: (2) $\Longrightarrow$ (1)   (4) $\Longrightarrow$ (3)   ovvie

(1) $\Longleftrightarrow$ (3)   Infatti $St(v) = \text{Cono}(v, Lk(v))$

$$\Delta_n = \text{Con}(\text{baricentro}, \partial \Delta_n)$$

(2) $\Longleftrightarrow$ (4)   Stesso argomento

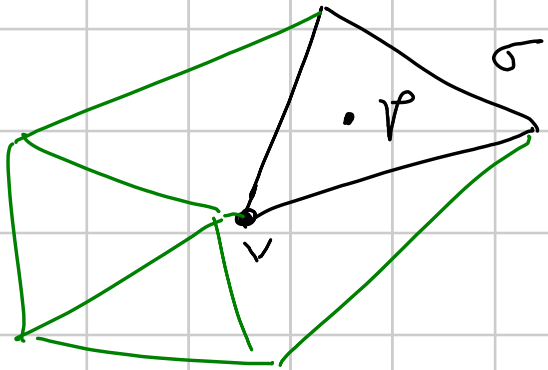
Provo (3) $\Rightarrow$ (4) – So che

$$(St(v, \mathcal{K}), v) \cong_{PL} (\Delta_n, \text{baricentro}) \qquad \forall v \in K^{[0]}$$

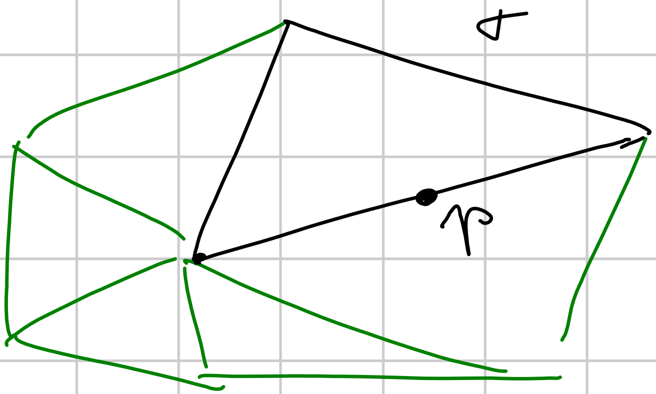
voglio lo stesso $\forall$ pto dopo suddivisione

$p \in |\mathcal{K}|$; prendo l'unico $\sigma \in \mathcal{K}$ t.c. $p \in \overset{\circ}{\sigma}$.

(posso avere anche $\dim \sigma < n$)



$$p \in int(St(v, \mathcal{K}))$$
$$\cong_{PL}$$
$$\Delta_n$$



$\boxed{/ /}_{1,2}$

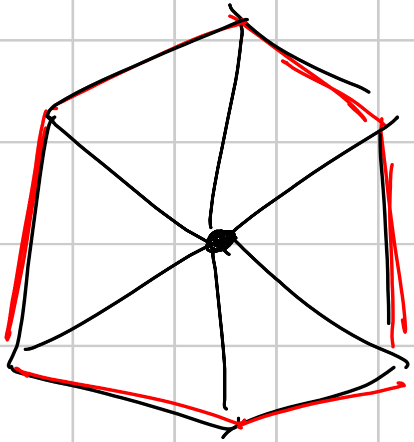
Def/Prop: $X = |K|$ si dice n-varietà PL a bordo se...

(1) $Lk(v, K) \cong_{PL} \partial\Delta_n$ o Δ_{n-1} $\forall v \in K^{(0)}$

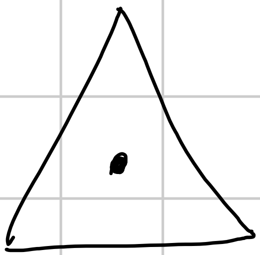
(2) $Lk(p, X) \cong \partial\Delta_n$ o Δ_{n-1} $\forall p \in X$

(3) $St(v, K) \cong_{PL} \Delta_n$ $\forall v \in K^{(0)}$

(4) $St(p, X) \cong_{PL} \Delta_n$ $\forall p \in X$.

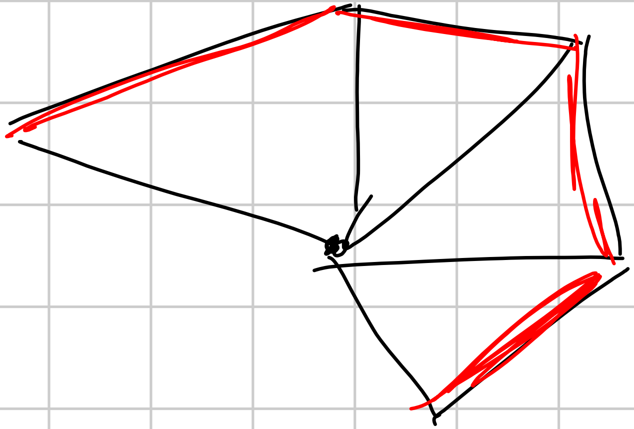


$\| S_{PL}$

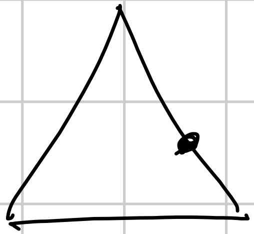


(1) $\Leftrightarrow$ (3)

(2) $\Leftrightarrow$ (4)



$\| S_{PL}$



(2) $\Rightarrow$ (1)

(4) $\Rightarrow$ (3) owie

(3) $\Rightarrow$ (4) Come sopra (esercizio) — $\boxtimes$

<u>Esercizio</u>: $H_{n-1}(\partial \Delta_n) \cong \mathbb{Z}$ $(n \geq 2)$

(orientando le $(n-1)$-facce come $\partial \Delta_n$

$Z_{n-1} = \mathbb{Z} \langle \tau_0 + \dots + \tau_n \rangle$

$B_{n-1} = 0$)

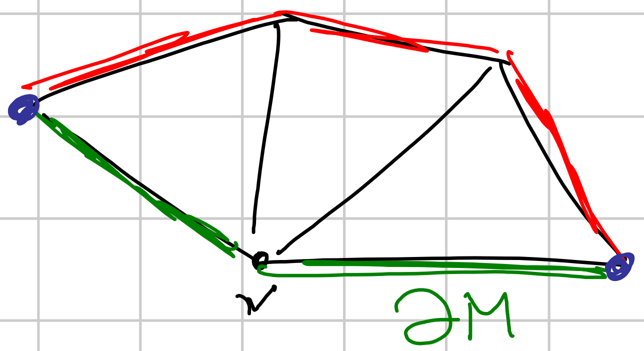
$H_{n-1}(\Delta_{n-1}) = 0$ $(\Delta_{n-1} \simeq \{*\})$

Conseguenza: $\partial X = \{ p \in X : Lk(p, X) \cong \partial \Delta_n \}$

$$\mathrm{int}\, X = \{ p \in X : Lk(p, X) \cong \Delta_{n-1} \}$$

$$\Longrightarrow \quad X = \partial X \sqcup \mathrm{int}(X)$$

<u>Oss</u>: ∂X è una $n-1$ varietà senza bordo:



$$Lk(v, \partial M) = \partial \Delta_{n-1}$$

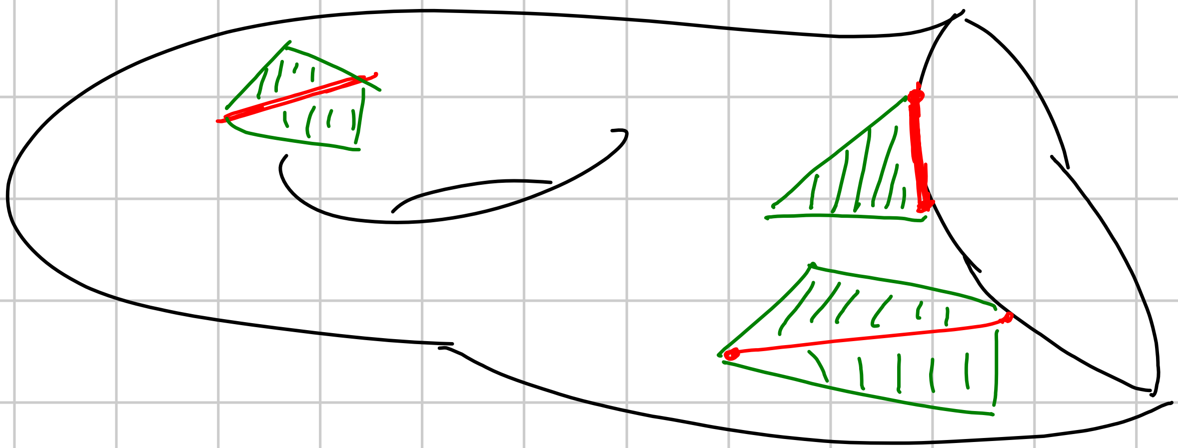
(è la def. di $(n-1)$-var senza ∂)

Oss: Sia X n-var PL $X = |K|$, $\tau \in K^{[n-1]}$.

Si danno due casi:

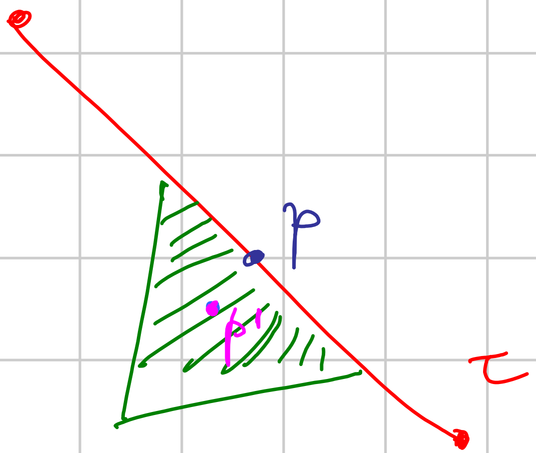
1) $\tau \subset \partial X$ ed esiste unica $\sigma \in K^{[n]}$ t.c. $\tau \subset \sigma$

2) $\mathrm{int}(\tau) \subset \mathrm{int}(X)$ ed esistono esattamente due $\sigma \in K^{[n]}$ t.c. $\tau \subset \sigma$.



Infatti: prendo $p \in \mathrm{int}(\tau)$;

$p \in \partial X \Rightarrow (St(p,X), p) \cong (\Delta_n, \text{pto} \in \partial \Delta_n)$



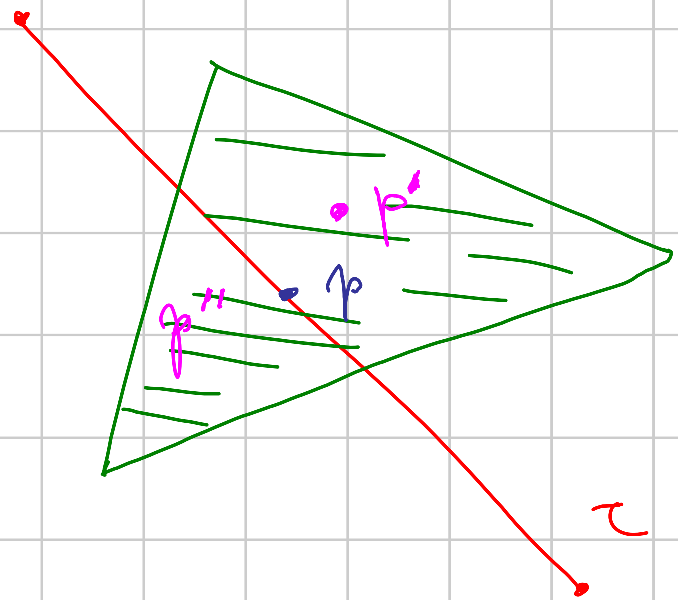
$p' \in \mathrm{int}(\Delta_n)$ generico

$\Downarrow$

$\exists!\ \sigma \in K^{(n)}$
t.c. $p' \in \mathrm{int}(\sigma)$

$\Rightarrow$ Tale σ è l'unico che va bene

$p \in \mathrm{int}(X)$ $\qquad (St(p, X), p) \cong_{PL} (\Delta_n, \text{baricentro})$



p', p'' generici

$\Downarrow$

$\exists!\ \sigma', \sigma'' \in K^{[n]}$ t.c.

$p' \in \mathrm{int}(\sigma')$, $p'' \in \mathrm{int}(\sigma'')$

σ', σ'' sono gli unici che vanno bene

Orientabilità (per n-var) (connessa, anche $\partial X \neq \emptyset$)

TOP — userà omologia relativa

DIFF : orientazione è un atlante max

$$\det(d g_{\alpha\beta}) > 0 \quad \forall \ldots$$

PL : $X = |K^{[n]}|$: orientazione per ogni $\sigma \in K^{[n]}$ t.c. se $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$

ho $\underbrace{\mathcal{E}(\sigma_1, \tau) + \mathcal{E}(\sigma_2, \tau)}_{\text{ha senso se } \tau \text{ è orientata ma non dipende dall'orientazione di } \tau.} = 0$

Legame tra le due versioni –
Vogliamo dare una versione via carte della nozione di var. PL.

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di omeo tra aperti di $\mathbb{R}^n$
chiuse per composizione e restrizione –

Chiamo $\mathcal{G}$-varietà una varietà con atlante $\{(U,\alpha)\}$ t.c. ogni $g_{\alpha\beta}$ è in $\mathcal{G}$ —

$(\mathcal{G} = C^\infty ; \mathcal{G} = C^k)$

Omeomorfismo loc PL $f : U \to V$ t.c.

$\forall x \in U \; \exists \, |K| \subset U$ con $x \in \mathrm{int}(|K|)$ t.c. $f|_K : K \to L$ omeo simpliciale su $|L|$ intorno di $f(x)$ in V —

Varietà locPL — "Proveremo" che equivale a var. PL
e orientaz. è coerente —